Chapitre IV : Etude de comportement du matériau au voisinage d'une fissure

1 Concentration de contraintes

Dans le développement des équations de contraintes de base pour la traction, la compression, la flexion et la torsion, il a été supposé qu'aucune irrégularité géométrique ne s'est produite dans l'élément considéré. Mais il est assez difficile de concevoir une machine sans permettre certains changements dans les sections transversales des membres. Toute discontinuité dans une pièce modifie la répartition des contraintes dans le voisinage de la discontinuité, de sorte que les équations de contrainte élémentaires ne décrivent plus l'état de contrainte dans la pièce à ces emplacements. De telles discontinuités sont appelées leviers de contrainte, et les régions dans lesquelles elles se produisent sont appelées zones de concentration des contraintes. Les concentrations de contrainte peuvent également provenir d'une irrégularité non inhérente à l'élément, telle que des trous, des encoches, des rainures ou des plis.

1.1 Facteur de concentration de contraintes

Un facteur de concentration de contrainte théorique ou géométrique Kt ou Kts est utilisé pour relier la contrainte maximale réelle au niveau de la discontinuité à la contrainte nominale. Les facteurs sont définis par les équations :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \qquad K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}$$

Où Kt est utilisé pour les contraintes normales et Kts pour les contraintes de cisaillement. La contrainte nominale σ_0 ou τ_0 est la contrainte calculée en utilisant les équations de contrainte élémentaires et la surface nette, ou la section transversale nette.

Le facteur de concentration de contrainte ne dépend que de la géométrie de la pièce. C'est-à-dire que le matériau utilisé n'a aucun effet sur la valeur de Kt. C'est pourquoi on l'appelle un facteur théorique de concentration des contraintes.

1.2 Concentrations de contraintes aux trous

1.2.1 Traction uni-axiale - Solution de Kirsch (1898)

La solution de Kirsch pour les contraintes à un trou est pour le cas de la traction uniaxiale dans une plaque infinie. La traction uniaxiale est représentée par la contrainte à distance, $\sigma_{\square}$.

Le trou a un rayon, a, la coordonnée radiale est r (ce qui n'a pas de sens quand r <a), et θ = 0 s'aligne avec la direction de chargement à distance. Nous verrons que le grand facteur de concentration de trois contraintes se produit à θ = ± 90◦.

La solution pour l'état de contrainte autour d'un trou circulaire est

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_\infty}{2}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)+\frac{\sigma_\infty}{2}\left(1-4\left(\frac{a}{r}\right)^2+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2}\left(1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)-\frac{\sigma_\infty}{2}\left(1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2}\left(1+2\left(\frac{a}{r}\right)^2-3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\sin 2\theta$$

1.2.2 Contraintes aux trous elliptiques

Lorsqu'une fissure a une forme elliptique et que son orientation est perpendiculaire à la contrainte appliquée, la valeur de contrainte maximale σ_{MAX} à l'extrémité de la fissure se calcule à partir de la relation :

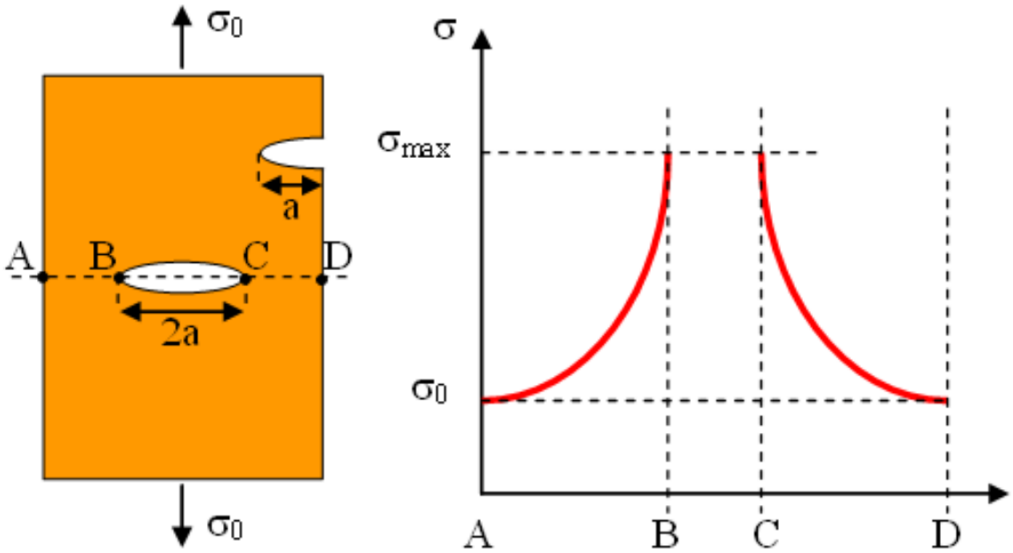
$$\sigma_{max} = \sigma_0\left[1+2\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}\right]$$

$$r = \frac{b^2}{a}$$

Avec σ_0 : la contrainte appliquée

a : la longueur d'une fissure débouchant ou la demi-longueur d'une fissure interne (non débouchante)

r : le rayon de courbure à l'extrémité de la fissure



Le facteur $(a/r)^{1/2}$ peut prendre des valeurs très élevés dans le cas des fissures relativement longues et avec des rayons de courbure faibles. L'équation peut alors se simplifier :

$$\sigma_{max} = 2\sigma_0 \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}$$

La valeur de σ_{MAX} peut elle aussi atteindre des valeurs très élevées par rapport à la contrainte σ_0 .

Le rapport entre σ_{MAX} et σ_0 est nommé facteur de concentration de contrainte (K_t)

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} = 2\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}$$

2 Conception en mode I

L'expression de K_I est de la forme :

$$K_I = \alpha\sigma\sqrt{\pi a}$$

α étant un facteur correctif tenant compte de la géométrie de la fissure et du détail fissuré ainsi que du type de sollicitations.

Une structure sera donc considéré comme sure si l'inégalité est vérifiée

$$\alpha\sigma\sqrt{\pi a}\ K_{IC}$$

3 Facteur d'intensité de contrainte

Les FIC(K) définissent complètement le champ de contrainte au voisinage de la fissure.

Unité de K : $MPa.m^{1/2}$

Les FIC peuvent être utiliser comme critère de rupture lorsque K atteint une valeur critique K_C , la fissure se propage brutalement : $K = K_c$

K_C est appelé facteur critique d'intensité de contrainte

3.1 Concentration de contrainte au voisinage d'un défaut

Les contraintes ont été calculées par Irwin à l'aide de la théorie de l'élasticité .elles sont exprimées par les relations suivantes :

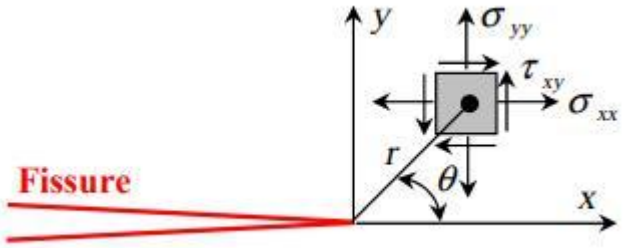


Figure 5 : Définition des axes (x,y) et des coordonnées (r,θ)au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

Mode I

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \end{cases}$$

Mode II

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\left(2+\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \dfrac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Mode III

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \dfrac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

4 Correction de plasticité

La MLR prédit des contraintes infinies à l'extrémité d'une fissure aigue. Mais dans les matériaux réels, les contraintes à l'extrémité d'une fissure restent finies car le rayon à fond de fissure n'est pas nul. Ces contraintes dépassent la limite d'élasticité du matériau et la déformation plastique qui en résulte, conduit à une relaxation des contraintes à l'extrémité de la fissure.

La MLR devient progressivement imprécise à mesure que la taille de la zone plastifiée qui se forme à l'extrémité de la fissure, devient importante. Des corrections simples à la MLR sont proposées lorsque cette taille reste raisonnable.

Il est important de connaître la taille de la zone plastique à fond de fissure .cette taille peu être estimée par l'approche d'Irwin. Cette approche conduit à des corrections simples du FIC.

4.1 Approche d'Irwin

Dans la plan d'une fissure et en aval de l'extrémité de celle-ci , la contrainte normale σ_y lorsque la sollicitation est en mode I, est donnée par :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

Irwin considère, en première approximation, que la frontière entre zone élastique et plastique correspond au lieu des points ou les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau. Pour déterminer le rayon r_E ou cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, on écrit alors $\sigma_y = \sigma_E$ ou σ_E est la limite d'élasticité en traction simple, ce qui conduit à :

$$r_E = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_E}\right)^2$$

La longueur r_E est indique sur la figure IV .on tronque tout simplement le champ des contraintes à $\sigma_y = \sigma_E$, en faisant l'hypothèse que le comportement du matériau est élastique plastique parfait.

Cette analyse fait cependant abstraction des forces non transmises représentées pair l'aire hachurée de la figure IV. Pour tenir compte de ces forces, il convient d'assurer l'équilibre entre les deux répartitions (élastique et élastoplastique) des contraintes. La taille r_p de la zone plastique doit être donc plus grande que. L'équilibre des forces entre les deux configurations conduit à :

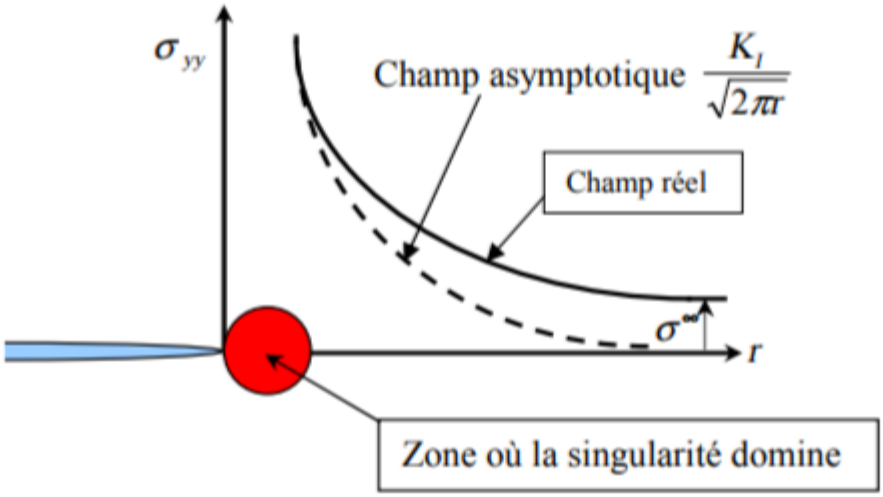


Figure 6 : Répartition des contraintes élastiques et élastoplastiques dans le plan de la fissure de son extrémité

$$\int_0^{r_E} \sigma_y \, dr = \sigma_E \, r_p + \int_{r_E}^{\infty} \sigma_y \, dr \Rightarrow \sigma_E \, r_p = \int_0^{\infty} \sigma_y \, dr$$

Soit, compte tenu de l'expression de σ_y :

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 = 2 r_E$$

La distribution des contraintes dans la répartition élasto plastique pour $r > r_p$ est obtenue par une translation sur la distance r_E de la répartition élastique. Irwin rend compte de cette translation en définissant un FIC effectif obtenu en augmentant la longueur de fissure de r_E . Ce qui revient à considérer non pas la longueur réelle a de la fissure mais une longueur effective

$a_{eff} = a + r_E$

Ainsi dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie chargée en mode I, le FIC sans correction $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$, devient après correction :

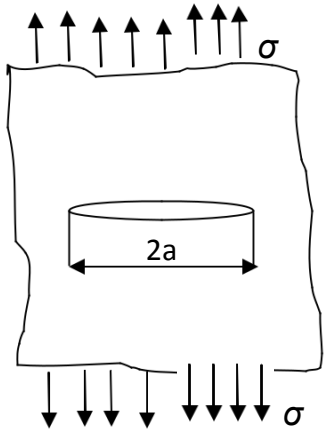
$$K_{eff} = \sigma \sqrt{\pi \left(a + r_E \right)} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_E} \right)^2}}$$

5 Problème de Griffith

Ce se nom est désigné le problème élémentaire d'une fissure de longueur 2a, dans une plaque infinie dans les deux directions chargée uniformément selon le mode I

Le facteur d'intensité de contrainte est dans ce cas :

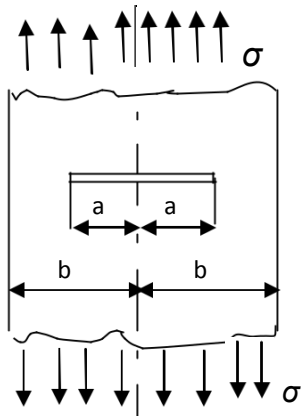
$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$$



5.1 Problème de Griffith dans le cas d'une plaque de largeur finie

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \times f\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1 - 0.5\frac{a}{b} + 0.370\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 0.044\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\sqrt{1-\frac{a}{b}}}$$

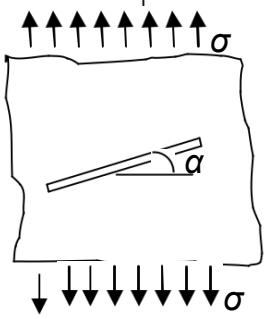


5.2 Milieu infinie fissuré

$$K_I = \sigma \sin^2\alpha\sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \sigma \cos\alpha \sin\alpha \sqrt{\pi a}$$

-critère de rupture en mode mixte : $\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{2K_{Ic}}\right)^2 = 1$



5.3 Milieu semi fini fissuré

$$K_I = 1.1222\sigma\sqrt{\pi a}$$

