Chapitre III : Mécanique linéaire de la rupture

1 La déférence entre RDM et MR

RDM : on dimensionne les structures pour la contrainte appliquéeσ reste inférieure a la limite élastique (σ σ_E) ou on utilise généralement un coefficient de sécurité.

MR : l'approche basée sur la MLR est à 3 variables :

1. La contrainte appliquée.
2. La ténacité K_{IC} remplace la limite élastique.
3. Une variable additionnelle qui est la taille de défaut.

2 Définition

2.1 La ténacité

La ténacité est la capacité d'un matériau a résister a la propagation d'une fissure. Plus précisément, on définit la ténacité comme étant la quantité d'énergie qu'un matériau peut absorber avant de casser.

2.2 La fissure

Une fissure est une petite fente dans un solide. Cette fente peut apparaître à la surface de la pièce (fissure superficielle), se trouver complètement à l'intérieur et être donc invisible depuis l'extérieur (fissure interne), ou traverser complètement la pièce (fissure traversante).

Ces trois cas de figure sont schématisés sur la figure 1.

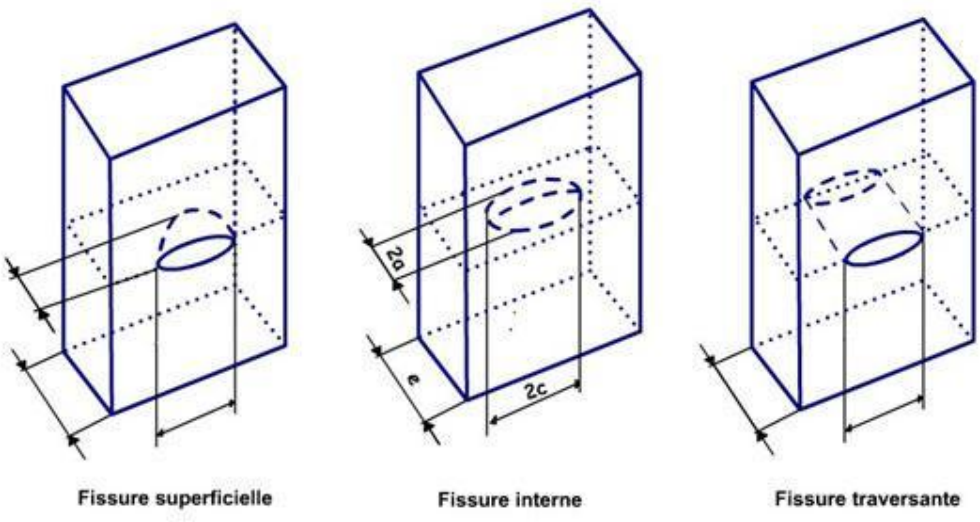


Figure 1 : Les différents types de fissures

3 Analyse des fissure en élasticité linéaire 2D

3.1 Les modes de propagation des fissures

Il existe 3 modes de fissuration élémentaires :

a. **Mode I (mode par ouverture)**

Les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement au plan de fissure,

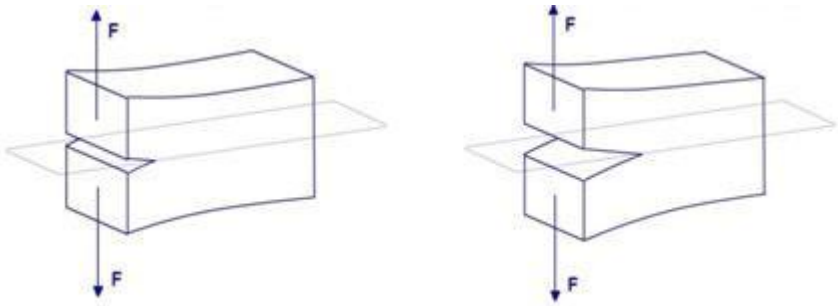


Figure 2 : Propagation en mode I

b. **Mode II (glissement de translation)**

Les surfaces de la fissure se déplacent dans le plan de fissure et dans une direction perpendiculaire au front de fissure,

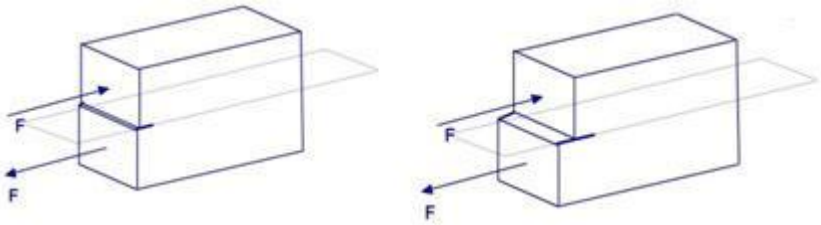


Figure 3 : Propagation en mode II

c. Mode III (glissement de rotation)

Les surfaces de la fissure se déplacent dans le plan de fissure et dans une direction parallèle au front de la fissure.

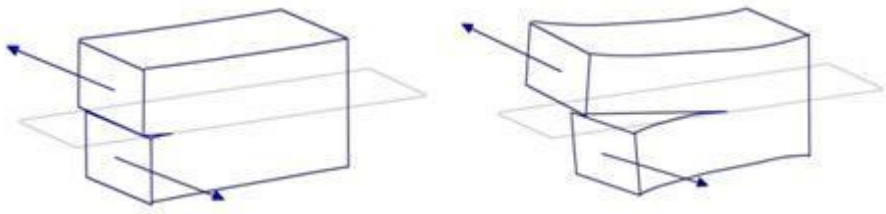


Figure 4 : Propagation en mode III

NB : le mode I est souvent le plus critique et les études théorique sont donc souvent limitée à ce mode de propagation.

4 Théorie énergétique de Griffith

L'analyse énergétique des fissures réalisée par Alan Arnold Griffith en 1920 est considérée comme la naissance du domaine de la mécanique de la fracture. Il était motivé par la solution élastique linéaire d'Inglis pour les contraintes autour d'un trou elliptique, qui prédisait que le niveau de contrainte s'approchait de l'infini lorsque l'ellipse s'aplatissait pour former une fissure.

Le résultat d'Inglis avait suscité de nombreuses discussions sur le fait qu'il ne pouvait pas être «correct», car aucun matériau ne peut supporter une contrainte infinie sans céder et échouer. Donc, tout devrait immédiatement échouer sous la moindre charge si une fissure était présente (mais cela ne se produit évidemment pas). Donc, Griffith a cherché à proposer un critère de défaillance basé sur l'énergie qui a effectivement contré la prédiction de la contrainte infinie d'Inglis, tout en utilisant directement sa solution élastique linéaire.

Griffith a comparé le travail requis pour rompre les liaisons atomiques à l'énergie de déformation libérée à mesure qu'une fissure se développe.

5 Principes de l'énergie

Afin de comprendre le travail de Griffith, il faut comprendre les principes de base du travail et de l'énergie, et en particulier l'énergie de déformation. Le travail, W, est la forme mécanique de l'énergie et est donné par

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$$

Pour les calculs mécaniques, il est souvent pratique de calculer le travail (ou l'énergie) en termes de contrainte et de déformation plutôt que de force et de déplacement. Pour ce faire, multipliez et divisez l'équation ci-dessus par le volume, V, mais exprimez V dans le dénominateur A.L, la longueur des zones et regroupez-les comme suit :

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} \left(\frac{V}{AL}\right) = \int \left(\frac{\mathbf{F}}{A}\right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{L}\right) V$$

Mais (F / A) est une contrainte, σ, et dx / L est une déformation, dε. Cela donne :

$$U = \int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}\, V$$

Dans ce cas, U a été utilisé à la place de W pour indiquer que l'énergie de déformation est la forme spécifique de travail (et d'énergie) considérée. L'intégrale $\int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}$ est la densité d'énergie de déformation. C'est l'énergie de déformation par unité de volume. elle est représentée par U' comme suit :

$$U' = \int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} \qquad \text{and} \qquad U = U' * V$$

Pour un matériau élastique linéaire en traction uni-axiale, la loi de Hooke se réduit à σ = Eε. Insérant cela dans l'intégrale pour la densité d'énergie de déformation, on obtient :

$$U' = \int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} = \int E\,\epsilon\,d\epsilon = \frac{1}{2}E\,\epsilon^2$$

Et puis la relation σ = Eε peut être substituée pour former plusieurs expressions équivalentes différentes

$$U' = \frac{1}{2}E\,\epsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\epsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

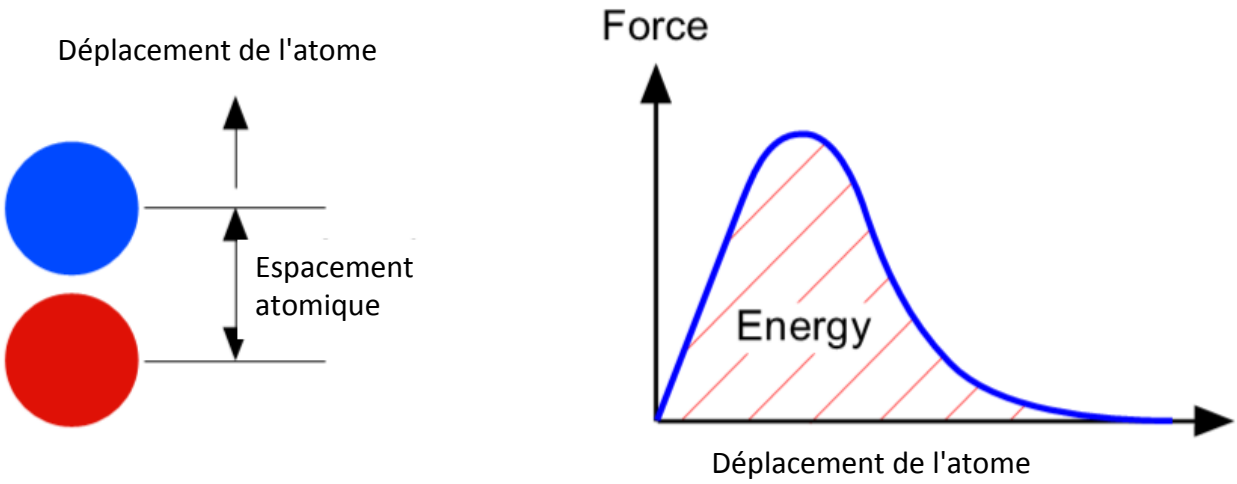
Nous reviendrons rapidement sur la dernière expression car elle apparaît dans la dérivation du critère énergétique de Griffith.

6 Obligations atomiques et énergie de surface

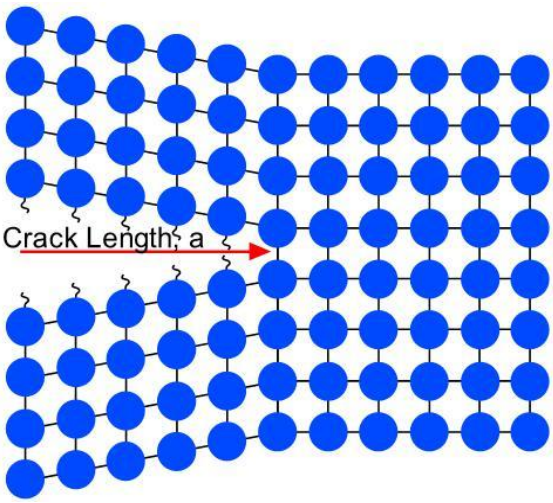
Les solides ont une distance d'espacement à l'équilibre entre les paires d'atomes constituant un matériau. Trop proche, et les atomes se repoussent. Trop loin, et les atomes s'attirent. Et à une distance intermédiaire, il n'y a pas de force nette entre eux. Ils sont en équilibre.

Imaginez qu'un atome soit retiré de son voisin. L'axe des x ci-dessous représente le déplacement d'un atome de sa position d'équilibre. Le graphique montre que la force nécessaire pour déplacer l'atome augmente initialement lorsque les atomes sont séparés. (Plus les atomes ne séparent, plus ils s'attirent l'un l'autre.) Mais à mesure que la distance augmente, les atomes finissent par se séparer jusqu'à ne plus s'attirer l'un l'autre. À ce stade, la force s'est stabilisée, puis a commencé à diminuer avant de revenir à zéro.

Le principe clé ici est que l'aire sous la courbe force-déplacement représente l'énergie d'une liaison atomique.



La discussion ci-dessus a présenté le concept de l'énergie de la liaison atomique. Afin de rompre une liaison, une quantité de travail égale à l'énergie de liaison doit être effectuée sur le système. La figure suivante étend cela au cas d'une fissure se développant dans un solide.



La figure montre une fissure qui a grandi à la longueur, a, et dans le processus, a rompu plusieurs liaisons atomiques le long du chemin, chacun nécessitant une certaine quantité de travail pour surmonter l'énergie de la liaison atomique. L'énergie totale est exprimée en

$$E_{bond} = 2\,\gamma_s a\,B$$

Où γ_s représente l'énergie nécessaire pour rompre les liaisons atomiques par unité de surface créée par la fissure. (Elle ne représente pas une contrainte de cisaillement ici.) La surface est a * B où a est la longueur de la fissure et B est l'épaisseur de la pièce. Curieusement, il est conventionnel de mesurer γs par rapport à la surface libre (le s représente la surface), et puisqu'il y a deux surfaces libres créées par une fissure, un sommet et un fond, le 2 est nécessaire dans l'équation.

Conventions

Il est courant en mécanique de la rupture à utiliser B pour l'épaisseur, parce que t et T sont généralement affectés à temps et la température, respectivement. a est utilisé pour la longueur de la fissure, et on utilise a et b pour les axes majeurs et mineurs d'une ellipse.

7 L'énergie libre de déformation

Le concept de libération d'énergie de déformation avec la croissance de la fissure est simple. Considérons une barre tirée en tension par un effort, σ. Son énergie de déformation sera :

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

Selon les principes énergétiques discutés ci-dessus. Supposons maintenant qu'une fissure se propage tout le long de la barre, l'amenant à se casser en deux moitiés. Les deux moitiés seront maintenant déchargées après la pause, de sorte qu'elles ne peuvent pas avoir d'énergie de déformation. L'énergie de déformation originale, U, a été libérée à la suite de la propagation de la fissure à travers la pièce.

Griffith a été le premier à calculer la libération d'énergie de déformation associée à la croissance des fissures. Il l'a fait pour le cas d'une plaque infinie en tension uni-axiale. Pourquoi ce scénario? Facile, parce que la plaque infinie en traction uni-axiale était le cas qu'Inglis venait de résoudre sept ans plus tôt en 1913. Griffith a utilisé le cas limite d'une ellipse aplatie pour former une fissure et a intégré les champs de contrainte et de déformation pour obtenir l'énergie de déformation en fonction de la longueur de la fissure a. Il a obtenu le résultat suivant (pour la moitié de la plaque infinie).

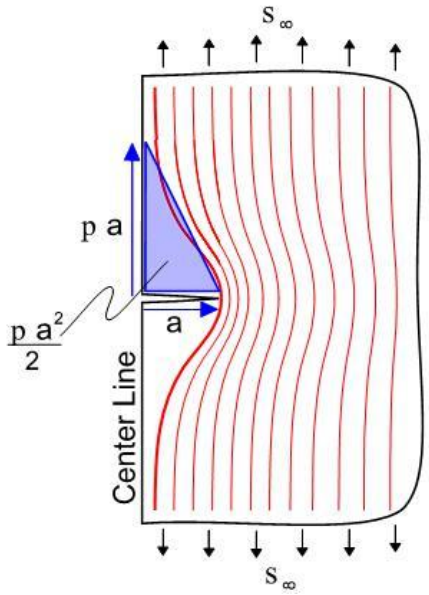
$$U = \frac{\sigma^2}{2E} V - \frac{\sigma^2}{2E} B \pi a^2$$

Le résultat est étonnamment simple. C'est une combinaison d'une valeur de référence, $\frac{\sigma^2}{2E} V$, correspondant à une longueur de fissure nulle, et un second terme qui soustrait l'énergie de déformation lorsque la longueur de fissure augmente selon a^2. Il est intéressant de noter que la dépendance quadratique de la longueur de la fissure signifie que la variation de l'énergie de déformation avec la longueur de la fissure est très faible, mais devient très sensible à la longueur de la fissure à des longueurs plus importantes.

On pourrait s'interroger sur l'utilité de ce résultat étant donné que la plaque est de taille infinie et que, par conséquent, l'énergie de déformation est infinie parce que V est infinie. Néanmoins, cette équation s'avérera utile parce que nous la différencierons finalement, éliminant ainsi le terme de volume infini parce qu'il est constant.

7.1 Interprétation géométrique rapide

Il y a un moyen facile de se souvenir du résultat de Griffith, et il est montré dans la figure ci-dessous. Il s'agit de penser à une partie non chargée de matériau au-dessus et au-dessous de la fissure qui est de nature triangulaire, ayant une largeur a et une hauteur πa. Cela donne une aire de $\pi a^2 / 2$, et comme il y a deux triangles, un au-dessus et un au-dessous, la surface des deux triangles est πa2. Enfin puisque l'épaisseur est B, le volume est Bπa2. Cela correspond au terme de volume dans l'équation de Griffith.



8 Le critère de défaillance de Griffith

Rappelons que l'apport d'énergie nécessaire pour rompre les liaisons atomiques et faire croître la fissure est donnée par

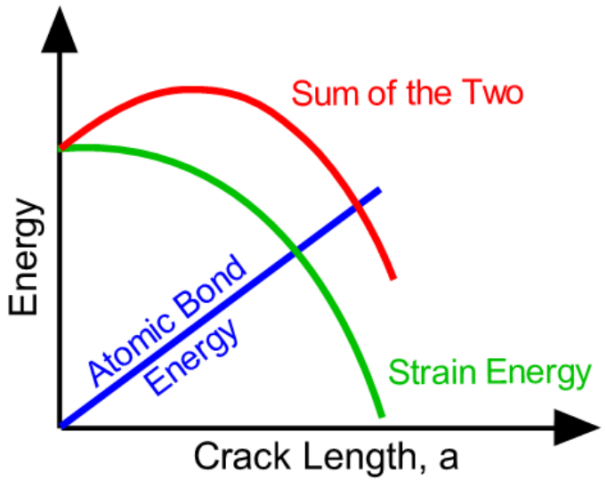
$$E_{bond} = 2\gamma_s a B$$

alors que la fissure se développe, l'énergie de déformation mécanique stockée diminue selon

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} V - \frac{\sigma^2}{2E} B\pi a^2$$

L'énergie totale dans le système est simplement la somme des deux expressions. Ceci est reflété par la courbe rouge dans la figure ci-dessous.

$$E_{\text{total}} = 2\,\gamma_s a\,B + \frac{\sigma^2}{2E}\,V - \frac{\sigma^2}{2E}\,B\,\pi\,a^2$$



L'idée clé est de reconnaître que pour de courtes longueurs de fissure (à gauche de la valeur maximale sur le graphique), l'énergie totale de l'objet augmente avec l'augmentation de la longueur de la fissure. Par conséquent, de l'énergie supplémentaire doit être introduite dans le matériau afin de provoquer la croissance de la fissure. **Il est stable.**

Cependant, à des longueurs de fissure plus longues (à droite de la valeur de courbe maximale), une augmentation de la longueur de la fissure entraîne une diminution de l'énergie totale. Cela signifie que la fissure peut se développer sans aucune entrée externe supplémentaire. C'est une situation instable qui peut mener à une défaillance catastrophique lorsqu'une fissure se propage soudainement complètement à travers une partie. Techniquement, on dit que la fissure peut se développer spontanément.

Nous devons différencier la courbe d'énergie totale par rapport à la longueur de fissure a, puis mettre la dérivée à zéro, afin de trouver la longueur à laquelle la croissance de la fissure instable (et la rupture partielle) peut se produire.

$$\frac{dE_{\text{total}}}{da} = 2\,\gamma_s\,B - \frac{\sigma^2}{E}\,B\,\pi\,a = 0$$

Donc,

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\,\gamma_s E}{\pi\,a}}$$

Un indice f a été ajouté à σ pour signifier la défaillance. L'équation montre que la contrainte de rupture augmente avec la racine carrée de l'énergie de liaison, γs, mais décroît

avec la racine carrée de la longueur de la fissure a. Enfin, la quantité 2γs est combinée dans le taux critique de l'énergie libéré de Griffith Gc.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}}$$

Exemple d'une fissure dans le verre

Il est bien connu que les vitres sont fragiles et sont particulièrement susceptibles de se briser lorsque des fissures sont présentes. Le critère de Griffith peut être utilisé pour estimer la contrainte de rupture critique pour une longueur de fissure donnée. Calculons la contrainte critique d'une vitre typique lorsqu'une fissure de 25,4 mm est présente.

Le module de Young du verre est de E = 70 000 MPa et le taux de libération d'énergie critique est d'environ Gc = 7 J/m^2.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{G_c E}{\pi a}} = \sqrt{\frac{(7\ \mathrm{J/m^2})(7\mathrm{E}10\ \mathrm{N/m^2})}{(\pi)(0.025\ \mathrm{m})}} = 2.5\mathrm{E}6\ \mathrm{N/m^2} = 2.5\ \mathrm{MPa}$$