

Sol exo5 & exo6 série 4 :

Exo5 Temps d'attente de métros

Notons X le temps d'attente de la ligne 8 et Y celui de la ligne 9.

a) Le temps moyen d'attente est l'espérance donc on doit avoir $E(X) = 3$ et $E(Y) = 2$.

L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$ donc le paramètre de X est $\frac{1}{3}$ tandis que celui de Y est $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

b) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2-1} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{18+12+8}{81} \\ &= \boxed{\frac{38}{81}} \simeq 46,91 \%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(2 \leq Y \leq 4) &= \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{4+2+1}{16} \\ &= \boxed{\frac{7}{16}} \simeq 43,75 \%. \end{aligned}$$

Exo6

- a) Probabilité pour qu'aucun bateau ne mouille pendant 1 jour. Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de bateaux qui mouillent par jour. Le nombre de bateaux qui mouillent par jour est, en moyenne 3 (90/30), X suit une loi de Poisson de paramètre 3 : $X \sim P(3)$

$$p(X = 0) = \frac{e^{-3} * 3^0}{0!} = 0,0498$$

Il y a une probabilité d'environ 5 % pour qu'aucun bateau ne mouille pendant 1 jour.

- b) Probabilité pour qu'au moins 3 bateaux mouillent pendant 1 jour.

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)]$$

$$p(X \geq 3) = 1 - \left(\frac{e^{-3} * 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} * 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} * 3^2}{2!} \right)$$

$$p(X \geq 3) = 1 - (0,0498 + 0,1494 + 0,2240) = 0,5768$$