

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique



Chapitre 5

Introduction À La Théorie Du Choix Social

**Année universitaire
2021/2022**

- Dans un **problème de vote**, on cherche à trouver un **système électoral** permettant d'agréger de manière satisfaisante les avis exprimés par plusieurs **votants** concernant divers **candidats** de façon à déterminer un **vainqueur** ou encore à **classer** par ordre de préférence les différents candidats.
- La question fondamentale dans la **théorie du choix social** est *comment agréger des préférences individuelles en un choix collectif*?

AMCD	Théorie du vote
<i>Action</i>	<i>Candidat</i>
<i>Critère</i>	<i>Votant</i>
<i>Préférence partielle</i>	<i>Préférence individuelle</i>
<i>Préférence globale</i>	<i>Préférence social ou collective</i>
<i>Méthode d'agrégation</i>	<i>Système électoral</i>

Hypothèses

- ❑ Tout votant est capable de donner un **ordre de préférence** sur les candidats (avec d'éventuelles égalités).
- ❑ Les votants sont **sincères** c'est-à-dire qu'ils utilisent les possibilités offertes par le système électoral pour révéler leurs vraies préférences.

□ Un **bon** système électoral est un système qui prend en compte l'opinion de tous les membres de la société :

« **démocratique** qui respecte l'avis de la **majorité** ».

□ Autrement:

« *Si plus de personnes votent en faveur de a par rapport à b, a doit être préféré à b* »

□ Cette propriété est garantie lorsque il n'y a que **deux candidats** :

Si plusieurs candidats ???

SOMMAIRE

- **Les systèmes de vote uninominaux** : « *Uninominal se dit d'un vote qui ne porte que sur un nom* »
 - Système anglais,
 - Système français,
 - Vote majoritaire en cascade.
- **Les systèmes par listes ordonnées**
 - Méthode de Condorcet
 - Scrutin de Borda.
- **Critère d'indépendance**
- **Le théorème d'impossibilité d'Arrow.**

SOMMAIRE

❑ Les systèmes de vote uninominaux

- ❑ système anglais,
- ❑ système français,
- ❑ vote majoritaire en cascade.

❑ Les systèmes par listes ordonnées

- ❑ méthode de Condorcet
- ❑ scrutin de Borda.

❑ Critère d'indépendance

❑ Le théorème d'impossibilité d'Arrow.

Système Anglais (Système À Un Seul Tour)

Principe: Le candidat recevant le plus de suffrages à l'issue de l'unique tour de scrutin est élu.

Exemple (Problème du respect de la majorité)

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats lors d'une élection comprenant 21 votants :

10	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
6	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$,
5	votants ont les préférences	$c \succ b \succ a$.

1. Qui sera élu?
2. Majorité ?

Système Anglais (Système À Un Seul Tour)

Principe: Le candidat recevant le plus de suffrages à l'issue de l'unique tour de scrutin est élu.

Exemple (Problème du respect de la majorité)

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats lors d'une élection comprenant 21 votants :

10 votants ont les préférences $a > b > c$,

6 votants ont les préférences $b > c > a$,

5 votants ont les préférences $c > b > a$.

- Le candidat a est élu avec 10 voix sur 21.
- Néanmoins, la majorité de votants préfère d'autres candidats à a (11 votants sur 21 préfèrent b et c à a) !

Système Français (Scrutin Majoritaire À Deux Tours)

Principe

1. Le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu.
2. Sinon, les deux candidats recueillant le plus de voix à l'issue du premier tour sont qualifiés pour un deuxième tour.
3. Le candidat recueillant le plus de voix à l'issue du deuxième tour gagne l'élection.

Hypothèse: les préférences des votants ne changent pas entre les deux tours.

Exemple

10	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
6	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$,
5	votants ont les préférences	$c \succ b \succ a$.

Système Français (Scrutin Majoritaire À Deux Tours)

Principe

1. Le candidat qui reçoit plus de la moitié des voix est élu.
2. Sinon, les deux candidats recueillant le plus de voix à l'issue du premier tour sont qualifiés pour un deuxième tour.
3. Le candidat recueillant le plus de voix à l'issue du deuxième tour gagne l'élection.

Hypothèse: les préférences des votants ne changent pas entre les deux tours.

Exemple

10	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
6	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$,
5	votants ont les préférences	$c \succ b \succ a$.

□ a et b passent au deuxième tour, où on obtient :

10	votants ont les préférences	$a \succ b$,
11	votants ont les préférences	$b \succ a$.

□ Le candidat b est élu avec 11 voix sur 21.

□ Notons qu'aucun des deux candidats battus (a et c) n'est préféré à b par une majorité (y a respect des préférences de la majorité: problème précédent partiellement résolu).

Système Français (Scrutin Majoritaire À Deux Tours)

Exemple

Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats et 21 votants dont les préférences sont les suivantes :

10 votants ont les préférences $b \succ a \succ c \succ d$,

6 votants ont les préférences $c \succ a \succ d \succ b$,

5 votants ont les préférences $a \succ d \succ b \succ c$.

Système Français (Scrutin Majoritaire À Deux Tours)

Exemple

Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats et 21 votants dont les préférences sont les suivantes :

10	votants ont les préférences	$b \succ a \succ c \succ d$,
6	votants ont les préférences	$c \succ a \succ d \succ b$,
5	votants ont les préférences	$a \succ d \succ b \succ c$.

- Seuls les candidats b et c passent au second tour
- Le candidat b l'emporte avec 15 voix sur 21
- La majorité absolue (11/21) des votants préfère à la fois le candidat a et le candidat d que le candidat b .

Problème De Manipulabilité

Exemple

Supposant que les 6 votants dont les préférences $c > a > d > b$ ont décidé de **ne pas être sincères** et de se comporter comme si leurs préférences étaient $a > c > d > b$.

10 votants ont les préférences $b > a > c > d$

6 votants ont les préférences ~~$c > a > d > b$~~ $a > c > d > b$

5 votants ont les préférences $a > d > b > c$

Problème De Manipulabilité

Exemple

Supposant que les 6 votants dont les préférences $c > a > d > b$ ont décidé de **ne pas être sincères** et de se comporter comme si leurs préférences étaient $a > c > d > b$.

10	votants ont les préférences	$b > a > c > d$
6	votants ont les préférences	$c > a > d > b$ $a > c > d > b$
5	votants ont les préférences	$a > d > b > c$

- Le candidat a est élu **dès le premier tour** de scrutin en recevant une majorité absolue de suffrages (11/21). Les 6 votant ont fait gagner le candidat a qui pour eux est préféré à b.
- On voit donc qu'un tel système peut ne pas inciter les votants à révéler leurs « vraies préférences »:

La méthode de vote est dite manipulable.

Problème De Monotonie (1)

Exemple

Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats à une élection pour laquelle il y a 17 votants. Suite à une enquête d'opinion publiée avant les élections, le candidat a se rend compte des préférences suivantes :



6	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
5	votants ont les préférences	$c \succ a \succ b$,
4	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$,
2	votants ont les préférences	$b \succ a \succ c$.

□ Avec le **système français**:

- seuls les candidats a et b devraient passer le premier tour .
 - Le candidat a devrait gagner l'élection au second tour avec 11 voix sur 17.
- Ne trouvant pas cette prévision suffisamment confortable, le candidat a décide de lancer une ***campagne électorale*** afin d'influencer sur l'électorat de son plus proche concurrent, le candidat b.

Problèmes De Monotonie (2)

Supposons que la campagne électorale ait l'effet recherché sur les deux derniers votants pour lesquels a est passé devant b (les préférences des autres votants restent inchangées). On obtient alors les préférences suivantes :

8	votants ont les préférences	$a \succ b \succ c$,
5	votants ont les préférences	$c \succ a \succ b$,
4	votants ont les préférences	$b \succ c \succ a$.

- Même si b est éliminé dès le premier tour, mais c'est le candidat c qui sera élu avec 9 voix sur 17.
- On dit que la méthode est **non monotone** dans la mesure où l'amélioration de la position d'un candidat dans les préférences individuelles peut se traduire par une dégradation de son classement final.

Problème De Participation

Exemple Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats avec 11 votants :

4 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,
4 votants ont les préférences $c \succ b \succ a$,
3 votants ont les préférences $b \succ c \succ a$.

- Le candidat **c** devrait gagner l'élection au second tour avec 7 voix sur 11.
- Supposons que 2 parmi les 4 premiers électeurs, qui ne sont pas intéressés par l'élection de **c** décident de ne pas aller voter. On se retrouve donc devant une population de 9 votants dont les préférences se répartissent comme suit :

2 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,
4 votants ont les préférences $c \succ b \succ a$,
3 votants ont les préférences $b \succ c \succ a$.

- Le candidat **b** est élu au second tour avec une majorité de 5 voix sur 9. L'abstention des deux votants a causé la défaite du candidat **c**.
- Une telle méthode de vote **n'incite pas à la participation**.

Problème De Non Séparabilité

- Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats avec 26 votants : 13 votants situés dans des zones urbaines et le reste dans les zones rurales.

Zones urbaines	Zones rurales
4 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,	4 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,
3 votants ont les préférences $b \succ a \succ c$,	3 votants ont les préférences $c \succ a \succ b$,
3 votants ont les préférences $c \succ a \succ b$,	3 votants ont les préférences $b \succ c \succ a$,
3 votants ont les préférences $c \succ b \succ a$.	3 votants ont les préférences $b \succ a \succ c$.

- Si le vote se déroule séparément dans les deux zones (Vote en sous-comités):

✓ ?.

- Si le vote est national :

✓ ?

Problème De Non Séparabilité

- Soit $\{a, b, c\}$ l'ensemble des candidats avec 26 votants : 13 votants situés dans des zones urbaines et le reste dans les zones rurales.

Zones urbaines	Zones rurales
4 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,	4 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,
3 votants ont les préférences $b \succ a \succ c$,	3 votants ont les préférences $c \succ a \succ b$,
3 votants ont les préférences $c \succ a \succ b$,	3 votants ont les préférences $b \succ c \succ a$,
3 votants ont les préférences $c \succ b \succ a$.	3 votants ont les préférences $b \succ a \succ c$.

- Si le vote se déroule séparément dans les deux zones (Vote en sous-comités):

- ✓ Le candidat a gagne dans les deux zones.

- Si le vote est national :

- ✓ Le candidat a est éliminé dès le premier tour, c'est b qui va gagner face à c au second tour avec 17 voix contre 9.

- On dit qu'une telle méthode de vote **n'est pas séparable**.

Le Scrutin Majoritaire À 2 Tours

- ✓ Légèrement meilleur que le scrutin majoritaire simple
- ✓ Il est manipulable
- ✓ Il n'incite pas nécessairement à la participation
- ✓ Il n'est pas monotone
- ✓ Il est non séparable

Vote Majoritaire En Cascade

Ce qui est sûr que le **vote majoritaire** marche très bien pour **deux candidats**. L'idée est de traiter un problème de vote à n candidats ($n > 2$) comme une séquence de **$n-1$** problèmes de votes à deux candidats :

- On commence par choisir arbitrairement deux candidats que l'on confronte dans un vote à la majorité,
- Le vainqueur est opposé à un troisième candidat dans un second vote,
- ... et ainsi de suite jusqu'au dernier des n candidats.

Mais cette méthode a aussi des inconvénients ...

- | | | |
|---|--------------------------|-----------------------|
| 1 | votant a les préférences | $a \succ b \succ c$, |
| 1 | votant a les préférences | $b \succ c \succ a$, |
| 1 | votant a les préférences | $c \succ a \succ b$. |

□ ***Si l'ordre est a, b, c***

Candidats a et b d'abord : a sera élu avec une majorité de 2 voix sur 3; a avec c : victoire de c par 2 voix sur 3.

□ ***Avec l'ordre b, c, a***

Candidats b et c : b sera élu avec une majorité de 2 voix sur 3; b avec a : victoire de a par 2 voix sur 3.

□ **La victoire d'un candidat dépend du l'ordre choisi (*plus un candidat entre tôt, moins il est avantage*).**

□ **Ce système de vote n'est pas neutre.** (*Contrairement aux systèmes anglais et français*).

Problème De Violation De L'unanimité Dans Un Vote Majoritaire En Cascade

- Le principe d'unanimité (= accord de tous) dans une procédure de vote consiste à respecter un avis partagé par l'ensemble de tous les votants.
- Soit $\{a, b, c, d\}$ l'ensemble des candidats, considérons trois votants dont les préférences sont les suivantes :

1 votant a les préférences $b \succ a \succ d \succ c$,
1 votant a les préférences $c \succ b \succ a \succ d$,
1 votant a les préférences $a \succ d \succ c \succ b$.

- Si l'ordre est a, b, c, d alors le candidat d emporte l'élection alors que la totalité des votants lui préfèrent a , candidat qui est éliminé face à b dès la première confrontation.
- Une telle méthode *ne respecte pas le principe d'unanimité*. A savoir dans les systèmes anglais et français, il est impossible de choisir un candidat tel que l'unanimité des votants lui en préfère un autre.

SOMMAIRE

- ❑ Les systèmes de vote uninominaux : Uninominal se dit d'un vote qui ne porte que sur un nom
 - ❑ système anglais,
 - ❑ système français,
 - ❑ vote majoritaire en cascade.
- ❑ Les systèmes par listes ordonnées
 - ❑ méthode de Condorcet
 - ❑ scrutin de Borda.
- ❑ Critère d'indépendance
- ❑ Le théorème d'impossibilité d'Arrow.

Méthode de Condorcet

Condorcet propose de comparer les candidats par paires en utilisant la méthode suivante :

« Un candidat a est préféré à un candidat b SSI le nombre de votants ayant classé a devant b est strictement supérieur au nombre de votants ayant classé b devant a (en cas d'égalité les deux candidats sont jugés indifférents) ».

Principe de Condorcet

On déclare vainqueur de Condorcet le candidat qui bat tous les autres (s'il existe).

Remarque

Ni le système anglais (1 tour) ni le système français (2 tours) ne vérifient le principe de Condorcet.

Méthode de Condorcet

Trouver le vainqueur de Condorcet dans l'exemple suivant:

10 votants ont les préférences $a \succ b \succ c$,
6 votants ont les préférences $b \succ c \succ a$,
5 votants ont les préférences $c \succ b \succ a$.

a bat b pour 10 votants

b bat a pour 11 votants

➤ *Donc b est préféré à a*

b bat c pour 16 votants

c bat b pour 5 votants

➤ *Donc b est préféré à c*

Alors b est le vainqueur de Condorcet.

Paradoxe De Condorcet

Non Respect De La Règle De Transitivité

1	votant a les préférences	$a \succ b \succ c$,
1	votant a les préférences	$b \succ c \succ a$,
1	votant a les préférences	$c \succ a \succ b$.

Dans cet exemple

- ❑ Le candidat a est préféré au candidat b.
- ❑ Le candidat b est préféré au candidat c.
- ❑ Le candidat c est préféré au candidat a.

Chaque candidat est battu par au moins un autre : Il n'existe donc pas de vainqueur de Condorcet.

Scrutin de borda

Cette méthode consiste à associer un score global à chaque candidat en calculant la somme de son rang dans les listes des votants.

Un candidat a est préféré à un candidat b si la somme des rangs de a dans les listes des votants est strictement inférieure à celle de b.

Exemple: Soit {a, b, c, d} l'ensemble des candidats avec trois votants dont les préférences sont les suivantes :

2 votants ont les préférences $b \succ a \succ c \succ d$,

1 votant a les préférences $a \succ c \succ d \succ b$.

Candidat	Score
a	$2*2+1*1=5$
b	$2*1+1*4=6$
c	$2*3+1*2=8$
d	$2*4+1*3=11$

Le vainqueur de Borda est Le candidat a. (*min dans le sens plus avancé dans le classement*)

SOMMAIRE

- Les systèmes de vote uninominaux : Uninominal se dit d'un vote qui ne porte que sur un nom
 - système anglais,
 - système français,
 - vote majoritaire en cascade.
- Les systèmes par listes ordonnées
 - méthode de Condorcet
 - scrutin de Borda.
- Critère d'indépendance
- Le théorème d'impossibilité d'Arrow.

Critère d'indépendance

Principe: *le résultat de comparaison entre deux candidats ne dépend que de leurs positions relatives dans les listes ordonnées fournies par les votants.*

Vérifions ce critère pour le système anglais en utilisant l'exemple :

- 6 électeurs préfèrent *a* puis *b* puis *c*.
- 5 électeurs préfèrent *b* puis *c* puis *a*.
- 4 électeurs préfèrent *c* puis *b* puis *a*.

- a possède la majorité ...
- Si le candidat *c* retire sa candidature, c'est *b* qui sera élu devant *a* par 9 voix contre 6.

➤*Donc le critère d'indépendance est non vérifié*

Vérifions le critère d'indépendance pour le système français dans l'exemple suivant:

10 votant ont les préférences $b > a > c > d$

6 votant ont les préférences $c > a > d > b$

5 votant ont les préférences $a > d > b > c$

- b est élu**
- On change les préférences de 6 Votants: $a > c > d > b$**
- Les positions relatives de a et b sont identiques et pourtant a est maintenant élu.**

➤*Donc le critère d'indépendance est non vérifié*

□ Vérifions le critère d'indépendance pour Borda dans l'exemple suivant

2 votant ont les préférences $b > a > c > d$

1 votant ont les préférences $a > c > d > b$

□ a est élu (a:5; b:6 ; c:8; d:11)

□ Si c et d se retirent de l'élection , b est élu (a:5; b:4)

➤*Donc le critère d'indépendance est non vérifié*

SOMMAIRE

- ❑ Les systèmes de vote uninominaux : Uninominal se dit d'un vote qui ne porte que sur un nom
 - ❑ système anglais,
 - ❑ système français,
 - ❑ vote majoritaire en cascade.
- ❑ Les systèmes par listes ordonnées
 - ❑ méthode de Condorcet
 - ❑ scrutin de Borda.
- ❑ Critère d'indépendance
- ❑ **Le théorème d'impossibilité d'Arrow.**

THÉORÈME D'IMPOSSIBILITÉ D'ARROW

Kenneth ARROW (1951) proposa **cinq principes minimal** que toute méthode d'agrégation devait vérifier pour pouvoir être qualifiée **de démocratiquement acceptable**:

- **Universalité** : le choix social doit être obtenu quelle que soit l'association des différentes préférences individuelles (*toute configuration de liste est admissible*)
- **Indépendance** : le résultat de comparaison entre deux candidats ne dépend que de leurs positions relatives dans les listes ordonnées fournis par les votants.
- **Unanimité** : une procédure de vote et/ou d'agrégation ne doit pas contredire un avis unanime des votants : si chaque individu préfère x à y alors la société doit placer x avant y.

□ **Transitivité** : la procédure doit fournir une relation de préférence transitive (*si $x P y$ et $y P z$ alors $x P z$*). C'est-à-dire la méthode de vote doit toujours fournir un classement sous la forme d'un préordre complet.

□ **Absence d'un dictateur**: Si un individu unique fournit l'ordre $x p y p z$ et que les autres $z p y p x$ alors le choix $x p y p z$ est dictatorial : le résultat final ne doit pas l'obéir. Autrement, aucun des votants ne peut dicter en toutes circonstances ses préférences à la collectivité.

	Anglais	Français	Borda	Condorcet
Universalité	Oui	Oui	Oui	Oui
Transitivité	Oui	Oui	Oui	Non
Unanimité	Oui	Oui	Oui	Oui
Indépendance	Non	Non	Non	Oui
Non dictature	Oui	Oui	Oui	Oui

THÉORÈME D'ARROW

Si le nombre des votants est fini, dès qu'il y a **plus de trois candidats**, aucune méthode d'agrégation ne satisfait simultanément les conditions : *d'universalité, d'unanimité, de transitivité, d'indépendance et de non-dictature.*