UNIVERSITE M^{ED} SEDDIK
BEN YAHIA - JIJEL

FST

Département d'Automatique

جامعة محمد الصديق
بن يحي- جيجل
كلية العلوم والتكنولوجيا
دائرةالآليات

MASTER Automatique et Système (M1/S1), TS(A/N),

Exercices (Chap01/02) 2021/2022

Exercice 01 :

Considérant les 2 signaux suivants pour lesquels $f_0 = 1$ [kHz]

$$x_1(t) = 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$
$$x_2(t) = 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

1. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;
2. écrivez $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

Corrigé

$x_1(t) = 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$:

Pour $x_1(t)$, en comparant à la relation générale du développement en série de Fourier,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \quad (1.1)$$

on a :

1. Une composante continue $\frac{a_0}{2} = \frac{12}{2} = 6$
2. Une harmonique 1 (fondamental) à $f_0 = 1$[kHz], avec $a_1 = -2$ et $b_1 = 3$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a tout d'abord pour la série en cosinus :

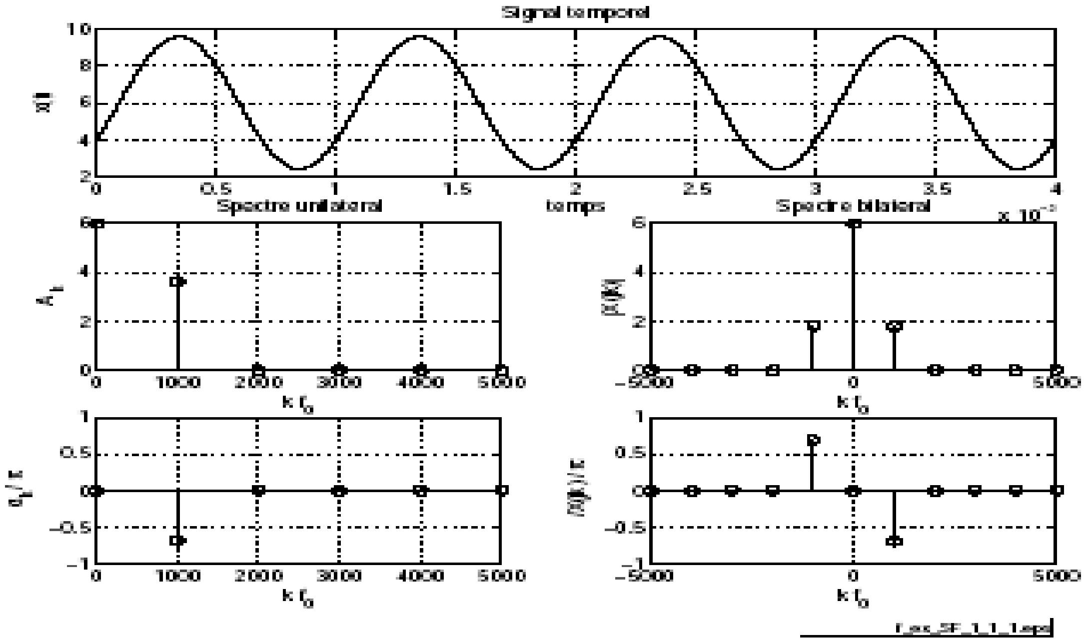

FIG. 1.1 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x_1(t)$ (fichier source).

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3.6056$$
$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right) = -2.1588 \text{ [rad]} = -123.6901 \text{ [°]}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 6 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) \\ &= 6 + 3.6056 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - 2.1588) \end{aligned}$$

$x_2(t) = 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$:

Pour $x_2(t)$, on a en se référant au développement en série de Fourier (1.1) :

1. Une composante continue $\frac{a_0}{2} = \frac{8}{2} = 4$

2. Des harmoniques à $f_0 = 1\,[\text{kHz}]$ et $3 \cdot f_0 = 3\,[\text{kHz}]$, avec a_1 et b_1 à calculer, $a_3 = 0$, $b_3 = 0.8$

Pour la représentation des spectres unilatéraux et bilatéraux, il faut calculer la série de Fourier en cosinus ainsi que la série de Fourier complexe. On a pour la série en cosinus :

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \frac{a_0}{2} = 4 \\
&A_1 = 1.8 \quad \left(= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right) \\
&\alpha_1 = \frac{\pi}{3} \\
&A_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{0^2 + 0.8^2} = 0.8 \\
&\alpha_3 = \arctan\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = \arctan\left(\frac{-0.8}{0}\right) \to -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
&= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)
\end{aligned}
$$

Dans le cas général, il aurait fallu calculer a_1 et b_1 selon les relations :

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \qquad k \geq 0 \\
b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \qquad k \geq 1
\end{aligned}
$$

En tenant compte des identités trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) \\
\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{a_0}{2} = 4 \\
A_1 &= 1.8 \qquad \left(= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right) \\
\alpha_1 &= \frac{\pi}{3} \\
A_3 &= \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \sqrt{0^2 + 0.8^2} = 0.8 \\
\alpha_3 &= \arctan\left(\frac{-b_3}{a_3}\right) = \arctan\left(\frac{-0.8}{0}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire :

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\
&= 4 + 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.8 \cdot \cos\left(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= A_0 + A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_3 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \alpha_3)
\end{aligned}
$$

Dans le cas général, il aurait fallu calculer a_1 et b_1 selon les relations :

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \qquad k \geq 0 \\
b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \cdot dt \qquad k \geq 1
\end{aligned}
$$

En tenant compte des identités trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) \\
\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}
$$

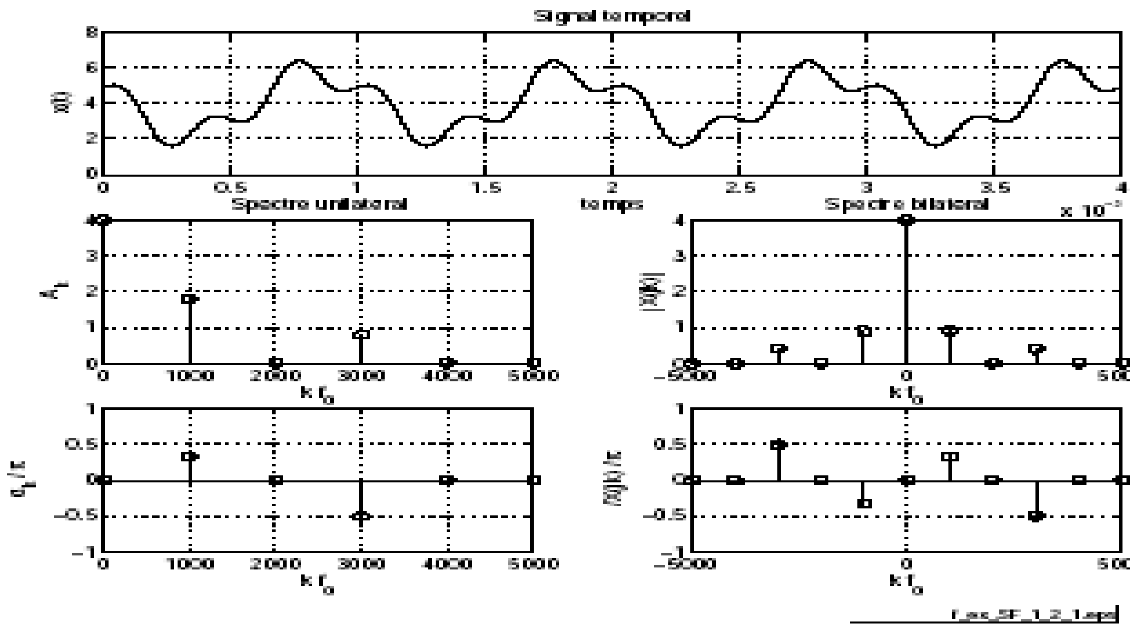

FIG. 1.2 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x_2(t)$ ([illegible]).

on a donc :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) [t]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\
&= 0.9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1.8 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot f_0 \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \sin\left(4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot dt \\
&= \frac{2}{T} \cdot 1.8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) [t]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \\
&= -0.9 \cdot \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

On vérifie que l'on a bien :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{0.9^2 + \left(-0.9 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 1.8 \\
\alpha_1 &= \arctan\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) = \arctan\left(\frac{0.9 \cdot \sqrt{3}}{0.9}\right) = 1.047 = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Pour $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \alpha_1) \\ &= A_0 + \frac{A_1}{2}\cdot\left(e^{+j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)} + e^{-j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)}\right) \\ &= A_0 + \frac{A_1}{2}\cdot\left(e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1} + e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}\right) \\ &= \underbrace{X_1(j\cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X_2(j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1}}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(-j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \end{aligned}$$

Pour $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= A_0 + A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1) + A_3\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_3) \\ &= A_0 + \frac{A_1}{2}\cdot\left(e^{+j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)} + e^{-j\cdot(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)}\right) + \frac{A_3}{2}\cdot\left(e^{+j\cdot(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)} + e^{-j\cdot(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)}\right) \\ &= A_0 + \frac{A_1}{2}\cdot\left(e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1} + e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}\right) + \frac{A_3}{2}\cdot\left(e^{+j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\cdot e^{+j\cdot\alpha_3} + e^{-j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\cdot e^{-j\cdot\alpha_3}\right) \\ &= \underbrace{X_1(j\cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X_2(j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1}}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(-j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(j\cdot 3)}_{\frac{A_3}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_3}}\cdot e^{j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X_2(-j\cdot 3)}_{\frac{A_3}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_3}}\cdot e^{-j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \end{aligned}$$

Exercice 02 :

Utilisez les formules d'Euler pour montrer que la série de Fourier du signal suivant

$$x(t) = \left(1 + \cos\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\cos(10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)$$

est décrite par les harmoniques 4, 5 et 6. Pour ce faire :

1. remplacez chaque fonction cosinus par deux phaseurs ; effectuez le produit ;
2. écrivez $x(t)$ sous la forme d'une somme de phaseurs ;
3. que valent les coefficients $X(j\cdot k)$ non-nuls ?
4. dessinez les spectres bilatéraux et unilatéraux d'amplitude et de phase.

Corrigé

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1+\cos\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\cos(10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \\ &= \left(1+0.5\cdot\left(e^{j\cdot\left(0.5\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\right)\right)\cdot 0.5\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) \\ &= 0.5\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) + 0.5\cdot\left(e^{j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\right)\cdot 0.5\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) \\ &= 0.5\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) + 0.25\cdot\left(e^{j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\right)\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) \\ &= 0.5\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) \\ &+ 0.25\cdot\left(e^{j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\cdot e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) \\ &= 0.5\cdot\left(e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t}\right) + 0.25\cdot\left(e^{j\cdot\left(12\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)} + e^{j\cdot\left(-8\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)} + e^{j\cdot\left(8\cdot\pi\cdot f_0\cdot t-\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-j\cdot\left(12\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{6}\right)}\right) \\ &= X(j\cdot 4)\cdot e^{j\cdot 8\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(-j\cdot 4)\cdot e^{-j\cdot 8\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(j\cdot 5)\cdot e^{j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(-j\cdot 5)\cdot e^{-j\cdot 10\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(j\cdot 6)\cdot e^{j\cdot 12\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(-j\cdot 6)\cdot e^{-j\cdot 12\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \end{aligned}$$

avec

$$X(j \cdot 4) = 0.25 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{8}}$$
$$X(-j \cdot 4) = 0.25 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{8}}$$
$$X(j \cdot 5) = 0.5$$
$$X(-j \cdot 5) = 0.5$$
$$X(j \cdot 6) = 0.25 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{8}}$$
$$X(-j \cdot 6) = 0.25 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{8}}$$

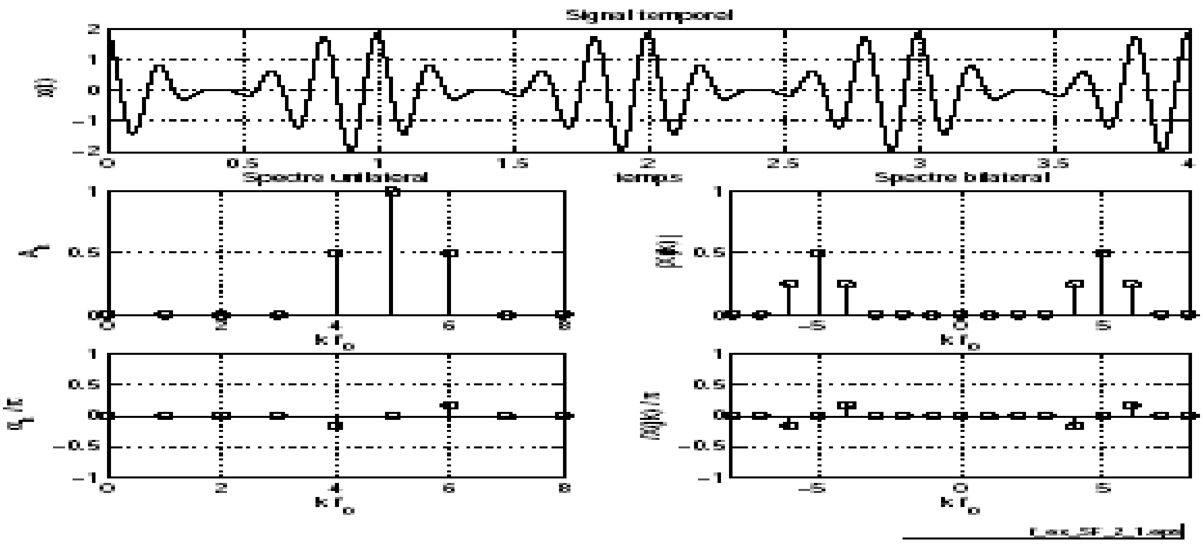

FIG. 1.3 – Spectres unilatéral et bilatéral de $x(t)$ (fichier source).

Exercice 03 :

Considérant un signal périodique de période $T = 20$ [ms] décrit par son spectre bilatéral $X(j \cdot k)$:

k	0	± 1	± 2
$X(j \cdot k)$	2	$-3 \pm j \cdot 2$	$+1 \pm j \cdot 3$
$\lvert X \rvert$			
$\angle X$			

retrouvez sa description temporelle en cosinus après avoir rempli les cases libres du tableau.

Corrigé

k	0	± 1	± 2
$X(j\cdot k)$	2	$-3 \pm j\cdot 2$	$+1 \pm j \cdot 3$
$\lvert X\rvert$	2	$\sqrt{3^2+2^2} = 3.6056$	$\sqrt{1^2+3^2} = 3.16236$
$\angle X$	0	± 2.5536 [rad] $= \pm 146.3099$ [°]	± 1.2490 [rad] $= \pm 71.5651$ [°]

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2\cdot\pi\cdot f_0 \cdot t + \alpha_1) + A_2 \cdot \cos(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_2) \\ &= \underbrace{X(j\cdot 0)}_{A_0} + \underbrace{X(j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_1}} \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X(-j\cdot 1)}_{\frac{A_1}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_1}} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X(j\cdot 2)}_{\frac{A_2}{2}\cdot e^{+j\cdot\alpha_2}} \cdot e^{j\cdot 4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \underbrace{X(-j\cdot 2)}_{\frac{A_2}{2}\cdot e^{-j\cdot\alpha_2}} \cdot e^{-j\cdot 4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A_0 &= X(j\cdot 0) = 2 & \alpha_0 &= 0 \text{ [rad]} \\ A_1 &= 2\cdot |X(j\cdot 1)| = 2\cdot 3.6056 = 7.2111 & \alpha_1 &= 2.5536 \text{ [rad]} \\ A_2 &= 2\cdot |X(j\cdot 2)| = 2\cdot 3.16236 = 6.3246 & \alpha_2 &= 1.2490 \text{ [rad]} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cdot \cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1) + A_2\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_2) \\ &= 2 + 7.2111\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 50\,[\text{Hz}]\cdot t + 2.5536) + 6.3246\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot 50\,[\text{Hz}]\cdot t + 1.2490) \end{aligned}$$

Exercice 04 :

Considérant les trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ de période $T = 1$[ms] décrits par leurs spectres respectifs (tableau 1.1) :

1. donnez l'expression temporelle des trois signaux ;
2. écrivez ces expressions à l'aide de cosinus seulement ;
3. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase uni- et bilatéraux.

Corrigé

1. Expressions temporelles de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t) \\ &= \frac{2}{2} + 5\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t) + 4\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t) - 2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 2\cdot f_0\cdot t) + 3\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 2\cdot f_0\cdot t) \\ &+ 1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t) - 1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t) \\ &= 1 + 5\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + 4\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) - 2\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + 3\cdot\sin(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \\ &+ 1\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) - 1\cdot\sin(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t + \alpha_k) \\ &= 1 + 3\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\cdot k)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t}\\
&= X(-j\cdot 3)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t} + X(-j\cdot 1)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + X(j\cdot 0)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 0\cdot f_0\cdot t} + X(j\cdot 1)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + X(j\cdot 3)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\\
&= (-2-j)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t} + (4-j\cdot 3)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + 5 + (4+j\cdot 3)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + (-2+j)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\\
&= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{-1}{-2}\right)}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t} + \sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t}\\
&+ 5 + \sqrt{4^2+3^2}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + \sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{1}{-2}\right)}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\\
&= \sqrt{5}\cdot e^{j\arctan\left(\frac{-1}{-2}\right)}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t} + \sqrt{25}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + 5 + \sqrt{25}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + \sqrt{5}\cdot e^{j\cdot\arctan\left(\frac{1}{-2}\right)}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\\
&= \sqrt{5}\cdot e^{-j\cdot 2.6779}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t} + 5\cdot e^{-j\cdot 0.6435}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + 5 + 5\cdot e^{j\cdot 0.6435}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + \sqrt{5}\cdot e^{j\cdot 2.6779}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\\
&= 5 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{e^{j\cdot 2.6779}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 2.6779}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}}{2} + 2\cdot 5\cdot\frac{e^{j\cdot 0.6435}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t} + e^{-j\cdot 0.6435}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t}}{2}\\
&= 5 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t + 2.6779) + 10\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + 0.6435)
\end{aligned}
$$

2. Expressions de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ à l'aide de cosinus seulement. partant des résultats ci-dessus, on a :

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 1 + 5\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + 4\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) - 2\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + 3\cdot\sin(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\\
&+ 1\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) - 1\cdot\sin(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)\\
&= 1 + \sqrt{5^2+4^2}\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \arctan\left(\frac{-4}{5}\right)\right) + \sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\cos\left(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \arctan\left(\frac{-3}{-2}\right)\right)\\
&+ \sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\cos\left(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \arctan\left(\frac{-(-1)}{1}\right)\right)\\
&= 1 + \sqrt{41}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t - 0.675) + \sqrt{13}\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t - 2.16) + \sqrt{2}\cdot\cos\left(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\\
&= A_0 + A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + \alpha_1) + A_2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + \alpha_2) + A_3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + \alpha_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t + \alpha_k)\\
&= 1 + 3\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= A_0 + A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + \alpha_1) + A_3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t + \alpha_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3(t) &= 5 + 10\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + 0.6435) + 2\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t + 2.6779)\\
&= A_0 + A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t + \alpha_1) + A_3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t + \alpha_3)
\end{aligned}
$$

3. Spectres unilatéraux et bilatéraux d'amplitude et de phase de $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$:

$x_1(t)$ Le spectre unitlatéral correspond directement à l'expression de $x_1(t)$ en cosinus :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 1+\sqrt{41}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t-0.675)+\sqrt{13}\cdot\cos(4\cdot\pi\cdot f_0\cdot t-2.16)+\sqrt{2}\cdot\cos\left(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= A_0+A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)+A_2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t+\alpha_2)+A_3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t+\alpha_3)\end{aligned}$$

Le spectre bilatéral s'en déduit facilement :

k	0	1	2	3
A_k	$A_0=1$	$A_1=\sqrt{41}$	$A_2=\sqrt{13}$	$A_3=\sqrt{2}$
α_k	$\alpha_0=0$	$\alpha_1=-0.675$	$\alpha_2=-2.16$	$\alpha_3=+\frac{\pi}{4}$
k	0	±1	±2	±3
$X(j\cdot k)$	$X(j\cdot 0)=A_0=1$	$X(\pm j\cdot 1)=\frac{A_1}{2}\cdot e^{\pm j\cdot\alpha_1}=\frac{\sqrt{41}}{2}\cdot e^{\mp j 0.675}$	$X(\pm j\cdot 2)=\frac{A_2}{2}\cdot e^{\pm j\cdot\alpha_2}=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot e^{\mp j\cdot 2.16}$	$X(\pm j\cdot 3)=\frac{A_1}{2}\cdot e^{\pm j\cdot\alpha_3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

La représentation graphique des spectre uni- et bilatéraux est donnée sur la figure 1.9.

$x_2(t)$ Le spectre unitlatéral correspond directement à l'expression de $x_2(t)$ en cosinus :

$$\begin{aligned}x_2(t) &= A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t+\alpha_k)\\ &= 1+3\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t-\frac{\pi}{3}\right)+2\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= A_0+A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)+A_3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t+\alpha_3)\end{aligned}$$

Le spectre bilatéral s'en déduit facilement :

k	0	1	2	3
A_k	$A_0=1$	$A_1=3$	$A_2=0$	$A_3=2$
α_k	$\alpha_0=0$	$\alpha_1=-\frac{\pi}{3}$	$\alpha_2=0$	$\alpha_3=+\frac{\pi}{2}$
k	0	±1	±2	±3
$X(j\cdot k)$	$X(j\cdot 0)=A_0=1$	$X(\pm j\cdot 1)=\frac{A_1}{2}\cdot e^{\pm j\cdot\alpha_1}=\frac{3}{2}\cdot e^{\mp j\cdot\frac{\pi}{3}}$	$X(\pm j\cdot 2)=0$	$X(\pm j\cdot 3)=\frac{A_3}{2}\cdot e^{\pm j\cdot\alpha_3}=\frac{2}{2}\cdot e^{\pm j\cdot\frac{\pi}{2}}=e^{\pm j\cdot\frac{\pi}{2}}$

La représentation graphique des spectre uni- et bilatéraux est donnée sur la figure 1.10.

$x_3(t)$ Le spectre unitlatéral correspond directement à l'expression de $x_3(t)$ en cosinus :

$$\begin{aligned}x_3(t) &= 5+10\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t+0.6435)+2\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t+2.6779)\\ &= A_0+A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t+\alpha_1)+A_3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t+\alpha_3)\end{aligned}$$

Le spectre bilatéral a dédjà été obtenu au précédemment : on avait :

$$\begin{aligned}x_3(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j\cdot k)\cdot e^{j2\cdot\pi\cdot k\cdot f_0\cdot t}\\ &= X(-j\cdot 3)\cdot e^{-j\cdot 2\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}+X(-j\cdot 1)\cdot e^{-j\cdot 2\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t}+X(j\cdot 0)\cdot e^{j2\cdot\pi\cdot 0\cdot f_0\cdot t}+X(j\cdot 1)\cdot e^{j2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t}+X(j\cdot 3)\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\\ &= \sqrt{5}\cdot e^{-j\cdot 2.6779}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}+5\cdot e^{-j\cdot 0.6435}\cdot e^{-j2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t}+5+5\cdot e^{j\cdot 0.6435}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 1\cdot f_0\cdot t}+\sqrt{5}\cdot e^{j\cdot 2.6779}\cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot 3\cdot f_0\cdot t}\end{aligned}$$

Si l'on répète néanmoins la même opération que pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a :

k	0	1	2	3
A_k	$A_0 = 5$	$A_1 = 10$	$A_2 = 0$	$A_3 = 2 \cdot \sqrt{5}$
α_k	$\alpha_0 = 0$	$\alpha_1 = 0.6435$	$\alpha_2 = 0$	$\alpha_3 = 2.6779$
k	0	± 1	± 2	± 3
$X(j \cdot k)$	$X(j \cdot 0) = A_0 = 5$	$X(\pm j \cdot 1) = \frac{A_1}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_1} = \frac{10}{2} \cdot e^{\pm j \cdot 0.6435} = 5 \cdot e^{\pm j \cdot 0.6435}$	$X(\pm j \cdot 2) = 0$	$X(\pm j \cdot 3) = \frac{A_3}{2} \cdot e^{\pm j \cdot \alpha_3} = \frac{2\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\pm j \cdot 2.6779} = \sqrt{5} \cdot e^{\pm j \cdot 2.6779}$

La représentation graphique des spectre uni- et bilatéraux est donnée sur la figure 1.11.

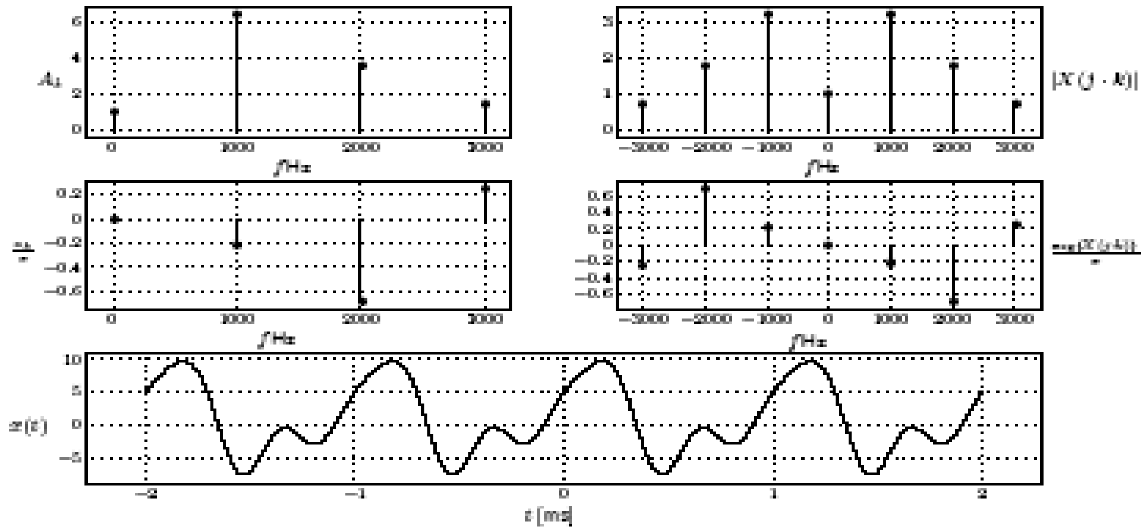

FIG. 1.9 – (fichier source).

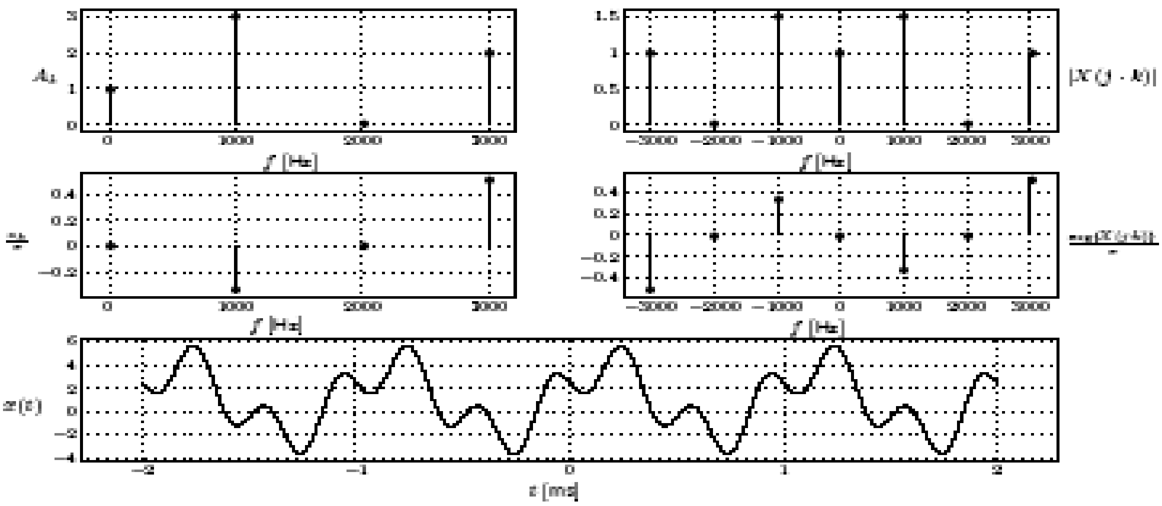

FIG. 1.10 – (fichier source).

Exercice 05 :

Calculer les énergies des trois signaux de l'exercice 04.

Corrigé

$x_1(t)$:

$$\begin{aligned} P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\ &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\ &= 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{5^2+4^2}^2 + \sqrt{(-2)^2+3^2}^2 + \sqrt{1+(-1)^2}^2\right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot [41 + 13 + 2] \\ &= 29\,[\mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

$x_2(t)$:

$$\begin{aligned} P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\ &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot (A_1^2 + A_2^2) \\ &= 1^2 + \frac{1}{2} \cdot [3^2 + 2^2] \\ &= 7.5\,[\mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

$x_3(t)$:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(j \cdot k)|^2 \\ &= |X(j \cdot 0)| + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |X(j \cdot k)|^2 \\ &= 5^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{4^2+3^2}^2 + \sqrt{2^2+1^2}^2\right) \\ &= 85\,[\mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

Exercice 06 :

Considérant le signal $x(t) = 2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$

1. écrivez $x(t)$ dans les formes cosinus et complexe ;
2. donnez les composantes spectrales dans les trois représentations :

$$\{a_k, b_k\} \qquad \{A_k, \alpha_k\} \qquad \{X(j \cdot k)\}$$

3. vérifiez que la puissance de ce signal calculée à l'aide des trois représentations donne le même résultat ;
4. comment calculeriez-vous la puissance dans l'espace temps ? voyez-vous des moyens de simplifier ce calcul ? Si oui, le résultat est immédiat.

Corrigé

1. On a pour la série en cosinus :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \sin(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) + 0.25\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \\ &= 2 + \cos\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.25\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \\ &= A_0 + A_1\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_1) + A_3\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t+\alpha_3) \end{aligned}$$

Partant de la série en cosinus, on obtient facilement la série complexe en faisant usage des formule d'Euler :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 + \cos\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.25\cdot\cos(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t) \\ &= 2 + \frac{1}{2}\cdot e^{+j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t-\frac{\pi}{2}\right)} + 0.25\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{+j\cdot(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)} + 0.25\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot(6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t)} \\ &= X(0) + X(+j\cdot 1)\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(-j\cdot 1)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0} + X(+j\cdot 3)\cdot e^{+j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + X(-j\cdot 3)\cdot e^{-j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \\ &= 2 + \frac{1}{2}\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{+j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \frac{1}{2}\cdot e^{+j\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j\cdot 2\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \frac{0.25}{2}\cdot e^{+j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} + \frac{0.25}{2}\cdot e^{-j\cdot 6\cdot\pi\cdot f_0\cdot t} \end{aligned}$$

2. **Série en cosinus :**

$$\begin{aligned} A_0 &= 2 & & \\ A_1 &= 1 & \alpha_1 &= -\frac{\pi}{2} \\ A_3 &= 0.25 & \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Série de Fourier :

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\cdot A_0 & &= 2\cdot 2 = 4 \\ a_1 &= +A_1\cdot\cos(\alpha_1) & &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ b_1 &= -A_1\cdot\sin(\alpha_1) & &= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ a_3 &= +A_3\cdot\cos(\alpha_3) & &= 0.25\cdot\cos(0) = 0.25 \\ b_3 &= -A_3\cdot\sin(\alpha_3) & &= -0.25\cdot\sin(0) = 0 \end{aligned}$$

Série complexe :

$$\begin{aligned} X(j\cdot 0) &= 2 \\ X(\pm j\cdot 1) &= 0.5\cdot e^{\mp j\cdot\frac{\pi}{2}} \\ X(\pm j\cdot 3) &= 0.125\cdot e^{j\cdot 0} \end{aligned}$$

3. **Série de Fourier :**

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_k^2+b_k^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left[a_1^2+b_1^2+a_3^2+b_3^2\right] \\ &= \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left[0^2+1^2+0.25^2+0^2\right] \\ &= 4.52125\,[\mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

Série en cosinus :

$$\begin{aligned} P &= A_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\ &= 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[A_1^2 + A_3^2\right] \\ &= 2^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[1^2 + 0.25^2\right] \\ &= 4.52125\,[\mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

Série complexe :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|X(j \cdot k)\right|^2 \\ &= \left|X(-j \cdot 3)\right|^2 + \left|X(-j \cdot 1)\right|^2 + \left|X(j \cdot 0)\right|^2 + \left|X(j \cdot 1)\right|^2 + \left|X(j \cdot 3)\right|^2 \\ &= 0.125^2 + 0.5^2 + 2^2 + 0.5^2 + 0.125^2 \\ &= 4.52125\,[\mathrm{V}^2] \end{aligned}$$

4. La puissance dans l'espace temps se calcule comme :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\right]^2 \cdot dt \end{aligned}$$

La fonction à intégrer peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} &\left[2 + (\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))\right]^2 \\ &\quad = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \left(\underbrace{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}_{\int_T = 0} + 0.25 \cdot \underbrace{\cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}_{\int_T = 0}\right) + \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\right)^2 \end{aligned}$$

Pour la somme de sinus au carré, on a :

$$\begin{aligned} &\left(\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\right)^2 \\ &\quad = \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &\quad = \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.5 \cdot \underbrace{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)}_{\frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t + 6\pi \cdot f_0 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t - 6\pi \cdot f_0 \cdot t)} + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \\ &\quad = \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \underbrace{\left(\sin(8 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + \sin(-4 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\right)}_{\int_T = 0} + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \end{aligned}$$

Pour le calcul de la puissance dans le domaine temporel, il suffit donc d'évaluer :

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\right]^2 \cdot dt \\
&= \ldots \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left[2^2 + \sin^2(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + 0.25^2 \cdot \cos^2(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)\right] \cdot dt
\end{aligned}$$

Autrement dit, il suffit de sommer les carrés des valeurs efficaces de 2, $\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$ et $0.25 \cdot \cos(6 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$, soit :

$$P = 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0.25^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4.53125\,[\mathrm{V}^2]$$