

Chapitre 03 (1 semaine)

Échantillonnage et Quantification

3.1) Introduction

Un signal est la représentation physique d'une information qui est transportée d'une source à un destinataire en vue d'un traitement. La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux biologiques, sismiques, radars, audio ou vidéo sont analogiques par nature. C'est-à-dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux-mêmes varient de manière continue. Ces signaux peuvent être traités analogiquement à l'aide de filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques.

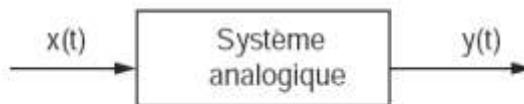


Fig.3.1 : Traitement analogique d'un signal $x(t)$

Ce signal peut être capté et converti en un signal électrique. On le trouve sous deux formes essentielles. Il est **analogique**, s'il varie de façon continue au cours du temps (Un microphone transforme un son en signal électrique analogique), et il est **numérique**, s'il varie de façon discrète (ou discontinue), par paliers, représenté par des *séquences binaires* (Les ordinateurs ne traitent que des signaux numériques).

Un signal analogique est un signal continu qui peut prendre une infinité de valeurs, alors que **le signal numérique** est un signal discret (discontinu), qui se résume en une succession de « 0 » et de « 1 ».

Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité, etc., un traitement numérique équivalent est possible et préférable. On utilise alors des convertisseurs analogiques-numériques (CAN) et numériques-analogiques (CNA) pour relier au processeur numérique les signaux analogiques d'entrée et de sortie. Le schéma correspondant est donné à la figure 3.2.

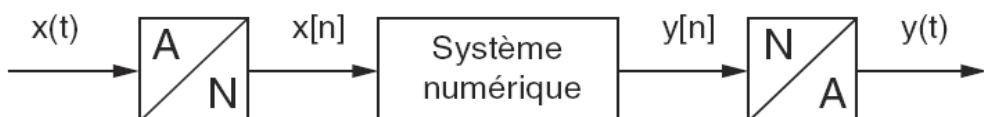


Fig.3.2 : Traitement numérique d'un signal analogique $x(t)$

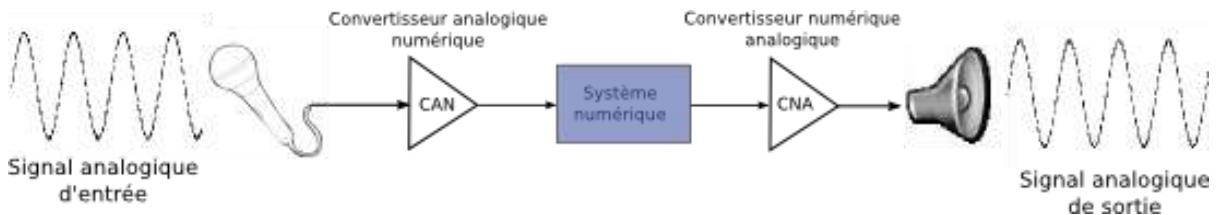


Fig.3.3 : Dispositif d'enregistrement numérique d'un son

La figure 3.3 montre un dispositif d'enregistrement numérique d'un son. Le nombre d'échantillons composant le signal numérique devra être suffisamment grand pour pouvoir représenter le signal analogique de départ mais pas trop grand non plus pour ne pas être trop volumineux.

Deux facteurs devront être ajustés pour répondre à ce cahier des charges : la précision et la rapidité.

Si on veut traiter un signal par voie numérique à l'aide d'un ordinateur, il faut représenter au préalable le signal analogique par une suite de séquences binaires. Cette représentation est le résultat de l'ensemble d'opérations, **échantillonnage, quantification et codage**, réalisant une fonction de **conversion analogique-numérique CAN**, (ou AD : Analog to Digital dite en Anglais).

La conversion analogique-numérique CAN des figures 3.2, 3.3 et 3.6 est un processus faisant intervenir trois actions successives : **l'échantillonnage à période fixe T_e , la quantification à pas fixe q (quantum) du signal et son codage sur n bits**. Pratiquement, ces opérations sont effectuées dans un même élément, **le convertisseur analogique-numérique CAN**, qui reçoit le signal analogique et le convertit en un signal discret quantifié et codé. De même pour **la conversion numérique-analogique CNA**, les opérations implicitement réalisées sont **la quantification et le maintien de la valeur numérique pendant une période d'échantillonnage**. A ceci s'ajoute généralement un **filtrage passe-bas** des «escaliers» générés par le convertisseur CNA.

L'échantillonnage est l'opération de prélèvement régulier ou irrégulier de valeurs isolées et ponctuelles du signal analogique (**appelées échantillons**). La représentation numérique des échantillons requiert une opération complémentaire de **quantification et de codage**.

L'étape inverse qui consiste à obtenir le signal analogique d'origine (réconstruction) à partir d'une suite binaire est essentiellement une opération de filtrage.

Un signal numérique est une suite de valeurs (séquences binaires), codées sur un certain nombre de bits. C'est donc une suite de 0 et de 1. Par conséquent **la numérisation d'un signal cause une perte d'information**.

L'objectif de la numérisation donc, est de transformer le signal analogique qui contient une quantité infinie d'amplitudes en un signal numérique contenant lui une quantité finie de valeurs. Et par la suite, de permettre d'effectuer les traitements sur des machines informatiques, spécialisées dans le traitement du signal ou non (DSP, PC...). Le traitement numérique présente les avantages suivants :

- Flexibilité (système numérique = logiciel : facile à modifier, ex. : modems numériques), contrairement aux montages électroniques analogiques.
- Codage interne des 0 et des 1, souvent en 0 et 5V : A priori pas d'altération du signal, robuste au bruit une fois numérisé. (Ex : un 0 codé sur 0V parasité par un bruit de 0.5V sera toujours un 0)
- Précision insensible au temps, à la température, à l'usure du système, etc...
- Pas d'erreur lors de la transmission, la recopie, le stockage, etc...

- Puissance, rapidité et coût.

Attention : on ne peut pas dire toujours que le numérique est meilleur que l'analogique. Il dépend de la qualité de l'échantillonnage et de la quantification. Certains disent que le signal perd une partie de son âme ...

Il est nécessaire de comprendre comment se fait le passage du monde analogique à celui du numérique.

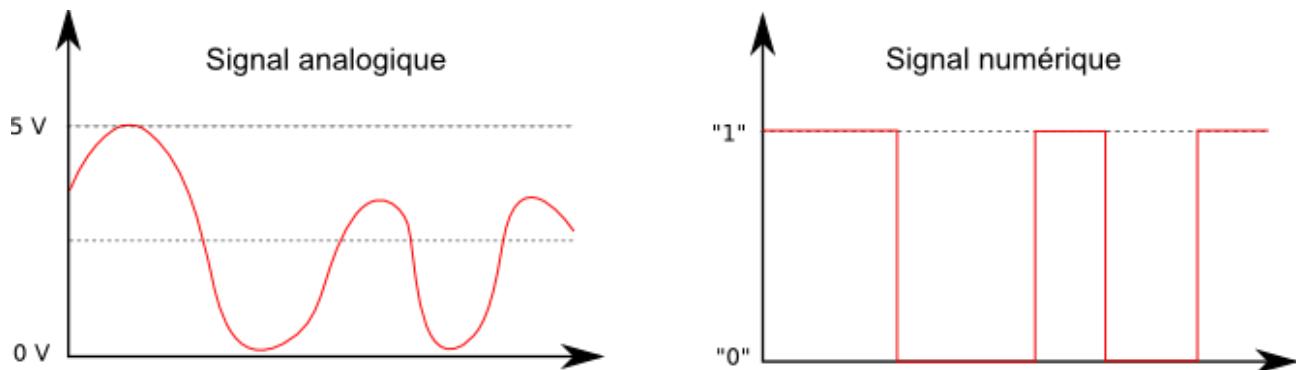


Fig.3.4 : Signal analogique et signal numérique

La numérisation est l'opération appliquée à toute information analogique devant subir un traitement par machine ou calculateur. Elle consiste en une opération d'**échantillonnage** suivie d'une autre opération de **quantification et de codage**.

L'échantillonnage concerne le temps et elle consiste à prendre des échantillons du signal analogique à des instants régulièrement espacés. Quant à **la quantification et le codage**, elles consistent à coder l'amplitude du signal sur un nombre fini d'éléments binaires (bit) : CAN.

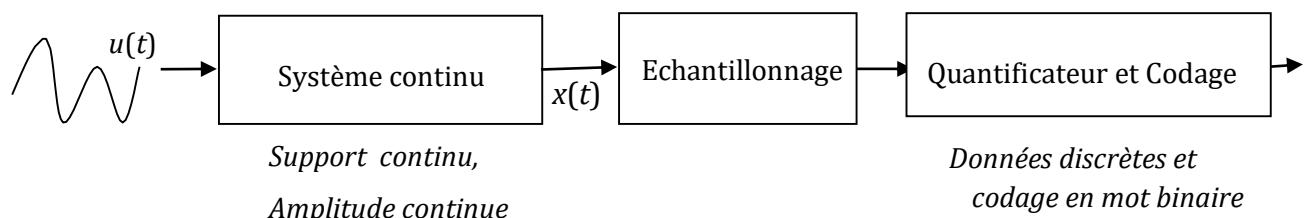


Fig.3.5 : Schéma bloc d'une chaîne de numérisation

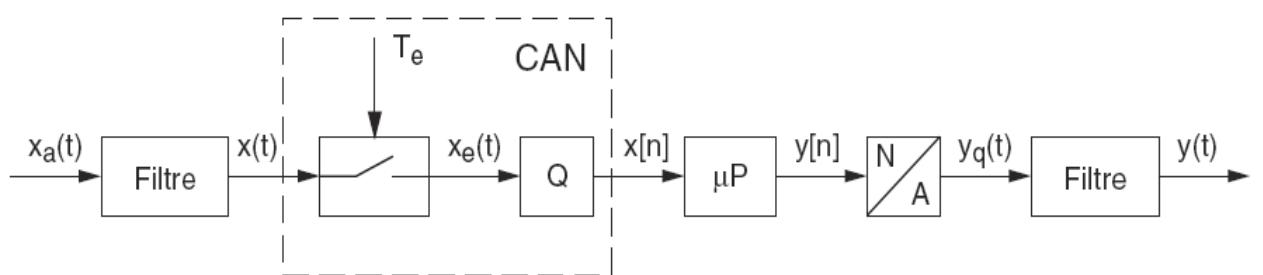


Fig.3.6 : Détail d'une chaîne de conversion analogique-numérique-analogique

La figure 5.3 présente les éléments qui interviennent lors du **traitement numérique d'un signal analogique**. On y trouve un **filtre antirecouvrement** (on verra plus loin sa raison d'être), un **échantillonneur commandé par une horloge de période T_e** , un **quantificateur Q**, un **processeur numérique μP** , un **convertisseur CNA** et un **filtre de lissage**.

L'opération d'**échantillonnage** se fait sur l'axe des abscisses (**axe temporel**) et l'opération de **quantification** se fait sur l'axe des ordonnées (**amplitudes du signal**). A la fin, les valeurs isolées trouvées par quantification (**multiples du quantum**) seront **codées par n bits** par l'opération de **codage**. Cette chaîne des opérations constitue l'essentiel des éléments d'un **convertisseur analogique-numérique**.

Les figures 3.7 et 3.8, illustrent bien les étapes nécessaires pour la conversion analogique-numérique d'un signal sinusoïdal.

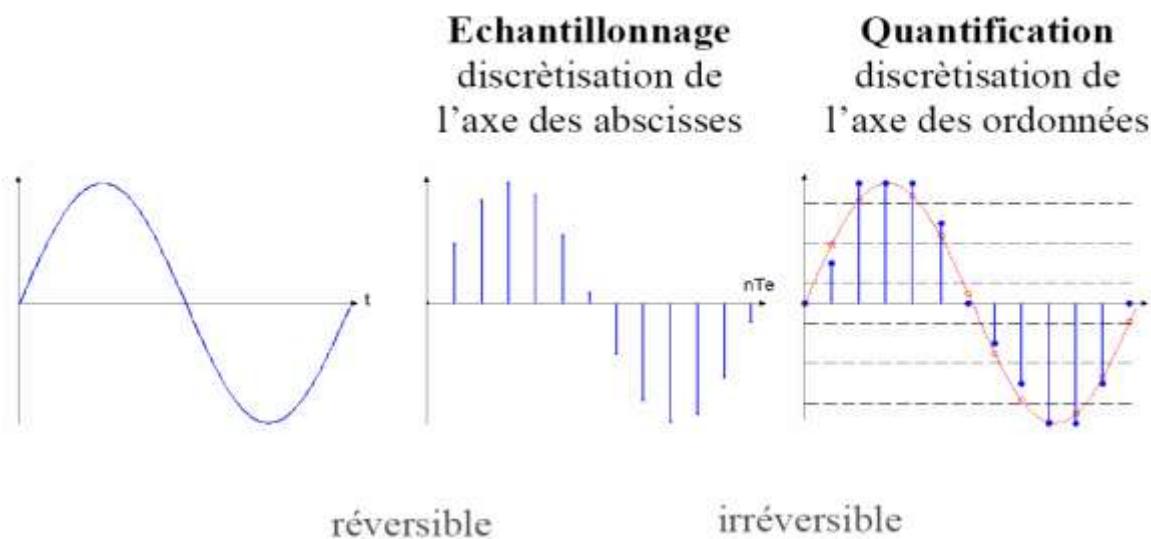


Fig.3.7 : Echantillonnage et quantification d'un signal analogique

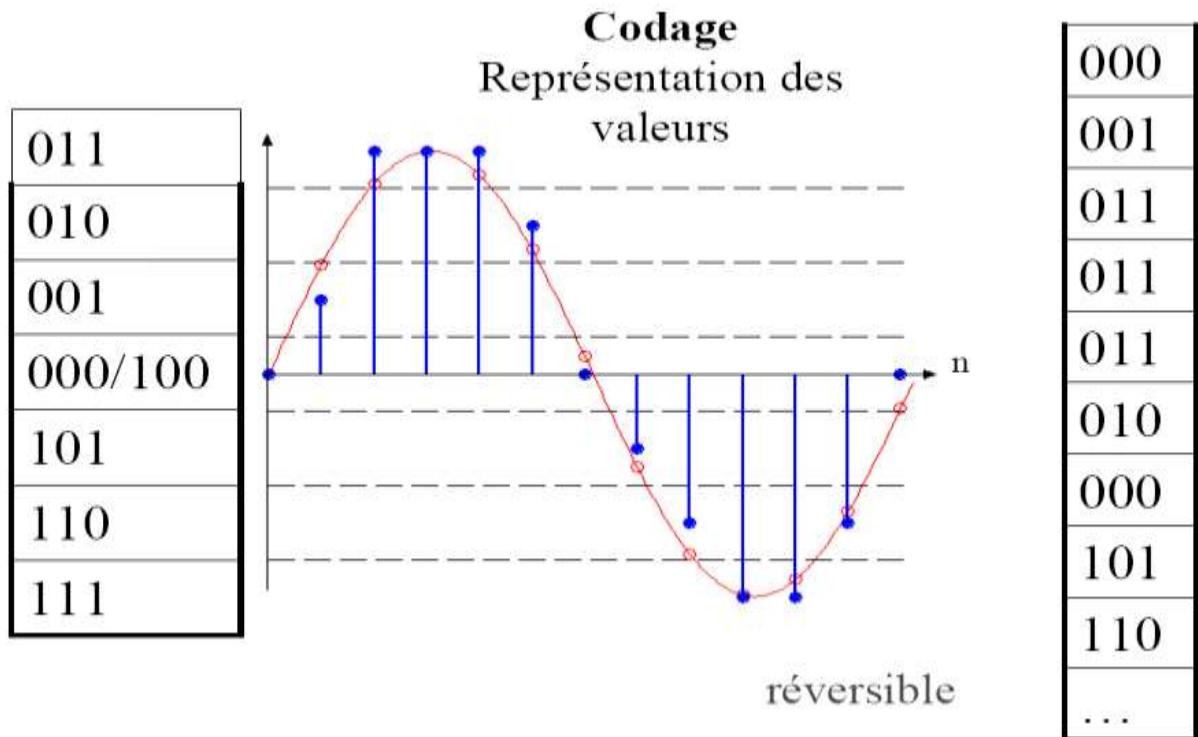


Fig.3.8 : Codage du signal échantillonné

3.2) Echantillonnage

L'échantillonnage est le prélèvement des valeurs du signal continu $x(t)$ à des intervalles de temps t_n . Généralement les instants t_n sont régulièrement espacés : $T_e = t_{n+1} - t_n$ est appelé **période d'échantillonnage**. On obtient la suite de valeurs : $x_e(t) = \{x(t_n)\}$ avec : $t_n = nT_e$.

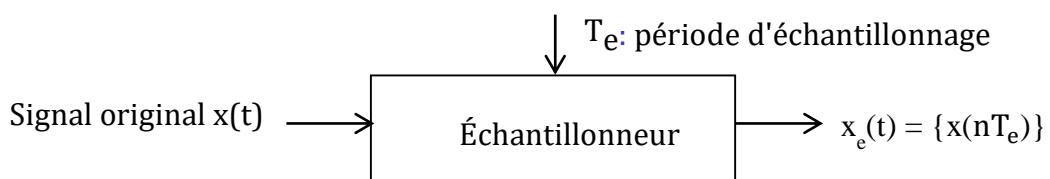


Fig. 3.9 : Schéma bloc de l'échantillonnage

3.2.1) Echantillonnage idéal

On appelle **échantillonnage** le fait de transformer un signal temps continu en un signal à temps discret. On appelle **période d'échantillonnage** la durée entre deux échantillons successifs notée T_e , l'unité est a priori **la seconde (s)**. On appelle **fréquence d'échantillonnage** notée F_e l'inverse de la **période d'échantillonnage**, l'unité est a priori le **Hertz (Hz)**.

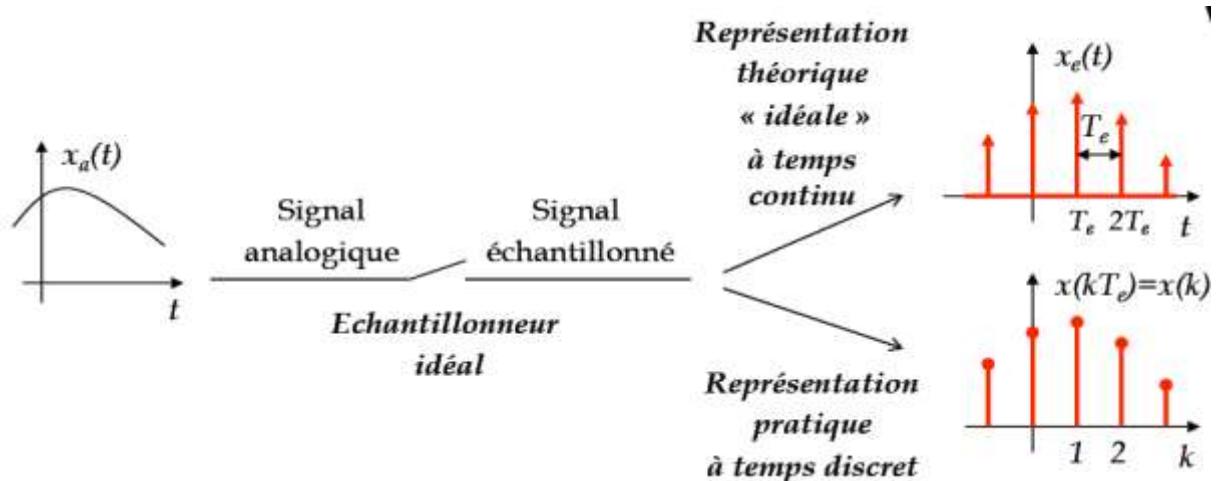


Fig. 3.10 : Echantilleur idéal (interrupteur)

A) Modélisation Mathématique

L'échantillonnage idéal consiste au prélèvement pendant un temps infiniment court des valeurs de $x(t)$ à $t = nT_e$ (multiple entier de T_e) et correspond à la **multiplication de $x(t)$ par un peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$** .

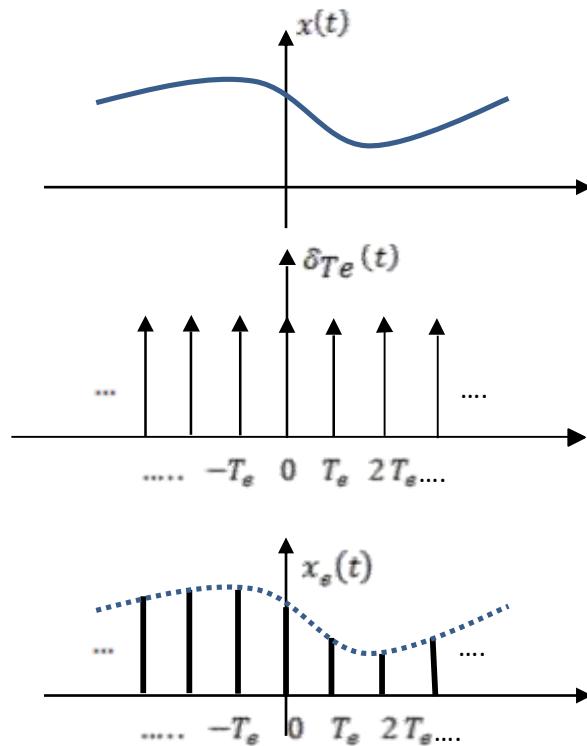


Fig. 3.11 : Illustration du principe de l'échantillonnage idéal

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (3.1)$$

$$\text{En utilisant la propriété : } x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (3.2)$$

$$\text{On obtient : } x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \quad (3.3)$$

Question : que devient le spectre du signal $x(t)$ après échantillonage idéal ?

D'après le théorème de Plancherel, on a :

$$\text{TF}[x_e(t)] = \text{TF}[x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)] = \text{TF}[x(t)] * \text{TF}[\delta_{T_e}(t)] \quad (3.4)$$

Or la TF du peigne de Dirac est :

$$\text{TF}[\delta_{T_e}(t)] = F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (3.5)$$

On en déduit :

$$\text{TF}[x_e(t)] = X(f) * F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (3.6)$$

Comme le produit de convolution est distributif et que : $x(t)\delta(t - t_0) = x(t - t_0)$, on a alors :

$$X_e(f) = F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(t - nT_e) \quad (3.7)$$

On considère que $x(t)$ est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale F_{max} i.e : $\forall |f| > F_{max}, |X(f)| = 0$

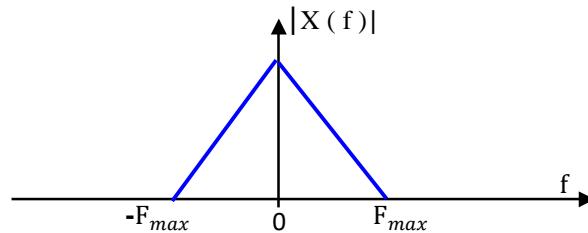


Fig. 3.12 : Spectre du signal analogique

Question : que devient le spectre $X_e(f) = F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(t - nT_e)$ en fonction de F_e ?

- **Cas 1:** $F_e \geq 2F_{max}$

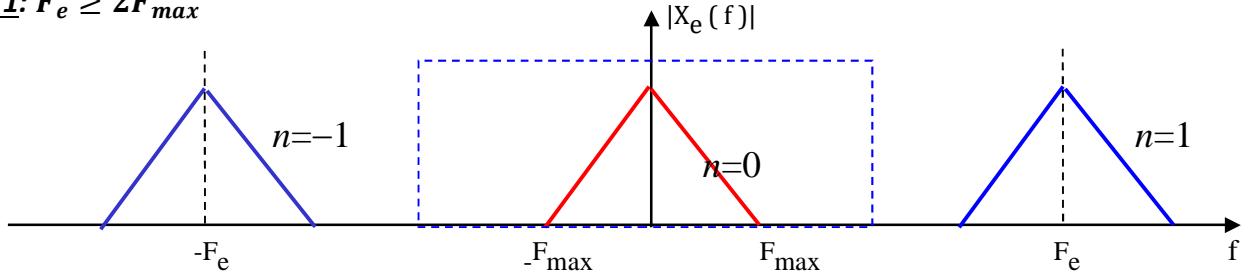


Fig. 3.13 : Spectre du signal $x_e(t)$ avec $F_e \geq 2F_{max}$

Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ sont disjoints (pas de recouvrement des motifs) et le motif principal ($n=0$) est égal au spectre de $x(t)$.

Comme les motifs sont disjoints, on peut extraire $X(f)$ grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer intégralement le signal $x(t)$ à partir de la connaissance de son échantillonné $x_e(t)$.

- Cas 2 : $F_e < 2F_{max}$

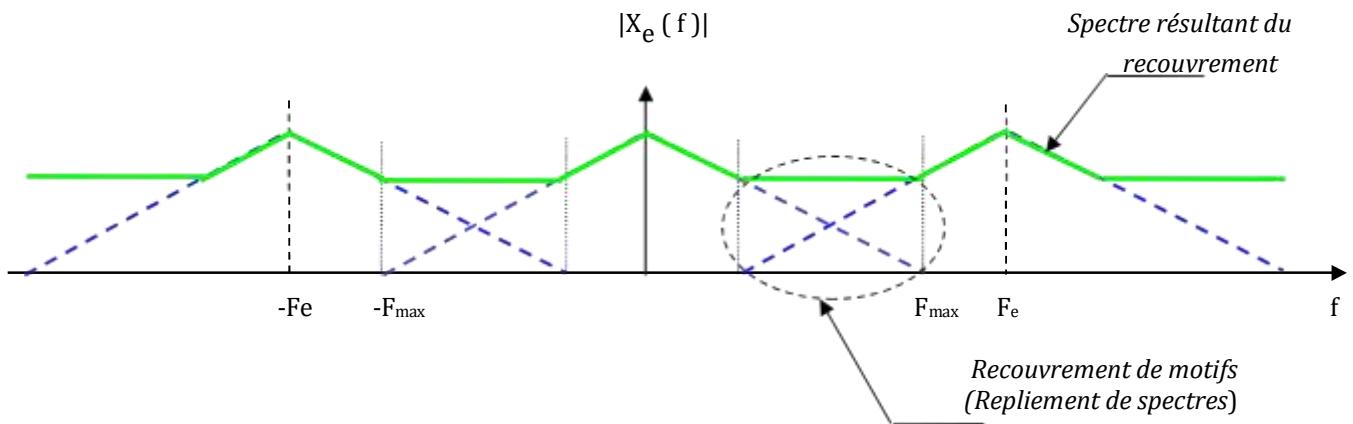


Fig. 3.14 : Spectre du signal échantillonné $x_e(t)$ avec $F_e < 2F_{max}$

Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent. On parle de repliement de spectres.

A cause du chevauchement des motifs élémentaires constituant le spectre $X_e(f)$ du signal échantillonné, il n'est pas possible de récupérer le spectre $X(f)$ par un filtrage approprié. Il n'est donc pas possible de reconstruire le signal initial $x(t)$ à partir de la connaissance de son signal échantillonné $x_e(t)$.

Question : Quelle est la condition sur F_e pour qu'à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on puisse reconstruire intégralement $x(t)$?

- ✓ Si $F_e \geq 2F_{max}$: pas de recouvrement du spectre $|X_e(f)|$, donc l'extraction de $X(f)$ par un simple filtrage passe-bas idéal est possible.
- ✓ Si $F_e < 2F_{max}$: repliement de spectre $|X_e(f)|$ impossibilité de récupérer $X(f)$ par filtrage.

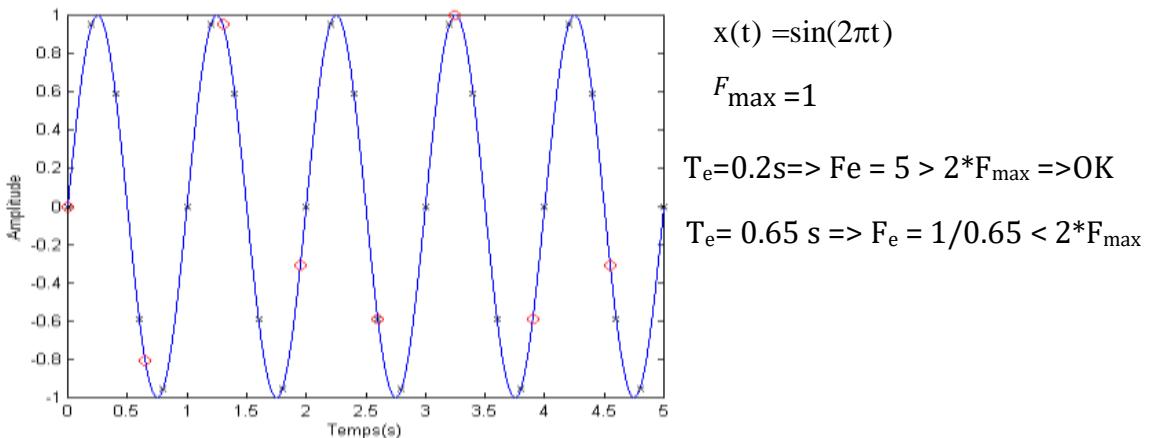
Par conséquent, pour que la **répétition périodique du spectre** de $x_e(t)$ ne déforme pas le spectre $X(f)$ répété, il faut et il suffit que : $F_e \geq 2F_{max}$.

B) Théorème de Shannon

La condition nécessaire et suffisante pour échantillonner un signal sans perte d'information est que la fréquence d'échantillonage F_e soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal. Plus précisément, si on note F_{max} la fréquence maximale du signal, il faut et il suffit que :

$$F_e \geq 2F_{max}$$

Pour F_e fixée, $\frac{F_e}{2}$ est appelée fréquence de **Nyquist**. C'est la fréquence maximale admissible du signal pour éviter les distorsions de spectre.

Exemple 1Fig. 3.15 : Signal sinusoïdal échantillonné ($T_e = 0.2s$ puis $T_e = 0.65s$)**Exemple 2**

Soit un "La" dont la Fréquence est **440Hz**. Ce signal s'écrit : $x(t) = \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$.

Sous **MATLAB**, on est en numérique, donc le temps est discret = échantillonnage à F_e .

(Essayer avec $F_e = 10000, 5000, 2000, 1000, 881, 600$, etc)

```
t= 0:1/Fe:2;
x=sin(2*pi*440*t);
sound(x,Fe);
```

L'échantillonnage idéal suppose l'utilisation d'une impulsion infiniment brève permettant d'extraire la valeur instantanée $x(nT_e)$ à l'instant nT_e . C'est donc l'application de la distribution $\delta(t - nT_e)$ au signal continu $x(t)$:

Par définition : $x(nT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - nT_e) d\tau$

On remarque que : $x(\tau) * \delta(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(\tau - t) d\tau$

On en déduit alors que :

$$x_e(nT_e) = [x(t) * \delta(-t)]_{t=nT_e} \quad (3.8)$$

L'échantillonneur est assimilable à un filtre de réponse impulsionnelle $\delta(-t)$.

Exemple

Soit $x(t)$ un signal $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$ échantillonné à $f_e = 4f_0$. Calculer la transformé de Fourier du signal $x_e(t)$.

$$X(f) = \frac{2}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$X_e(f) = 4f_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta(f - f_0(1 + 4k)) + \delta(f + f_0(1 + 4k)))$$

Exemple

Reprendons le même signal $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$ échantillonné à $f_e = \frac{f_0}{2}$. Calculer la transformé de Fourier du signal $x_e(t)$.

$$X_e(f) = 2 \frac{f_0}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$$

3.2.2) Echantillonnage réel

En pratique, nous n'avons pas une impulsion infiniment brève et l'échantillonneur est assimilable à un filtre de réponse impulsionnelle $h(-t)$.

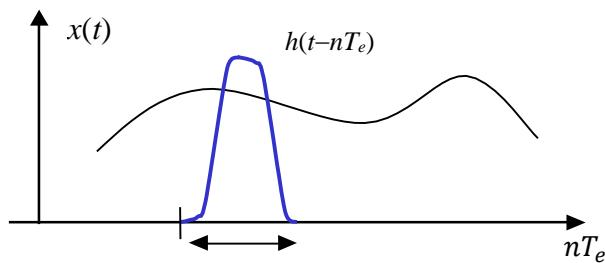


Fig. 3.16 : Illustration du principe de l'échantillonnage réel

L'expression d'un échantillon réel est donnée par :

$$\check{x}_e(nT_e) = [x(t) * h(-t)]_{t=nT_e} = [x(t) * h(-t)]. \delta(\tau - nT_e) \quad (3.9)$$

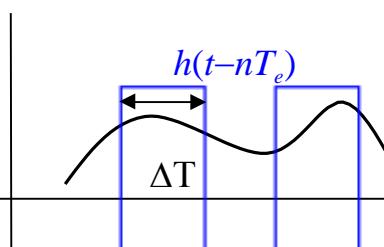
D'où l'expression du signal échantillonné réel :

$$\check{x}_e(t) = [x(t) * h(-t)]. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (3.10)$$

Exemple: échantillonnage réel par moyennage simple

L'échantillonneur moyenne donne des échantillons correspondant à la valeur moyenne de $x(t)$ prise sur un intervalle de durée ΔT .

On prend $h(t)$ comme : $\frac{1}{\Delta T} \text{rect}\left(\frac{t-\frac{\Delta T}{2}}{\Delta T}\right)$. L'expression du signal échantillonné est :



nT_e

Fig. 4.9 échantillonnage réel par moyennage simple

$$\check{x}_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \check{x}_e(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (4.11)$$

avec :

$$\begin{cases} \check{x}_e(nT_e) = [x(t) * h(-t)] \cdot \delta(\tau - nT_e) \\ \check{x}_e(nT_e) = \frac{1}{\Delta T} \int_{nT_e}^{nT_e + \Delta T} x(t) dt \end{cases} \quad (4.12)$$

Un échantillon est la valeur moyenne de $x(t)$ prise sur un intervalle de durée ΔT (temps de fermeture de l'interrupteur)

Question : que devient le spectre du signal $x(t)$ après échantillonnage réel?

L'expression du signal échantillonné avec un échantillonneur réel est :

$$\check{x}_e(t) = [x(t) * h(-t)] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \quad (3.10)$$

D'après Plancherel, on a :

$$\check{X}_e(f) = [X(f) \cdot H(-f)] * F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) \quad (3.11)$$

Or $H(-f) = H^*(f)$ pour une réponse impulsionnelle h réelle, d'où :

$$\check{X}_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) \cdot H^*(f - nF_e) \quad (3.12)$$

Rappel : pour un échantillonneur idéal, on avait: $X_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)$

- **Interpretation:**

L'expression de $\check{X}_e(f)$ est identique à $X_e(f)$ à un terme de pondération $H^*(f)$ près.

- Le terme de pondération n'influe pas sur la condition de Shannon.
- Le terme $H^*(f)$ introduit une distorsion sur le spectre par rapport au cas idéal.

Cette distorsion est d'autant plus faible que $H(f)$ est constante dans la bande $[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]$.

Exemple

Soit $x(t)$ un signal à support borné et f_{max} sa fréquence maximale. On échantilloné $x(t)$ à $f_e = 2f_{max}$ et on bloque chaque échantillon pendant une durée $T_e = \frac{1}{f_e}$. Ecrire le signal échantillonné et bloqué $y(t)$ et Calculer la transformé de Fourier.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) rect_{T_e}(t - kT_e) \\ y(t) &= rect_{T_e}(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - kT_e) \\ Y(f) &= sinc(fT_e) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e) \end{aligned}$$

Exemple

Soit $x(t)$ un signal dont le spectre est à support borné. On réalise un échantillonnage réel par

$$\text{moyennage simple. } h(t) = \frac{1}{\Delta T} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{\Delta T}{2}}{\Delta T}\right)$$

$$\text{Donc : } H(f) = \text{sinc}(\pi f \Delta T) \cdot e^{-j\pi f \Delta T}$$

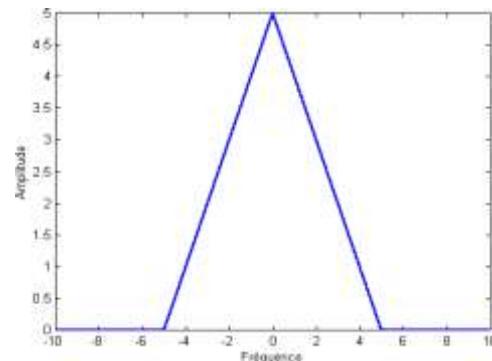


Fig. 3.17 : Spectre $X(f)$ du signal $x(t)$ avant échantillonnage

D'après le résultat précédent, on a : $\tilde{X}_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e) \cdot H^*(f - nF_e)$

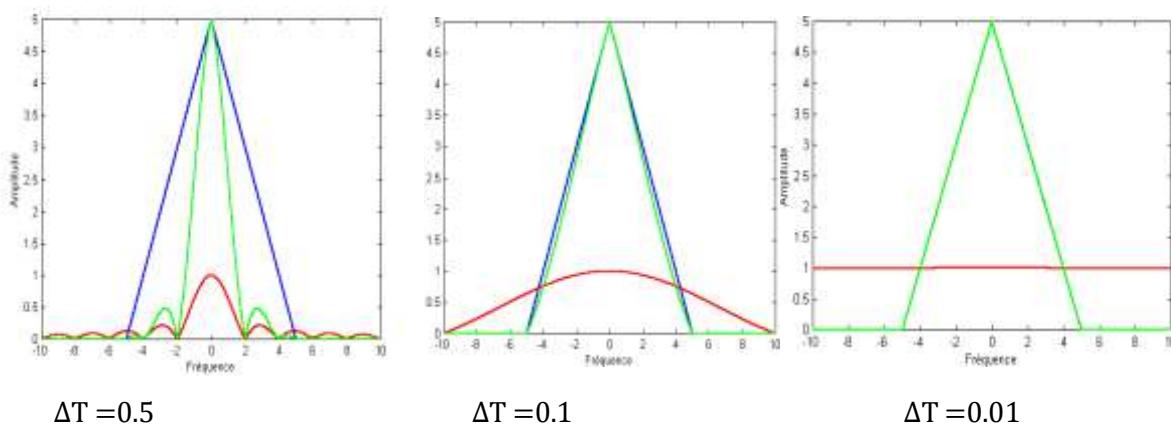


Fig. 3.18 : $\tilde{X}_e(f)$, $X(f)$ et $H(f)$ en fonction de ΔT . (— $\tilde{X}_e(f)$, - - - $X(f)$ et - - - $H(f)$)

3.3) Reconstruction du signal échantillonné

Dans le cas des signaux à **support fréquentiel infini ou à large bande**, il est impossible de définir une notion de **fréquence maximale** (F_{max}). Quel que soit la fréquence d'échantillonnage F_e , il y a toujours un repliement de spectre. C'est le cas des signaux réels comportant souvent une composante fréquentielle à large bande due à la présence de bruit (perturbations aléatoires), ce qui imposerait une fréquence F_e importante. La solution adoptée est l'application d'un **filtrage passe-bas** appelé **filtrage anti-repliement**.

3.3.1) Reconstruction idéale d'un signal échantillonné

Pour mettre en évidence donc ce problème et la solution adoptée, on va numériser un signal $x_1(t)$ qui sera le résultat d'un **filtrage passe-bas idéal** du signal $x(t)$ à **support fréquentiel infini ou à large bande**. C'est la solution pratique adoptée pour l'échantillonnage des signaux réels et permettant de garantir la condition de Shannon (il est indispensable de faire précédé l'opération d'échantillonnage par un **filtre passe-bas** appelé **filtre anti-repliement** de fréquence de coupure f_c un peu inférieure à la fréquence de Nyquist $\frac{F_e}{2}$).

La chaîne pratique de numérisation d'un signal réel analogique est donc constituée des éléments suivants :

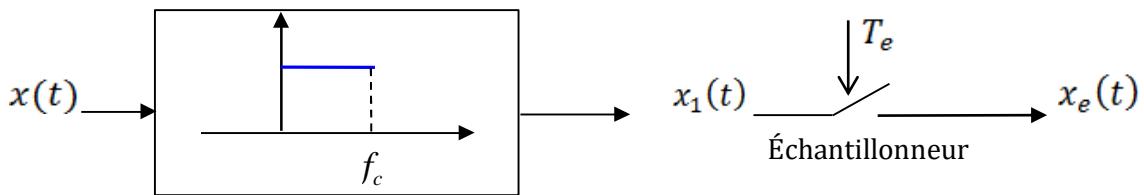


Fig. 3.9 : Utilisation d'un filtre anti-repliement avant échantillonnage

On a échantillonné un signal $x(t)$ en respectant le théorème de Shannon, comment fait-on pour le reconstruire à partir des échantillons ?

Sachant que la condition de Shannon a été respectée lors de l'échantillonnage ($x(t)$ est à support borné en fréquence ou filtrage anti-repliement).

Pour reconstruire le signal, il suffit de prendre la TF inverse du motif de base de $X_e(f)$.

- ✓ Filtrage passe bas idéal.
- ✓ Diviser par F_e .
- ✓ Puis TF inverse.

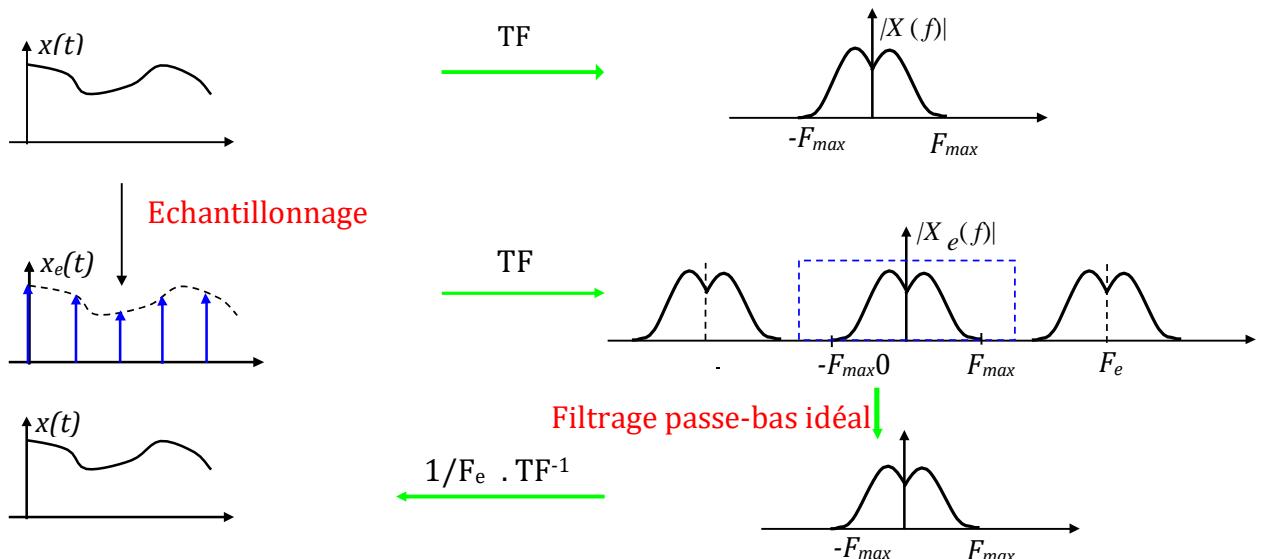


Fig. 3.20 : Reconstruction d'un signal échantillonné idéalement par la TF inverse

Le filtre idéal nécessite la connaissance de tous les échantillons $x(nT_e)$ est nécessaire pour reconstruire le signal. La reconstruction est **mathématiquement possible**, mais **physiquement elle est irréalisable** car le **filtre passe-bas idéal n'est pas causal (physiquement non réalisable)**.

3.3.2) Reconstruction par bloqueur d'ordre zéro (BOZ) (Extrapolateur d'ordre 0)

On propose ici d'étudier une méthode de reconstruction causale. L'idée est simplement de maintenir l'échantillon $x(nT_e)$ jusqu'à l'apparition de l'échantillon $x(nT_e + T_e)$.

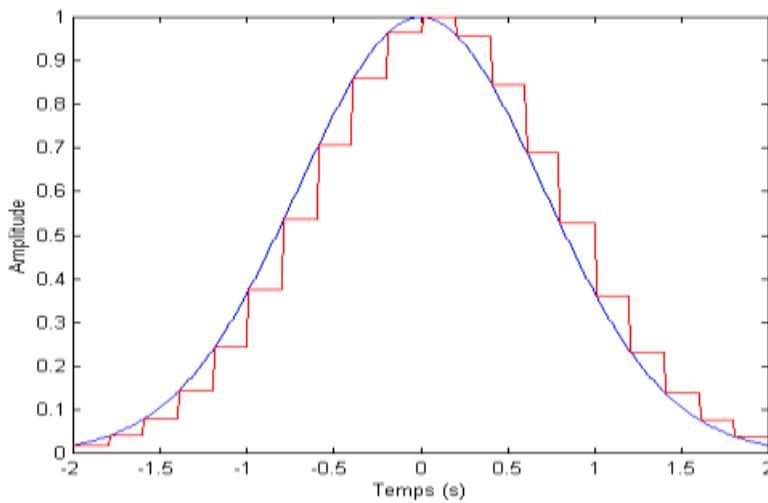


Fig. 3.21 : Reconstruction par BOZ d'un signal échantilloné idéalement

$$x_0(t) = x(nT_e) \text{ pour } nT_e \leq t \leq (n+1)T_e, \forall n$$

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \cdot \text{rect}\left(\frac{t - \frac{\Delta T}{2} - nT_e}{T_e}\right) \quad (3.13)$$

Conséquences en fréquence \Rightarrow Calcul de la TF de $x_0(t)$.

En remarquant qu'on peut écrire aussi :

$$x_0(t) = [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)] * \text{rect}\left(\frac{t - \frac{\Delta T}{2} - nT_e}{T_e}\right) = x(nT_e) * \text{rect}\left(\frac{t - \frac{\Delta T}{2}}{T_e}\right) \quad (3.14)$$

On obtient :

$$X_0(f) = \text{sinc}(\pi f T_e) \cdot e^{-j\pi f T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_e)$$

$$X_0(f) = \text{sinc}(\pi f T_e) \cdot e^{-j\pi f T_e} \cdot \frac{1}{F_e} X_e(f) \quad (3.15)$$

Le spectre d'amplitude du signal reconstruit par le BOZ est celui du signal échantillonné déformé

par le terme $\text{sinc}(\pi f T_e)$.

Remarque : L'exponentiel est strictement complexe : pas de modification d'amplitude, mais une modification de la phase due au décalage temporel de $T_e/2$

3.3.3) Quelques valeurs usuelles de fréquences d'échantillonnage

Domaine d'applications	Largeur de bande	Fréquence f_s d'échantillonnage
Biomédical	< 500 Hz	1 kHz
Parole en téléphonie	< 4 kHz	8 kHz
Musique	< 20 kHz	44.1 kHz
Ultrason	< 100 kHz	250 kHz
Radar	< 100 Mhz	200 Mhz

Remarque :

La fréquence d'échantillonnage f_e doit être suffisamment élevée si l'on ne veut pas perdre trop d'informations sur le signal. Cependant plus f_e est élevée (T_e faible), plus le temps disponible pour effectuer les traitements numériques sera court et plus le nombre d'échantillons à traiter sera important.

3.4) Quantification

On se limite ici à la quantification scalaire, c'est-à-dire à la quantification d'un échantillon isolé. Deux types de cette quantification peuvent être envisagés :

- La quantification uniforme.
- La quantification non uniforme, à savoir la quantification logarithmique.

Quantifier une valeur $x = x_e(t)$ réelle appartenant à un intervalle $[-x_{\max}, x_{\max}]$, consiste à remplacer cette valeur par la valeur $Q(x)=x_n$ la plus proche de x choisie dans un ensemble fini (dénombrable) de N valeurs réelles notées x_n ($x_n=nq$, avec n entre 0 et $N-1$). Donc, quantifier revient à approximer chaque valeur du signal échantillonné $x_e(t)$ en un multiple entier d'une quantité élémentaire q

appelée "pas de quantification" ou quantum. Si q est constant ($q = x_{n+1} - x_n$), on parle de quantification uniforme.

La valeur quantifiée de x : $Q(x)$ est donnée par :

$$\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$$

$$\text{Si } |x - x_n| < |x - x_{n+1}| \quad Q(x) = x_n$$

$$\text{Si } |x - x_n| > |x - x_{n+1}| \quad Q(x) = x_{n+1}$$

(3.16)

$$\text{Si } x = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \quad Q(x) = x_n \text{ ou } x_{n+1} \text{ selon le système}$$

La caractéristique d'une quantification uniforme donnant $Q(x)$ en fonction de x , est une courbe en escaliers ($Q(x) = xq$), donnée par la figure suivante.

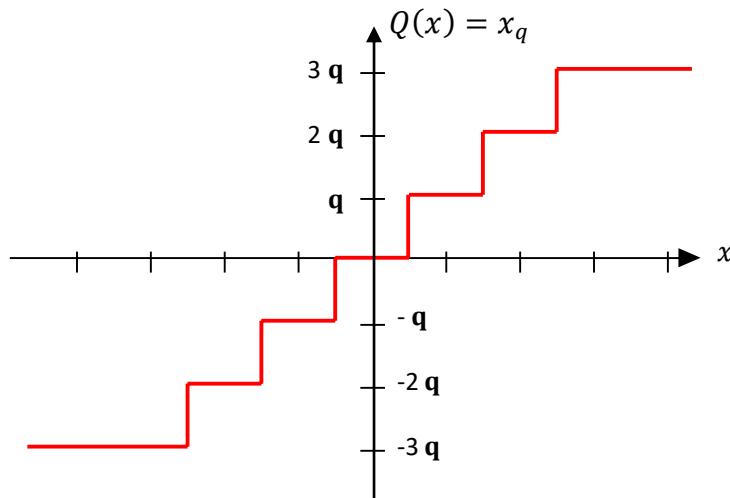


Fig. 3.22 : Courbe d'une quantification uniforme $Q(x) = xq$

La quantification uniforme est parfois appelée quantification linéaire.

Le quantum peut s'exprimer en fonction des valeurs extrêmes du signal échantillé $\pm x_{\max}$.

$$q = \frac{2x_{\max}}{2^N} = \frac{x_{\max}}{2^{N-1}}$$
(3.17)

N est le nombre des valeurs de quantification.

Il existe principalement deux modes de quantification uniforme :

Par troncature : La quantification uniforme par troncature est moins utilisée que la quantification uniforme par arrondi. Elle consiste à tronquer (approximer) chaque intervalle $[nq, (n + 1)q]$ de $x_e(t)$ par la valeur nq .

Par arrondi : La quantification uniforme par arrondi est la plus utilisée. Elle consiste à arrondir (approximer) chaque intervalle $[(n - \frac{1}{2})q, (n + \frac{1}{2})q]$ de $x_e(t)$ par la valeur nq .

La quantification introduit une erreur modélisable mathématiquement, et que l'on peut considérer comme une variable aléatoire.

3.4.1) Quantification uniforme par troncature

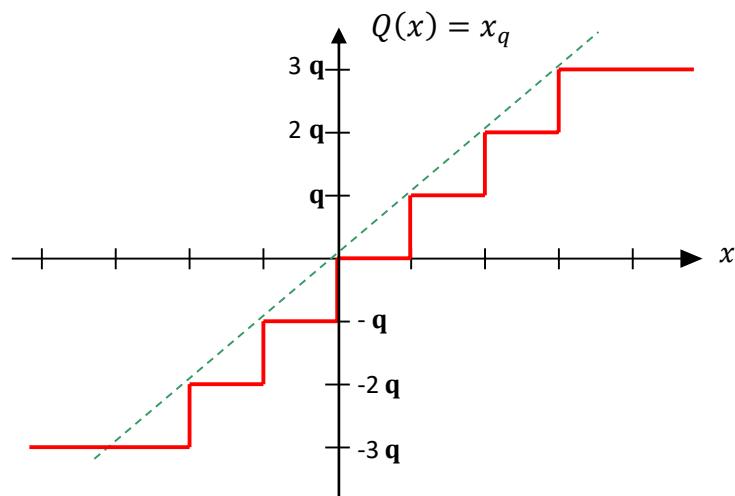


Fig. 3.23 : Courbe d'une quantification uniforme par troncature

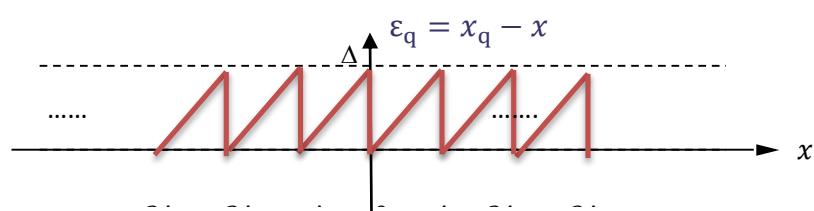


Fig 4.15.b) l'erreur de quantification par troncature $\varepsilon_q = x_q - x$

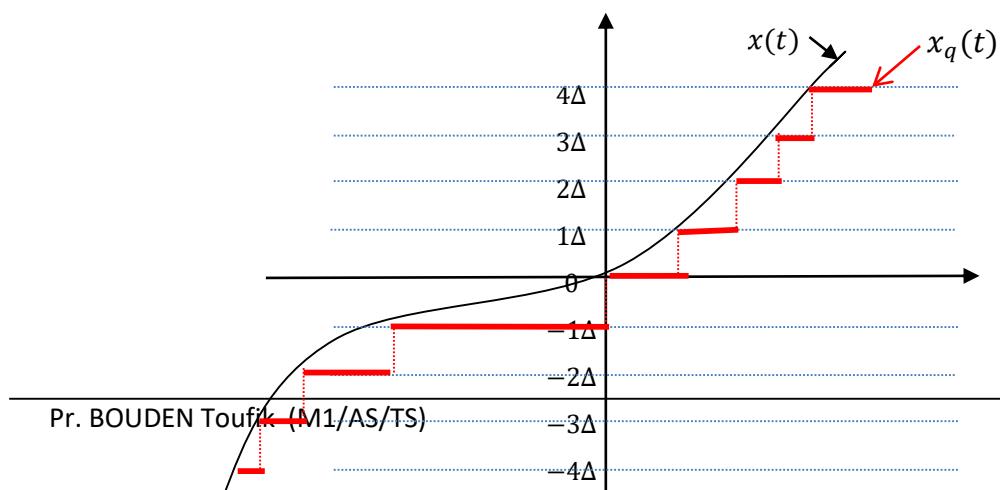


Fig. 4.15.c Exemple de quantification par troncature d'un signal $x(t)$

La puissance du bruit de quantification est égale à la puissance du signal périodique en dents de scie illustré par la figure 4.15.b, c.a.d:

$$P_{\epsilon_q} = \frac{\Delta^2}{3} \quad (4.19)$$

$$RSB_{dB} = 10\log \left[3 \left(\frac{V_{eff}}{\Delta} \right)^2 \right] \quad (4.20)$$

Si l'on décompose la plage de variation V_{PE} du signal à quantifier en 2^n intervalles de largeur Δ (avec n le nombre de bits utilisés pour coder le signal quantifié). Alors :

$$\begin{aligned} V_{PE} &= 2^n \cdot \Delta \text{ ou } \Delta = \frac{V_{PE}}{2^n} \\ RSB_{dB} &= 10\log 3 + 20\log \left[2^n \left(\frac{V_{eff}}{V_{PE}} \right) \right] \\ &= 10\log 3 + 20\log 2^n + 20\log \left(\frac{V_{eff}}{V_{PE}} \right) \\ RSB_{dB} &\approx 6.02n + 4.77 + 20\log \left(\frac{V_{eff}}{V_{PE}} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Remarque: En traitement du signal, on considère la puissance d'un signal aux bornes d'une résistance de 1Ω . La puissance est donc égale au carré de la valeur efficace.

Exemple : On veut numériser une sinusoïde et que l'on fixe : $V_{PE} = 2 \cdot V_{max}$

$$\text{Dans ce cas : } V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{et } RSB_{dB} &\approx 6.02n + 4.77 + 20\log \left(\frac{V_{max}}{2\sqrt{2}V_{max}} \right) \\ &\Rightarrow RSB_{dB} \approx 6.02n - 4.26 \end{aligned} \quad (4.22)$$

3.4.2) Quantification uniforme par arrondi

Si on considère que l'erreur ϵ_q a une densité de probabilité uniforme dans la gamme de variation de l'erreur $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$, la puissance du bruit de quantification est égale à la puissance du signal périodique en dents de scie illustré par la figure 4.16.b, c.a.d:

$$P_{\epsilon_q} = \frac{\Delta^2}{12} \quad (4.23)$$

Le rapport signal sur bruit dû à la quantification est donc égale à : $RSB_{dB} = 10\log\left(\frac{P_x}{P_{\epsilon_q}}\right)$

La puissance du signal à quantifier est égale à sa valeur efficace au carré (voir remarque) :

$$RSB_{dB} = 10\log\left[12\left(\frac{V_{eff}}{\Delta}\right)^2\right] \quad (4.24)$$

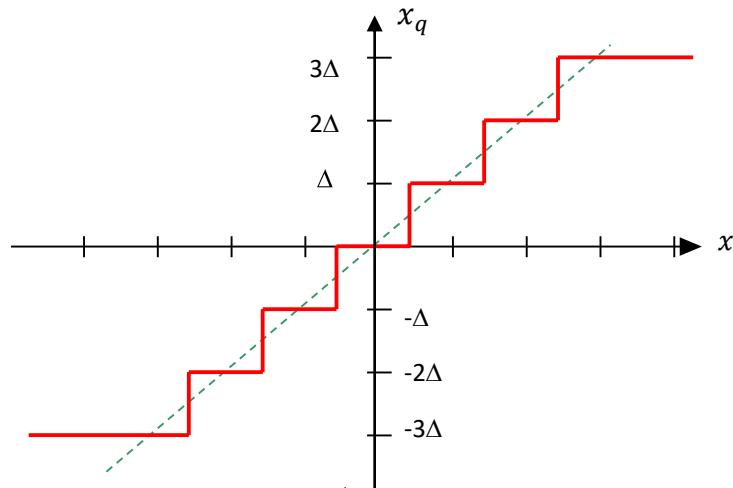


Fig. 4.16. La relation en escalier entre x_q et x (quantification par arrondi)

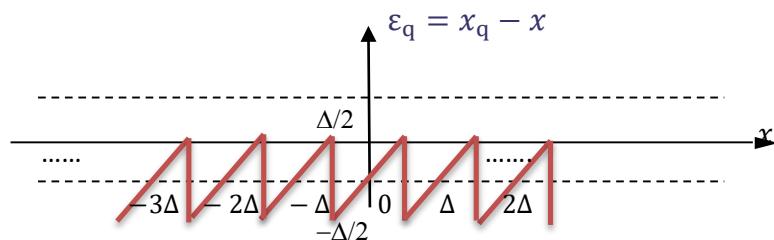


Fig. 4.6.b l'erreur de quantification par arrondi $\epsilon_q = x_q - x$

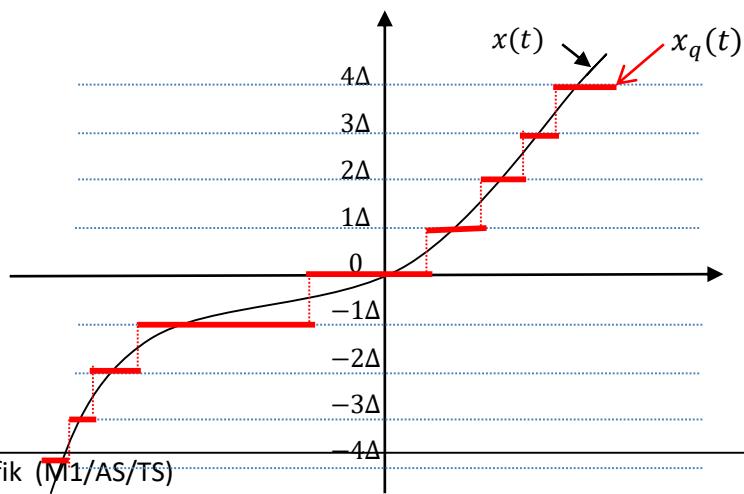


Fig. 4.16.c Exemple de quantification par arrondi d'un signal $x(t)$

Si l'on décompose la plage de variation V_{PE} du signal à quantifier en 2^n intervalles de largeur Δ (avec n est le nombre de bits utilisés pour coder le signal quantifié). Alors :

$$\begin{aligned} V_{PE} &= 2^n \cdot \Delta \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{V_{PE}}{2^n} \\ RSB_{dB} &= 10\log_{10} 12 + 20\log_{10} \left[2^n \left(\frac{V_{eff}}{V_{PE}} \right) \right] \\ &= 10\log_{10} 12 + 20\log_{10} 2^n + 20\log_{10} \left(\frac{V_{eff}}{V_{PE}} \right) \\ RSB_{dB} &\approx 6.02n + 10.8 + 20\log_{10} \left(\frac{V_{eff}}{V_{PE}} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Exemple:

Si l'on veut numériser une sinusoïde et que l'on fixe :

$$V_{PE} = 2 \cdot V_{max} \text{ et } V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Dans ce cas : $RSB_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20\log_{10} \left(\frac{V_{max}}{2\sqrt{2}V_{max}} \right)$

$$\approx 6.02n + 1.77 \quad (4.26)$$

EXERCICES

EXERCICE 1

1. Donner la fréquence d'échantillonnage minimale satisfaisant la condition de Shannon pour le signal : $x(t) = \frac{\sin(t)}{t}$
2. En montrant que : $tri_T(t) = rect_T(t) * rect_T(t)$, déduire la fréquence minimale d'échantillonnage permettant respecter le théorème de Shannon du signal : $x(t) = \frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 t^2}$

EXERCICE 2

Soit un signal réel $x(t)$ à support borné dont la fréquence maximale est F_{max} . Quelle est la fréquence maximale des signaux suivants :

a). $\frac{dx(t)}{dt}$

b). $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

c). $x(2t)$

d). $x^2(t)$

EXERCICE 3

Soit un signal $x(t)$ composé d'une combinaison linéaire de signaux co-sinusoidaux de fréquences 300 Hz, 400 Hz, 1.3 KHz, 3.6 KHz, et 4.3 KHz. Ce signal est échantillonné à une fréquence F_e puis passé à travers un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure F_c générant un signal $y(t)$. quelles sont les composantes présentes dans $y(t)$ si :

- a). $F_e = 2\text{KHz}$ et $F_c = 900\text{ Hz}$
- b). $F_e = 2\text{KHz}$ et $F_c = 1500\text{ Hz}$
- c). $F_e = 4\text{KHz}$ et $F_c = 500\text{ Hz}$

EXERCICE4

Soit un signal $x(t)$ dont sa TF est $X(f)$. On considère le signal $y(t)$ dont sa TF est donnée par :

$$Y(f) = \frac{1}{T} X(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$$

- a. En déduire la formule de poisson :

$$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-j2\pi kfT}$$

- b. On suppose que l'on ait :

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT)$$

Donner l'expression de $Z(f)$ en fonction de $X(f)$ et $H(f)$.

EXERCICES

1. Démontrer que l'erreur de quantification d'un quantificateur uniforme centré (par arrondi), pour une conversion pleine échelle de $-x_{\max}$ à x_{\max} d'un signal sinusoïdal est donnée par : $(RSB)_{dB} \approx (6.02N + 1.76)dB$ où N est le nombre de bits du quantificateur.
2. Quelle est la fréquence d'échantillonnage F_e et le nombre de bits nécessaire pour numériser un signal audio avec un convertisseur uniforme centré sachant que l'oreille humaine perçoit les sons jusqu'à 20 KHz, et qu'on souhaite une précision de 0.5% sur les amplitudes comprises entre 0.5% V_{fs} et 100% V_{fs} où V_{fs} est l'amplitude pleine échelle du convertisseur et N est le nombre de bits du codeur.
3. Quelle est la capacité mémoire nécessaire pour stocker une minute de signal téléphonique, sachant que ce signal a une fréquence maximale de 4 KHz et que l'on mémorise en respectant le

théorème de Shannon et en utilisant la loi uniforme de la question 2.

4. Quelle est la capacité mémoire nécessaire pour stocker une trame d'image vidéo, sachant que la largeur de la bande du signal est de 6 MHz, et que l'on transmet 50 trames par secondes et que l'on souhaite une image noir et blanc à 256 niveaux de gris.