

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 2\mu & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 2\mu & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (70.5)$$

La loi de comportement est caractérisée par deux écritures différentes. On utilise soit les coefficients de Lamé ( $\mu$ ) et ( $\lambda$ ), soit le module de Young (E) et le coefficient de Poisson ( $\nu$ ). On préfère souvent l'emploi de ces deux dernières grandeurs qu'on peut facilement les déterminer par un simple essai de traction. Le tableau suivant résume la valeur de ses grandeurs pour quelques matériaux.

Matériaux	E (GPa)	( $\nu$ )	$\rho$ (Kg/dm <sup>3</sup> )
Acier de construction	210	0.285	7.8
Acier Inox 18-12	203	0.29	7.9
Fonte grise	90 à 120	0.29	7.1 à 7.2
Alliage TA6V	105	0.25	7.8
Aluminium	71	0.34	2.6
Zinc	78	0.21	7.15
Titane	105	0.34	4.5
Verre	60	0.25	2.8
Béton en compression	10 à 13	0.15	2 à 2.4
Caoutchouc	0.2	0.5	1.8
Bois (Pin)	7	0.2	0.4
Marbre	26	0.3	2.8
Graphite	250 à 350	0.3 à 0.4	1.75 à 1.92
Elastomère	0.2	0.5	1

### 5.13 Relation entre déformations et contraintes

L'expression de la relation de Hooke généralisée conduit à l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \quad (71.5)$$

Une contrainte tangentielle ( $\tau_{ij}$ ) qui agit sur une facette quelconque d'un solide produit une déformation angulaire ( $\varepsilon_{ij}$ )/( $\gamma_{ij}$ ) . Cette relation entre les deux grandeurs est donnée par la relation (28.5):

$$\varepsilon_{ij} = 3p \cdot \frac{\nu}{E} (\delta_{ij}) + \frac{(1+\nu)}{E} \cdot (\sigma_{ij})$$

Pour les déformations angulaires (distorsions) nous avons :

$$i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$$

Alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \sigma_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{ij} \quad (72.5)$$

Et sachant que d'après la relation (42.5) nous avons:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Alors :

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\mu} = \frac{\tau_{ij}}{G} \quad (73.5)$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{\mu} = \frac{\tau_{12}}{G} = \gamma_{21} \\ \gamma_{13} &= \frac{\tau_{13}}{\mu} = \frac{\tau_{13}}{G} = \gamma_{31} \\ \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{\mu} = \frac{\tau_{23}}{G} = \gamma_{32} \end{aligned}$$

## 5.14 Problèmes particulier d'élasticité

### 5.14.1 Contraintes planes

Un solide est en état de contraintes planes par rapport à un plan  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$  (figure 8.5), si en tout point (M) de ce solide le tenseur de contraintes par rapport à un repère  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (74.5)$$

Les composantes  $(\sigma_{11})$ ,  $(\sigma_{22})$  et  $(\sigma_{12})$  sont indépendantes de la direction  $(\vec{x}_3)$  qui représente une direction principale pour tous les points de  $\vec{x}_3$  lide.

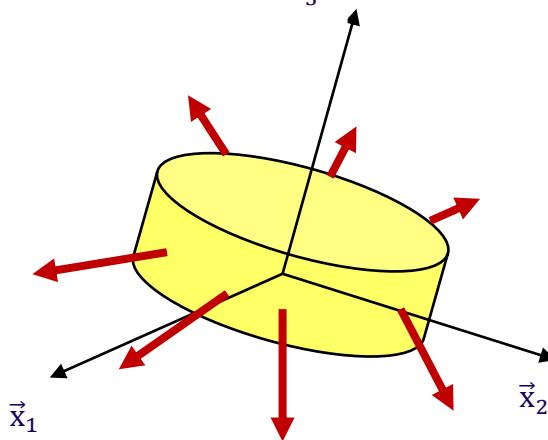


Fig.8.5 Etat de contraintes planes

Le tenseur de déformation est de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (75.5)$$

La loi de comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations (42.5) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (76.5)$$

Avec :

$$\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12} \quad (77.5)$$

Et :

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (78.5)$$

L'état de déformation est complètement défini par les trois grandeurs :  $(\varepsilon_{11})$ ,  $(\varepsilon_{22})$  et  $(\varepsilon_{12})$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements  $(U_1)$  et  $(U_2)$

**Domaine d'application :** L'approximation des contraintes planes convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (plaqué sollicitée en traction) (figure 9.5).

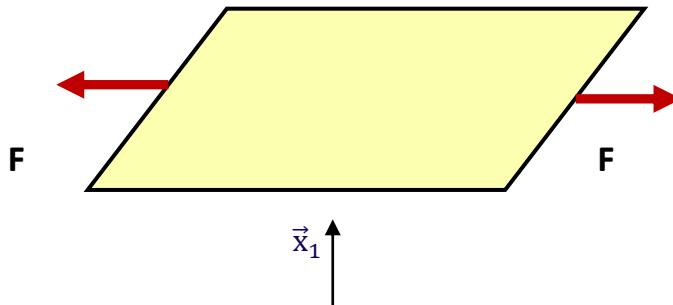


Fig. 9.5 Plaque sollicitée en traction dans le plan  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$

### 5.14.2 Déformation planes

Un solide est en état de déformations planes dans un plan  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ , si en tout point (M) de ce solide et par rapport à un repère  $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} U_1 = U_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ U_2 = U_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ U_3 = 0 \end{cases} \quad (79.5)$$

Le tenseur de déformation est alors de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80.5)$$

En tout point de ce solide les déformations et les contraintes sont indépendantes de la direction  $(\vec{x}_3)$  et le tenseur de contrainte est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (81.5)$$

La loi de comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations (42.5) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\mu & \nu & 0 \\ \nu & 1 + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (82.5)$$

### Domaine d'application :

L'approximation des contraintes planes s'applique dans le cas d'un cylindre dont la dimension dans la direction de l'axe  $(\vec{x}_3)$  est très grande et si les forces appliquées au cylindre sont normales à cette direction.

## 5.15 Équations de compatibilité

Les composantes du tenseur de déformation sont complètement déterminées en un point quelconque par les trois composantes  $(U_1)$ ,  $(U_2)$  et  $(U_3)$  du vecteur déplacement  $\vec{U}$  (8.5).

Imaginons une structure divisée avant sa déformation en petits cubes (figure 10.5). Si chaque élément subit une déformation à part, les cubes deviennent des parallélépipèdes et leurs arrangement pour former un corps déformé continu peut devenir un problème.

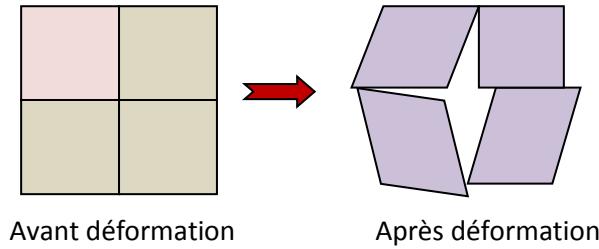


Fig. 10.5 Déformation d'un corps discontinu

Pour assurer cette continuité les composantes du tenseur de déformation doivent satisfaire certaines relations qui sont appelées : les équations de compatibilité.

Sachant que :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \quad (83.5)$$

Dérivons cette relation deux fois par rapport à la variable  $(X_2)$  :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \cdot \partial X_2^2} \quad (84.5)$$

De même :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \cdot \partial X_1^2} \quad (85.5)$$

Ajoutons les relations (84.5) et (85.5) :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \cdot \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \cdot \partial X_1^2} \quad (86.5)$$

Or :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) \quad (87.5)$$

Et :

$$2 \cdot \varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \quad (88.5)$$

Dérivons l'expression de la relation (88.5) deux fois par rapport aux variables  $(X_1)$  et  $(X_2)$  :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_2} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1 \partial X_2} \right) = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_1^2} \quad (89.5)$$

Les relations (86.5) et (89.5) sont identiques alors :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (90.5)$$

La relation (90.5) représente la première équation de compatibilité. La deuxième et la troisième s'obtiennent à un indice près de la même manière:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \quad (91.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \quad (92.5)$$

En plus si :

$$\gamma_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \quad (93.5)$$

Alors :

$$\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1 \partial X_3} \quad (94.5)$$

Nous avons aussi :

$$\gamma_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \quad (95.5)$$

Alors :

$$\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial X_2 \partial X_1} \quad (96.5)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \quad (97.5)$$

Alors :

$$\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1 \partial X_3} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (98.5)$$

Ajoutons les relations (96.5) et (97.5) et retranchons (98.5) pour obtenir :

$$\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} = 2 \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2 \partial X_3} \quad (99.5)$$

Dérivons les deux membres de la relation (99.5) fois par rapport à la variable (X<sub>1</sub>) :

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_2 \partial X_3} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial X_2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right) \quad (100.5)$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial X_2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial X_2} (\varepsilon_{11}) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \quad (101.5)$$

Cette relation représente la quatrième équation de compatibilité. La cinquième et la sixième s'obtiennent à un indice de la même manière :

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \quad (102.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) = 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (103.5)$$

Les six équations appelées équations de constitutions reliant les composantes de déformation entre elles traduisent la continuité dans le matériau.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} &= \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} \end{aligned} \quad (104.5)$$

## 5.16 Influence de la température

Sous l'effet de la chaleur les corps se dilatent. Soit un milieu continu exposé à un champ de température ( $\Delta T$ ) dans ce milieu est continue et uniforme dans cet élément. Cette variation de température influence surtout le tenseur de déformation :

$$\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T = \varepsilon_{33}^T = \alpha \cdot \Delta T \quad (106.5)$$

Et :

$$\gamma_{12}^T = \gamma_{13}^T = \gamma_{23}^T = 0 \quad (107.5)$$

Dans la relation (106.5) ( $\alpha$ ) représente le coefficient de dilatation thermique. Si un corps est soumis en plus des actions mécaniques externes à une variation de température ( $\Delta T$ ), on applique le principe de la superposition des déformation. Les composantes du tenseur de déformation deviennent :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \alpha \cdot \Delta T \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \alpha \cdot \Delta T \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha \cdot \Delta T \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2\mu}
 \end{aligned} \tag{108.5}$$

### 5.17 Résolution d'un problème de mécanique des solides déformables

Un problème général de la mécanique des solides déformable se pose de la manière suivante : soit un solide déformable ( $D$ ) entouré d'une surface ( $S$ ). Ce système est soumis à des forces volumiques  $\vec{F}(M, t)$  de composantes ( $F_i$ ) et à des conditions sur la frontière ( $S$ ) appelées conditions aux limites ou conditions aux frontières (figure 11.5).

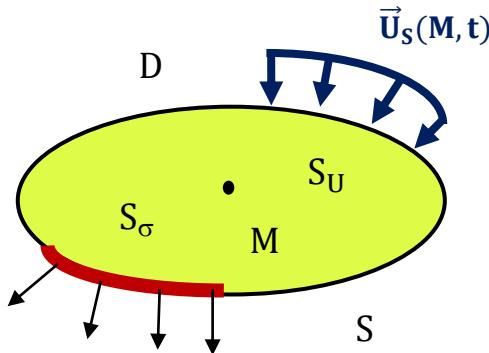


Fig. 11.5  $\vec{T}_S(M, t)$  aux limites d'un problème

Les conditions aux limites peuvent être de deux types : Sur une partie ( $S_u$ ) de la frontière ( $S$ ) sont imposés des déplacements  $\vec{U}_S(M, t)$  tel que  $\forall M \in (S_u)$  :

$$\vec{U}(M, t) = \vec{U}_S(M, t) \tag{109.5}$$

Sur la frontière complémentaire ( $S_\sigma$ ) de ( $S$ ) sont imposées des forces surfaciques  $\vec{T}_S(M, t)$  (ou bien absence de forces surfaciques c'est-à-dire une surface libre ( $\vec{T}_S(M, t) = 0$ ) tel que tel que  $\forall M \in (S_\sigma)$  :

$$\vec{T}(M, t) = \vec{T}_S(M, t) \quad (110.5)$$

Sous l'effet des actions imposées (forces volumiques, conditions aux limites) le solide (D) se déforme. Le problème de la mécanique des solides déformables, consiste à déterminer le champ de déplacement  $\vec{U}(M, t)$  et le champ de contraintes  $\sigma(M, t)$  en tout point (M) du solide (D) vérifiant les conditions suivantes :

- **Loi fondamentale de la dynamique :**

Pour un problème dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \text{div}(\sigma_{ij}) = \rho \cdot \frac{dx_i^2}{dt^2} \quad (111.5)$$

Pour un problème statique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (112.5)$$

- **Relation déformation et déplacement :**

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right) \quad (113.5)$$

- **Les équations de compatibilité :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} &= \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} &= \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} \end{aligned} \quad (114.5)$$

- **Les conditions aux limites :**

Sur ( $S_u$ ) :

$$\vec{U}(M, t) = \vec{U}_S(M, t) \quad (115.5)$$

Sur ( $S_\sigma$ ) :

$$\vec{U}(M, t) = \vec{U}_S(M, t) \quad (116.5)$$

- **La loi de comportement du matériau**

Elle caractérise son comportement mécanique et lie les contraintes aux déformations.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (117.5)$$