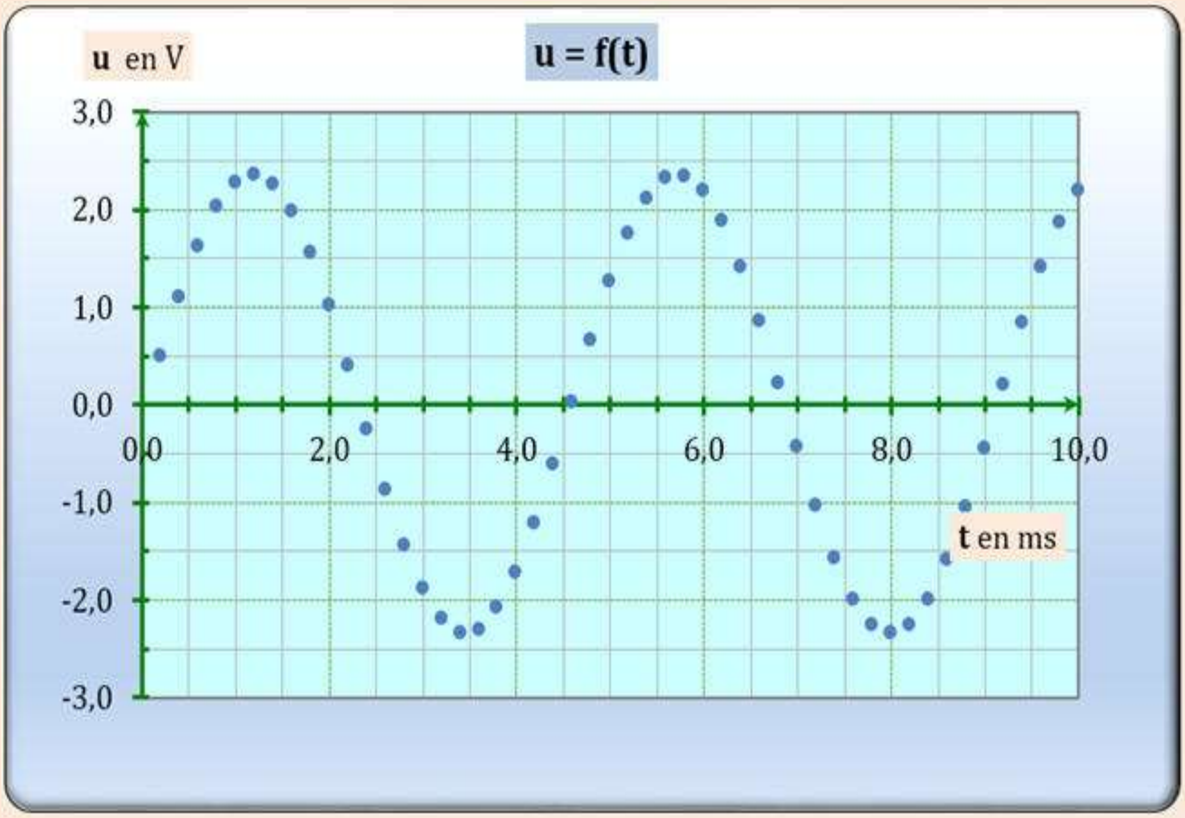
Exercice 01

Un signal sonore converti en signal numérique est représenté ci-dessous :



1)- Déterminer la fréquence **f** du signal sonore étudié.

2)- Échantillonnage :

a)- Définir la fréquence d'échantillonnage f_e.

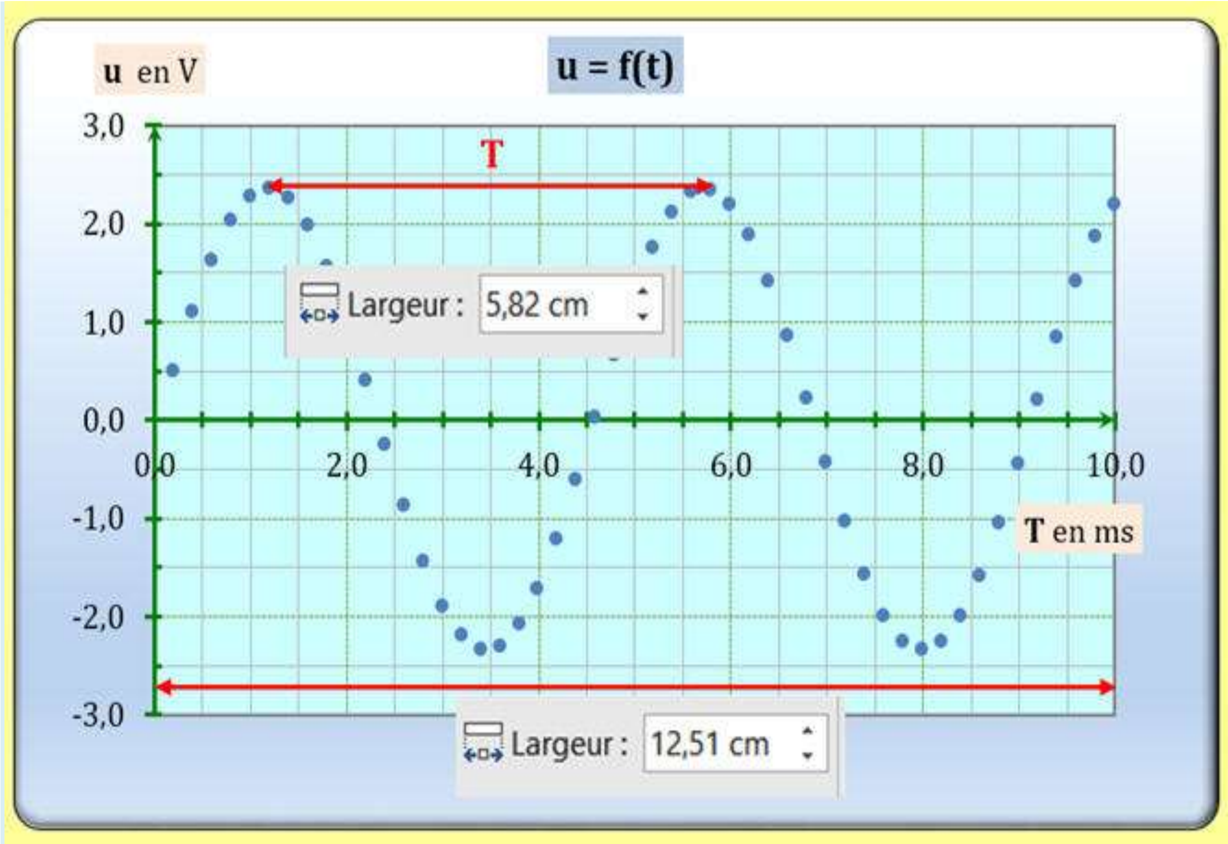
b)- Calculer sa valeur et la comparer à celle de f.

c)- Dans quel sens faut-il faire évoluer le rapport $\frac{f_e}{f}$ pour que le signal numérisé soit le plus fidèle possible au signal réel ?

1)- Fréquence **f** du signal sonore étudié :

- Exploitation graphique :

Solution :



Temps	T	5,82 cm
Distance	10 ms	12,51 cm

- Valeur de la période T :

$$\mathbf{T} = \frac{10 \times 5,82}{12,51}$$

$$\mathbf{T} \approx 4,66 \text{ ms}$$

- Fréquence du signal :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{T}} \approx \frac{1}{4,66 \times 10^{-3}}$$

$$\mathbf{f} \approx 215 \text{ Hz}$$

2)- Échantillonnage :

a)- Définir la fréquence d'échantillonnage $\mathbf{f_e}$.

- La fréquence d'échantillonnage $\mathbf{f_e}$ représente de nombre d'échantillons prélevés par seconde.

b)- Calculer sa valeur et la comparer à celle de **f**.

- Pour une période **T**= 4,66 ms, on dénombre 23 points :

$$f_e \approx \frac{23}{4{,}66\times10^{-3}}$$

- $$f_e \approx 4{,}94\times10^{3}\ \text{Hz}$$

- Comparaison :

- $$\frac{f_e}{f} \approx \frac{4{,}94\times10^{3}}{215} \approx 23$$

- La fréquence d'échantillonnage est 23 fois plus élevée que la fréquence du signal sonore.

c)- Dans quel sens faut-il faire évoluer le rapport $\frac{f_e}{f}$ pour que le signal numérisé soit le plus fidèle possible au signal réel ?

- Si la fréquence d'échantillonnage augmente, le rapport $\frac{f_e}{f}$ augmente et le signal numérisé est plus fidèle au signal sonore réel.
- Le nombre de valeurs de l'échantillon prélevé est plus grand.
- Le signal numérisé est d'autant plus proche du signal analogique que :
- La fréquence d'échantillonnage est grande, la durée entre deux mesures est alors plus faible : quand $\mathbf{f_e} \uparrow$, alors $\mathbf{T_e} \downarrow$.

Exercice 02 :

Afin de pouvoir restituer correctement un son, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins le double de la fréquence de l'harmonique le plus haut de ce son.

La fréquence d'un son audible par l'oreille humaine est comprise entre 20 Hz et 20 kHz.

1)- Quelle fréquence d'échantillonnage minimale faut-il choisir pour numériser correctement un son ?

2)- La fréquence d'échantillonnage standard pour les CD est de 44,1 kHz.

Cette valeur est-elle en accord avec le résultat de la question précédente ?

3)- Les standards d'enregistrement sur CD codent les sons en 16 bits.

Combien de niveaux d'intensité sonore différents peut-on coder ?

4)- Quelle est la durée maximale d'enregistrement disponible sur un CD dont la capacité de stockage est de 700 Mio ? (1 Mio = 2^{20} octets)

Solution :

1)- Fréquence d'échantillonnage minimale pour numériser correctement un son :

- La fréquence d'échantillonnage minimale est le double de la plus haute fréquence audible par une oreille humaine :
- $\mathbf{f_e} = 2\,\mathbf{f} = 40$ kHz

2)- Fréquence d'échantillonnage :

- La valeur de la fréquence d'échantillonnage des CD est : $f'_e = 44{,}1$ kHz.
- $\mathbf{f'_e} > \mathbf{f_e}$
- Cette valeur est en accord avec le résultat de la question 1.

3)- Nombre de niveaux d'intensité sonore différents en codage 16 bits :

- Le signal est codé en 16 bits :
- Le nombre de valeurs possibles est : $2^{16} = 65\,536$.

4)- Durée maximale d'enregistrement disponible sur un CD dont la capacité de stockage est de 700 Mio : (1 Mio = 2^{20} octets)

- Signal sonore échantillonné en qualité CD : 44,1 kHz, 16 bits.
- On considère un signal stéréo (2 voies)
- Chaque seconde : 2 x 16 x 44,1 x10^3 bits = 1,41 Mbits
- Valeur en octet : 1 octet = 8 bits
- Pour une seconde de son échantillonné à 44,1 kHz : 176 ko.
- 700 Mio = 700 x 2^{20} = 734 Mo
- Durée maximale :

$$\mathbf{d} = \frac{734\times10^{6}}{176\times10^{3}}$$

$$\mathbf{d} \approx 4{,}17\times10^{3}\ \text{s}$$

$$\mathbf{d} \approx 1\ \text{h}\ 9\ \text{min}\ 30\ \text{s}$$

-
- Pour un enregistrement stéréo.
- Ou 2 h 19 min pour un enregistrement mono.

Exercice 03 :

Pour l'équipement des salles de physique du lycée, on a besoin de mesurer des tensions allant de 0 à 4,5 V à 10 mV près.

Une carte d'acquisition trouvée dans le commerce contient un CAN 8 bits et a pour calibre 0,0 – 5,0 V.

1)- Déterminer le pas **p** du convertisseur de ce modèle.

2)- Ce modèle correspond-il aux besoins du lycée ?

3)- Quel doit-être le minimum de bits du CAN pour que sa précision soit suffisante ?

Donnée :

$$\mathbf{p} = \frac{\text{plage de mesure}}{2^{\mathbf{n}}}$$

, avec **n** le nombre de bits du convertisseur.

Coup de pouce : $\text{si } \mathbf{b}^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}, \text{ alors } \mathbf{n} = \dfrac{\ln \mathbf{c}}{\ln \mathbf{b}}$

Solution :

4)- Pas **p** du convertisseur de ce modèle :

- $$\mathbf{p} = \frac{\text{plage de mesure}}{2^{\mathbf{n}}} = \frac{5{,}0}{2^{8}}$$
$$\mathbf{p} \approx 2{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{V}$$
$$\mathbf{p} \approx 20\ \mathrm{mV}$$

5)- Ce modèle correspond-il aux besoins du lycée ?

- Ce modèle ne convient pas car il faut une résolution de 10 mV.
- Pour une séance de TP, la précision n'est pas suffisante.
- La résolution du convertisseur CAN est de 20 mV.

6)- Nombre minimum de bits du CAN pour que sa précision soit suffisante :

- La résolution doit être inférieure ou égale à 10 mV.
- On connait la page de valeur : 5,0 V
- On choisit un pas p ≤ 10 mV et n représente le nombre de bits.
- On doit résoudre :

- $$\frac{5,0}{2^n} = 10\times10^{-3} \Rightarrow 2^n = \frac{5,0}{10\times10^{-3}} \Rightarrow 2^n = 5,0\times10^2$$
- On utilise la relation : $\text{si } \mathbf{b}^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}, \text{ alors } \mathbf{n} = \frac{\ln \mathbf{c}}{\ln \mathbf{b}}$
- $$2^n = 5,0\times10^2 \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\ln\left(5,0\times10^2\right)}{\ln(2)}$$ $\mathbf{n} \approx 9$
- Le convertisseur CAN doit comporter au moins 9 bits.

Exercice 04 :

De nombreuse communications transitent par le réseau téléphonique.

Ce dernier étant majoritairement numérisé, les centraux téléphoniques n'échangent plus un signal électrique engendré par la parole, mais des échanges de ce signal prélevés 8000 fois par seconde.

Chaque échantillon est ensuite codé sur 8 bits.

1)- Rappeler les principales étapes de la numérisation d'un signal.

2)- Déterminer la fréquence d'échantillonnage utilisée par les centraux téléphoniques.

3)- Combien de niveaux d'intensité sonore peut-on obtenir avec le codage proposé ?

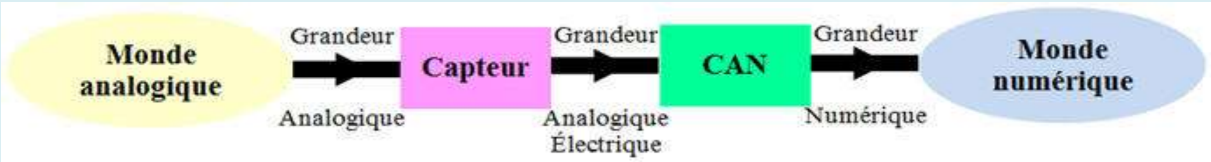
4)- Combien d'informations une ligne téléphonique doit-elle transporter par seconde pour transmettre la parole d'un usager ? Le résultat sera donné en kibibit par seconde (Kibit . s^{-1})

Donnée : 1 Kibit = 2^{10} bits.

Solution :

1)- Les principales étapes de la numérisation d'un signal.

- La numérisation du signal :
- Il désigne le procédé qui permet de passer d'un signal analogique à un signal numérique.



- Les étapes principales de toute conversion analogique-numérique sont :

- L'échantillonnage,
- La quantification,
- Et le codage.

► L'échantillonnage :

- Le convertisseur analogique-numérique prélève des échantillons du signal analogique à intervalles de temps T_e égaux appelés période d'échantillonnage.
- La fréquence d'échantillonnage f_e est le nombre de prélèvements effectués par seconde (nombre de mesures effectuées par seconde).
- Elle définit le nombre de valeurs prélevées au signal analogique par seconde.

► La quantification :

- L'échantillonnage consiste à prélever certaines valeurs d'une fonction continue.
- On ne va retenir que les valeurs selon un certain pas p de quantification.
- La quantification consiste à affecter une valeur numérique à chaque échantillon prélevé.
- Chaque valeur est arrondie à la valeur permise la plus proche par défaut.

► Le codage :

- La valeur permise est codée par un nombre binaire.
- Les valeurs numérisées vont être stockées sous forme de bits.
- La qualité de la conversion analogique-numérique, ou numérisation, est d'autant plus grande que le pas p du convertisseur est petit et que la fréquence f_e d'échantillonnage est élevée.

2)- Fréquence d'échantillonnage utilisée par les centraux téléphoniques.

- Prélèvement du signal : 8000 fois par seconde.
- $\mathbf{f_e} = 8{,}0 \times 10^3$ Hz

3)- Nombre de niveaux d'intensité sonore obtenu avec le codage proposé :

- Chaque échantillon est codé à 8 bits :
- Le nombre de valeurs prélevées est : $2^8 = 256$.

4)- Nombre **N** d'informations transportées par seconde :

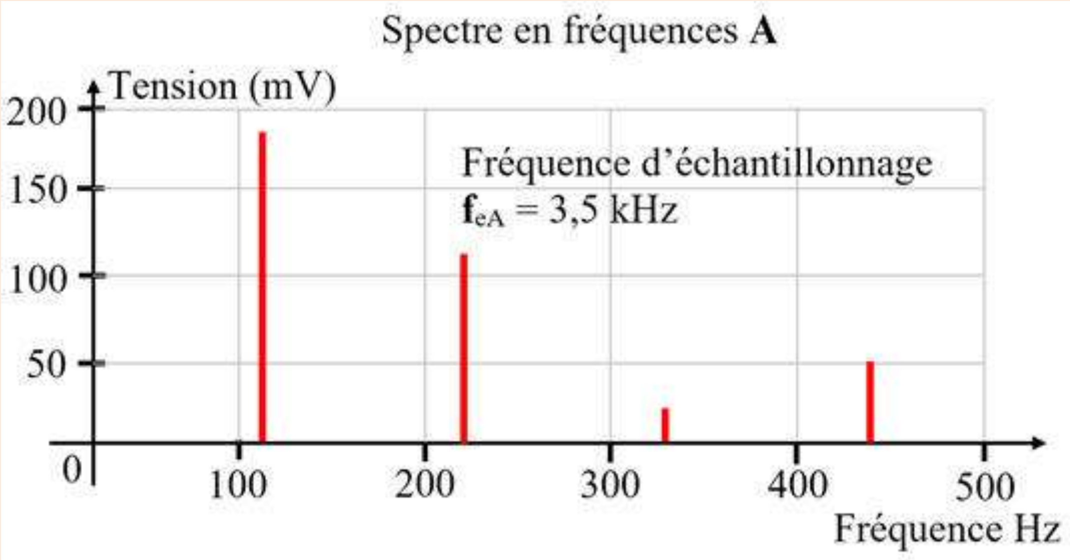
- Signal sonore échantillonné à une fréquence de 8,0 kHz et de codage 8 bits :
- $\mathbf{N} = 8 \times 8000$
- $\mathbf{N} = 64$ kbits / s
- Avec : 1 Kibit = 2^{10} bits
- $$\mathbf{N} = \frac{6{,}4\times 10^4}{2^{10}}$$ $$\mathbf{N} \approx 62{,}5 \text{ Kibits/s}$$

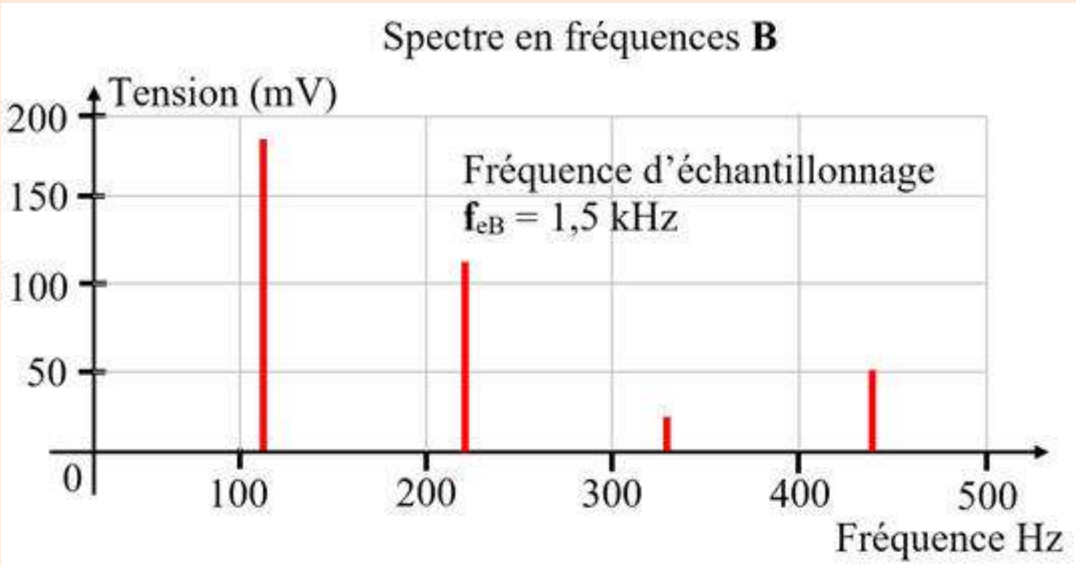
Exercice 05 :

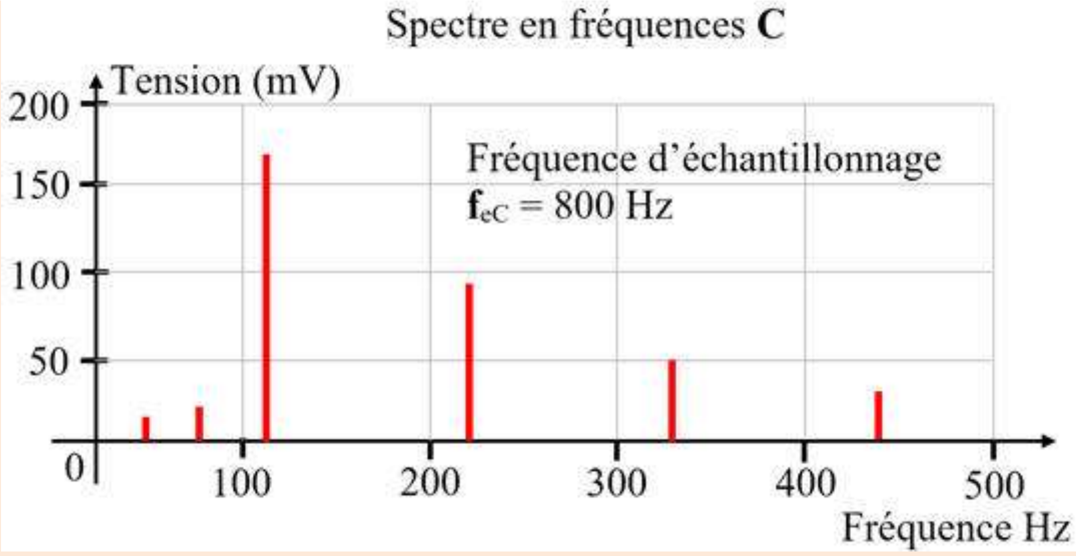
Un instrument de musique joue un **La**$_1$ de fréquence $\mathbf{f_1}$ = 110 Hz.

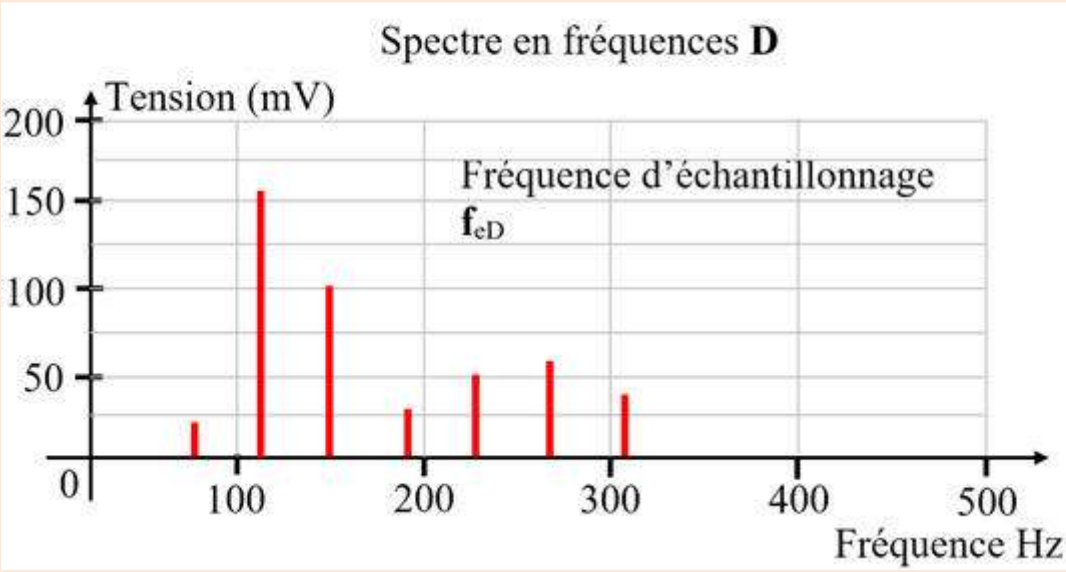
On réalise quatre numérisations (A, B, C et D) en changeant uniquement la fréquence d'échantillonnage $\mathbf{f_e}$.

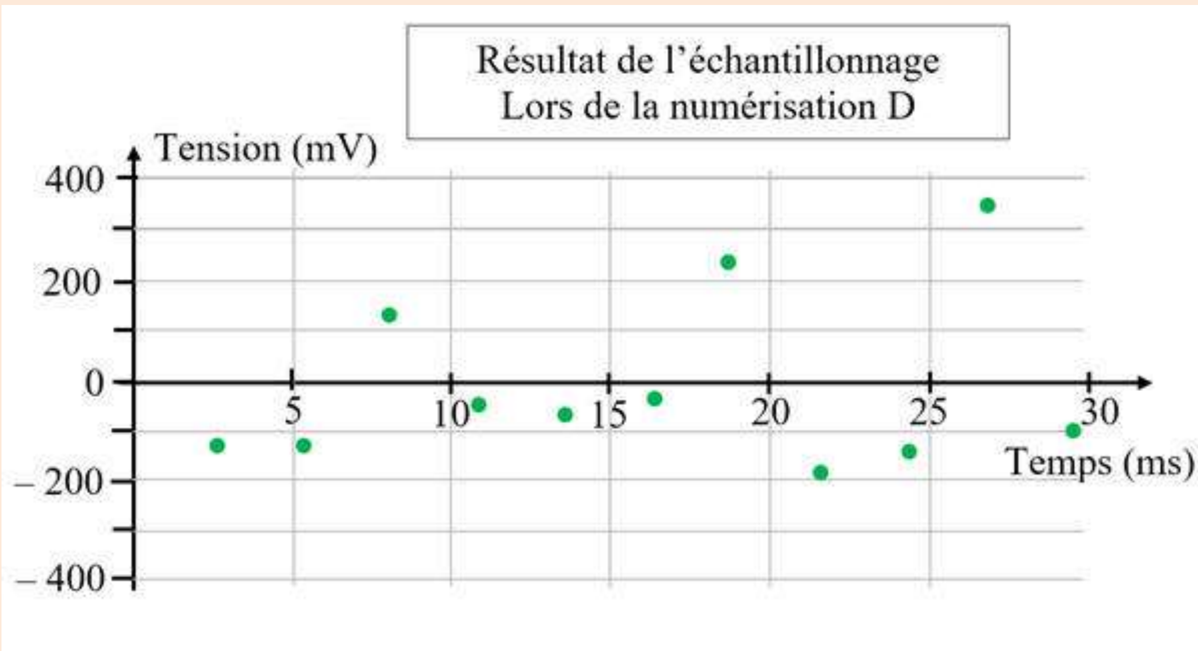
Les spectres en fréquence obtenus sont représentés ci-dessous.






Spectre en fréquences **C**
Tension (mV)
200
150
100
50
0
Fréquence d'échantillonnage
f_{eC} = 800 Hz
100
200
300
400
500
Fréquence Hz


Spectre en fréquences **D**
Tension (mV)
200
150
100
50
0
Fréquence d'échantillonnage
f_{eD}
100
200
300
400
500
Fréquence Hz


Résultat de l'échantillonnage
Lors de la numérisation D
Tension (mV)
400
200
0
– 200
– 400
5
10
15
20
25
30
Temps (ms)

Le dernier graphe montre le résultat de l'échantillonnage lors de la numérisation **D**.

D'après le **critère de Shannon**, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois égale à la fréquence de l'harmonique de rang le plus élevé contenu dans le son à numériser pour ne pas altérer le signal.

On considère que la numérisation **A** est très fidèle au son émis par l'instrument.

1)- Quelle est la fréquence d'échantillonnage utilisée lors de la numérisation **D**.

2)- Quelle est la fréquence **f** de l'harmonique de rang le plus élevé contenu dans la note **La**$_1$ joué par cet instrument ?

3)- Fréquence d'échantillonnage.

a)- Comparer la fréquence d'échantillonnage à **f** pour cette numérisation.

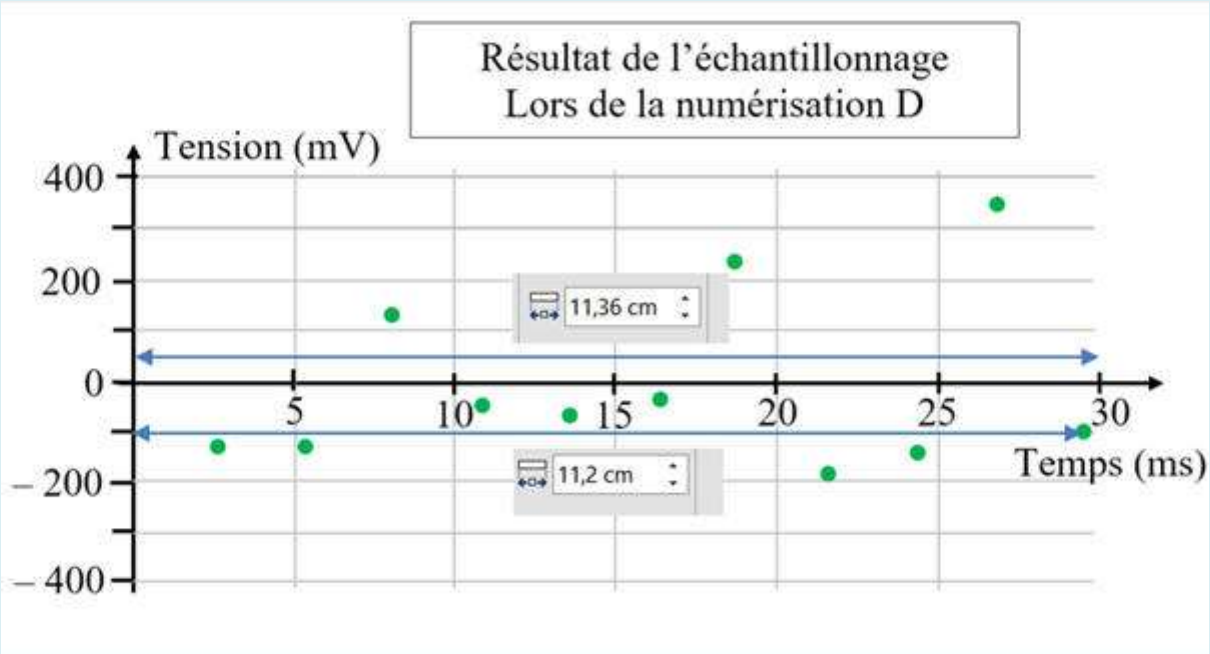
b)- Le critère de Shannon est-il vérifié ?

4)- Est-il nécessaire d'augmenter indéfiniment la fréquence d'échantillonnage pour améliorer la numérisation du son ?

Solution

1)- Fréquence d'échantillonnage utilisée lors de la numérisation D.

- Exploitation du graphe :



- Tableau :

Durée	30 ms	11 T_e

Distance	11,36 cm	11,2 cm

- La période d'échantillonnage

$$T_e = \frac{30 \times 11,2}{11,36 \times 11}$$
$$T_e \approx 27 \text{ ms}$$

- La fréquence d'échantillonnage de la numérisation D :

$$f_e = \frac{1}{T_e} \approx \frac{1}{2,7 \times 10^{-3}}$$
$$f_e \approx 3,7 \times 10^{2} \text{ Hz}$$

2)- Fréquence **f** de l'harmonique de rang le plus élevé contenu dans la note **La**$_1$ joué par cet instrument :

- La fréquence **f** de l'harmonique de rang le plus élevé :
- D'après l'exploitation des spectres A et B :
- $\mathbf{f} = 4\ \mathbf{f}_1 = 440$ Hz

3)- Fréquence d'échantillonnage.

a)- Comparaison de la fréquence d'échantillonnage à **f** pour cette numérisation.

- Numérisation A :

$$\frac{f_e}{f} = \frac{3,5 \times 10^{3}}{440} \approx 8,0$$

- On remarque que **f** > 2 **f**$_e$. Le signal sonore sera bien restitué.
- Numérisation B :

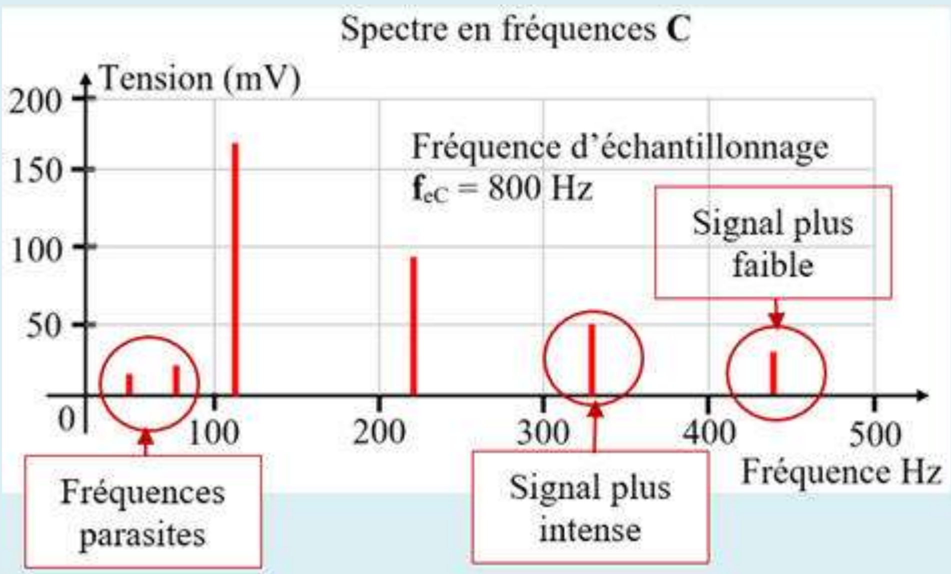
$$\frac{f_e}{f} = \frac{1,5 \times 10^{3}}{440} \approx 3,4$$

- On remarque que **f** > 2 **f**$_e$. Le signal sonore sera bien restitué.
- Numérisation C :

$$\frac{f_e}{f} = \frac{800}{440} \approx 1,8$$

- On remarque que **f** < 2 **f**$_e$. Le signal sonore ne sera pas bien restitué.
- Il subit des altérations.
- Il apparaît des fréquences parasites.

- L'harmonique la plus élevée perd de l'amplitude, alors que l'harmonique 3 **f** = 330 Hz a une amplitude plus grande.



- Numérisation **D** :

$$\frac{f_e}{f} = \frac{370}{440} \approx 0,84$$

- On remarque que $f < f_e$.
- Le signal sera très mal restitué.

b)- Le critère de Shannon est-il vérifié ?

- Le critère de Shannon n'est pas vérifié.

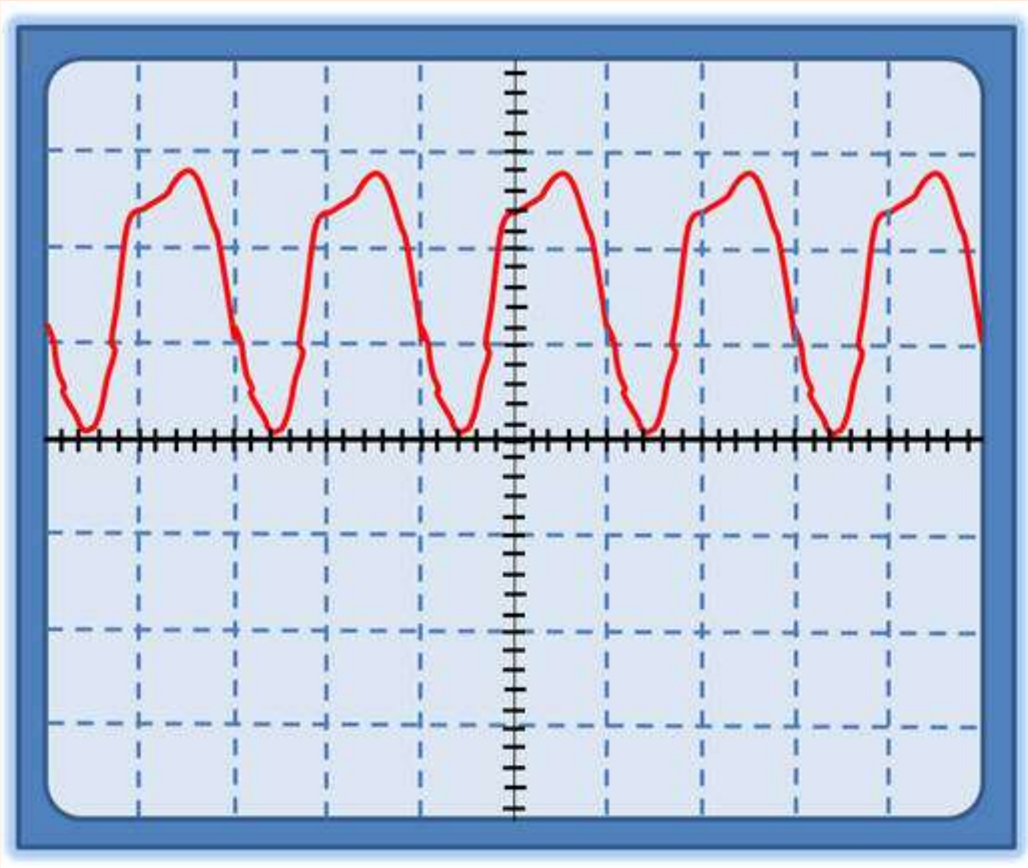
4)- Est-il nécessaire d'augmenter indéfiniment la fréquence d'échantillonnage pour améliorer la numérisation du son ?

- Le critère de Shannon est vérifié pour les numérisations **A** et **B**.
- On remarque que les deux spectres en fréquences **A** et **B** sont identiques.
- Dans les deux cas, le son sera fidèle au son émis.
- Pourtant, $f_{eB} < f_{eA}$.
- Dans le cas présent, il n'est pas nécessaire de prendre une fréquence d'échantillonnage très élevée.
- La qualité de la numérisation ne sera pas meilleure.
- Le critère de Shannon n'est pas vérifié pour les numérisations **C** et **D**.
- Dans ces deux cas la qualité de la numérisation est mauvaise et le signal ne sera pas fidèle au son émis.
- Il n'est pas nécessaire d'augmenter indéfiniment la fréquence d'échantillonnage puisque l'oreille humaine ne peut déceler les fréquences des harmoniques supérieures à 20 kHz.
- Dans le cas présent une fréquence d'échantillonnage f_e = 1,5 kHz suffit.
- Car au plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, au plus la taille du fichier sera grande.

- Il faut prendre la fréquence d'échantillonnage suffisante pour avoir une bonne numérisation et un fichier de taille acceptable.

Exercice 06 :

Le signal électrique correspondant à un son musical affiché sur l'écran d'un oscilloscope analogique est reproduit ci-dessous.



Sensibilité verticale : 1,0 V / div

Sensibilité horizontale : 2,0 ms / div.

Donnée : pas : $p = \frac{\text{plage de mesure}}{2^n}$, avec **n** le nombre de bits du convertisseur.

1)- La fréquence d'échantillonnage étant de 1,0 kHz, quelle est la durée séparant deux mesures consécutives ?

2)- Le CAN :

a)- Le CAN étant de 6 bits avec une plage de mesure de 0,00 V à 10,0 V, calculer le pas du convertisseur.

b)- Indiquer les huit premières valeurs que peut quantifier le convertisseur à partir de 0,00 V.

3)- La date **t** = 0 correspond au bord gauche de l'écran de l'oscilloscope. Reproduire et compléter le tableau suivant :

- On donne : Sensibilité verticale : 1,0 V / div
- Sensibilité horizontale : 2,0 ms / div.

	t (ms)	0	1	2	3
Tension analogique	$\mathbf{U}_a$				
Tension numérique	$\mathbf{U}_n$				

4)- En utilisant les échelles de représentation suivantes :

- 1 cm → 2 ms et 1 mm → pas de résolution
- Représenter le signal numérique.

Exercice 07 :

On désire numériser le signal vocal suivant, dont l'amplitude est comprise entre -8 volts et +8 volts. Ce signal est préalablement filtré par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure fc = 10 kHz. La quantification est effectuée sur 8 bits.

Solution :

1)- Durée séparant deux mesures consécutives :

- La fréquence d'échantillonnage est **f** = 1,0 kHz
- On en déduit la période **T** d'échantillonnage :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mathbf{f}} = \frac{1}{1{,}0 \times 10^{3}}$$

- $$\mathbf{T} \approx 1{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 1{,}0\ \mathrm{ms}$$

2)- Le CAN :

a)- Pas du convertisseur :

- Le CAN étant de 6 bits avec une plage de mesure de 0,00 V à 10,0 V,
- Pour un signal analogique variant entre 0,00 V et 10,0 V et codé en 6 bits :
- on aura 2^6 = 64 valeurs possibles.
- Le pas du convertisseur est donné par la relation suivante :

$$\mathbf{p} = \frac{\text{plage de mesure}}{2^{n}} = \frac{10}{64}$$

- $$\mathbf{p} \approx 0{,}156\ \mathrm{V}$$

b)- Les huit premières valeurs que peut quantifier le convertisseur à partir de 0,00 V.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de la tension en volt (V)	0	0,156	0,313	0,469	0,625	0,781	0,938	1,09

3)- Tableau de valeurs :

- On visualise les différents points retenus du signal analogique en jaune.
- Points de la courbe obtenue après échantillonnage à la période **T**.

t (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

U_a (V)	1,2	0,0	2,4	2,7	1,2	0,0	2,4	2,7	1,2
U_n (V)	1,09	0,00	2,34	2,66	1,09	0,00	2,34	2,66	1,09

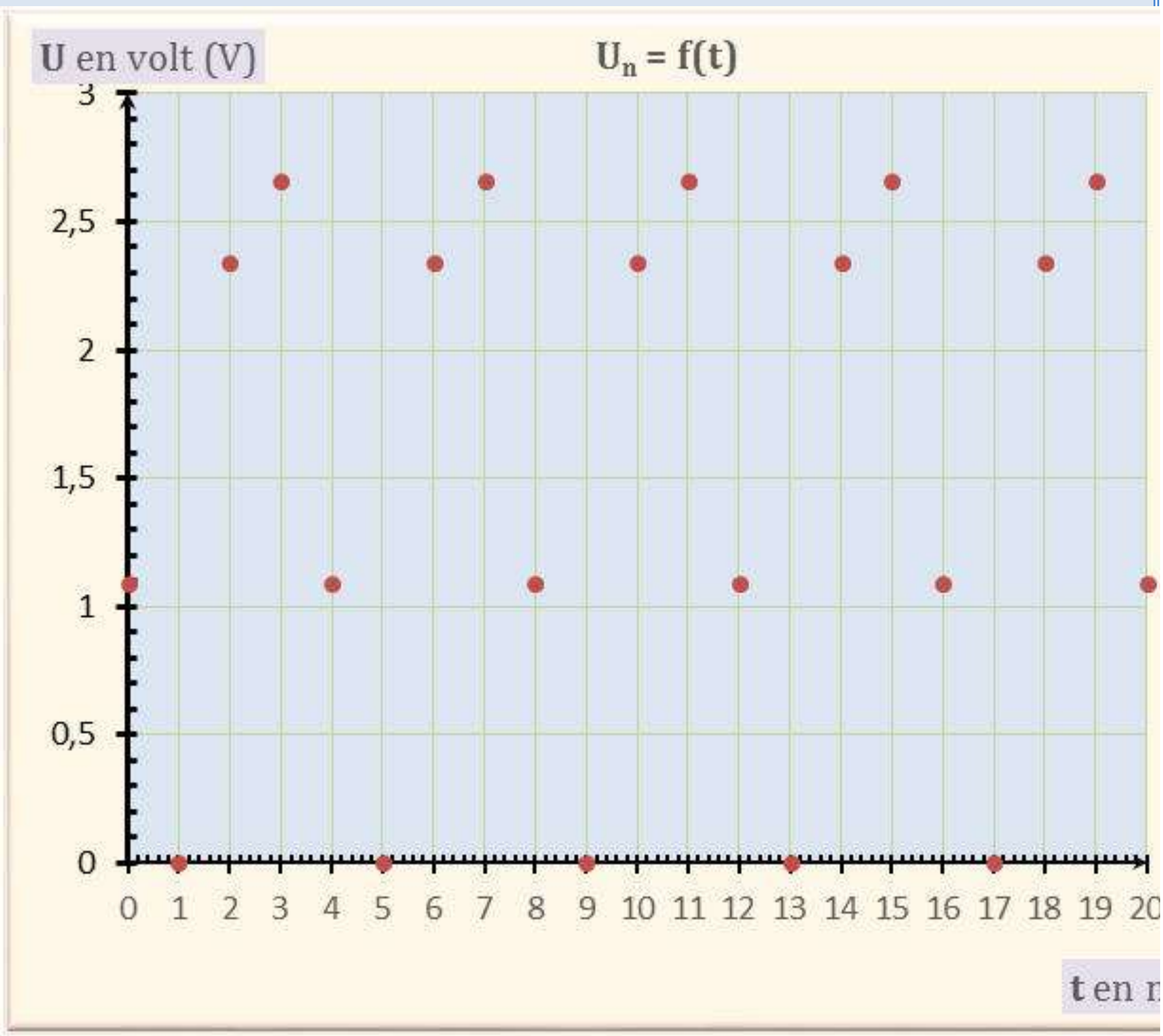
4)- Signal numérique :

- Les échelles :
- En abscisse :1 cm → 2 ms
- En ordonnée : 1 mm → pas de résolution
- Représentation graphique du signal numérique :
- Tableau de valeurs :

t (ms)	**U_a**	**U_n**
0	1,2	1,09
1	0	0
2	2,4	2,34
3	2,7	2,66
4	1,2	1,09
5	0	0
6	2,4	2,34
7	2,7	2,66
8	1,2	1,09
9	0	0
10	2,4	2,34
11	2,7	2,66
12	1,2	1,09
13	0	0
14	2,4	2,34

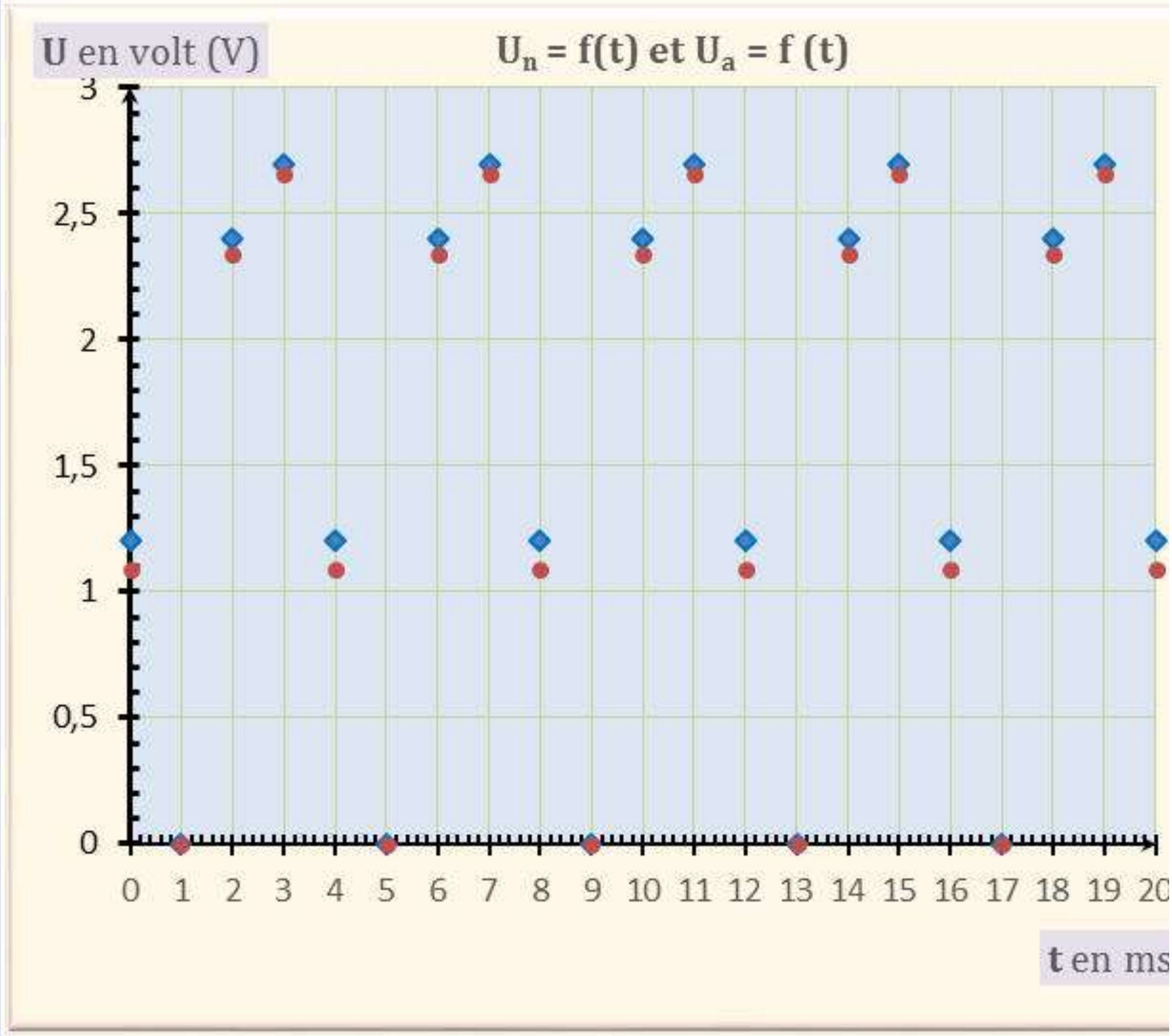
15	2,7	2,66
16	1,2	1,09
17	0	0
18	2,4	2,34
19	2,7	2,66
20	1,2	1,09

Graphe N° 1



Valeurs du signal numérique après quantification

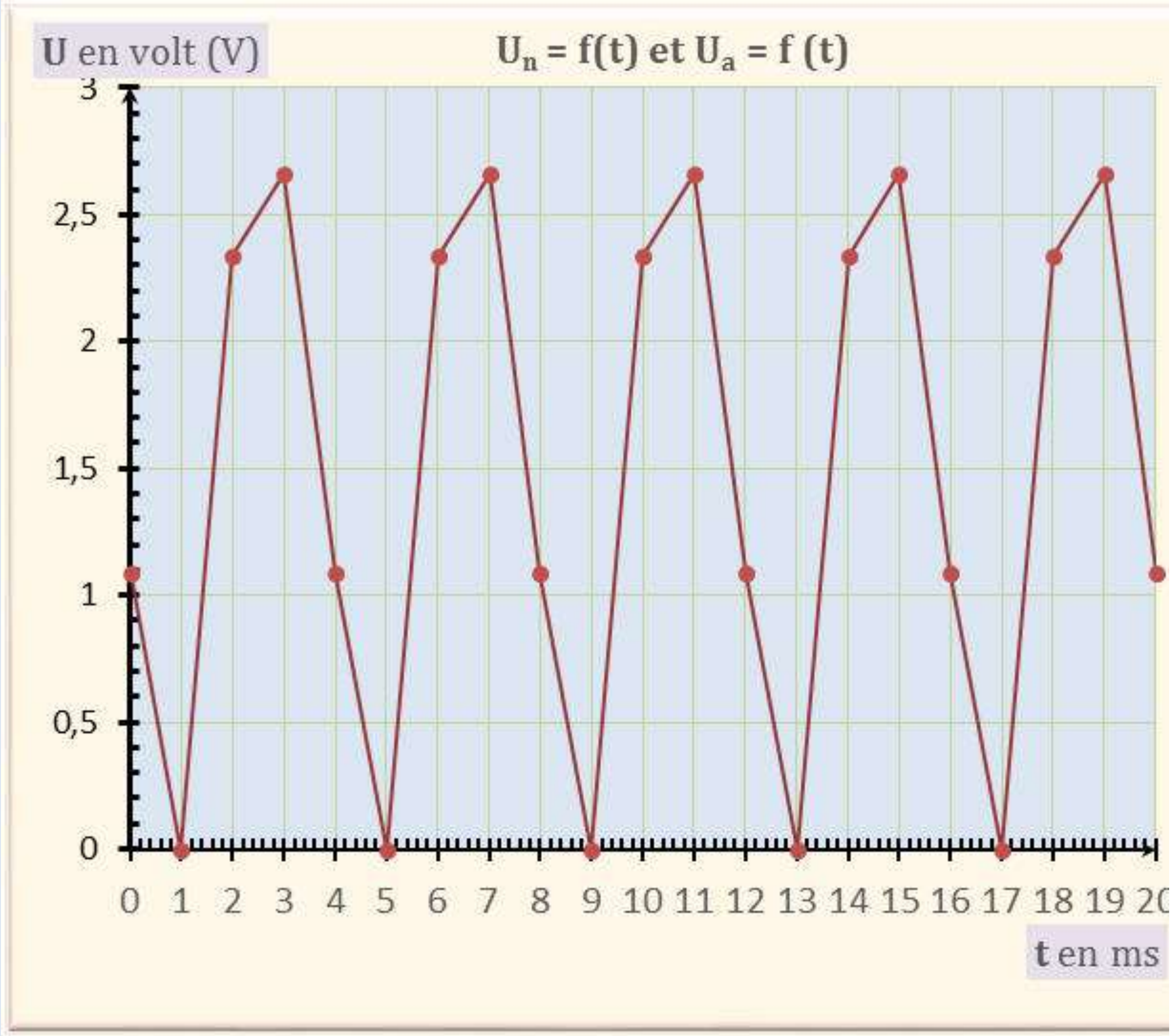
Graphe N° 2



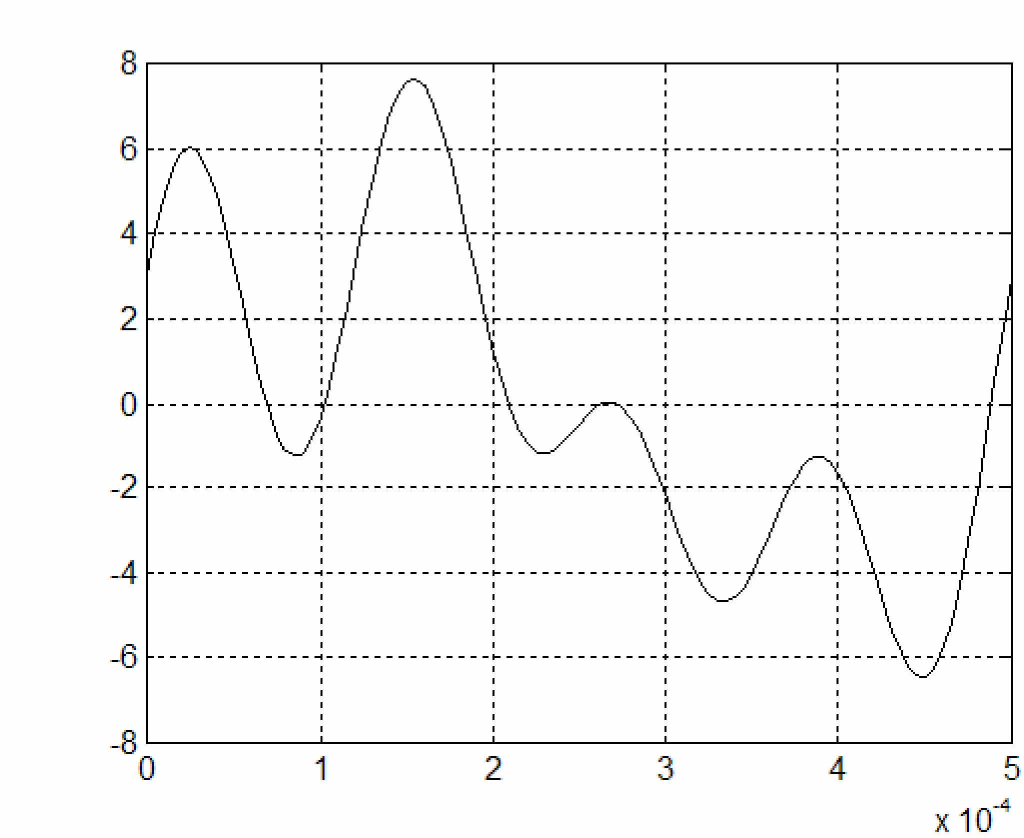
Comparaison des valeurs analogiques et numériques.

- Le signal analogique a été quantifié.
- Le signal numérique ne peut prendre que certaines valeurs discrètes.
- Autre représentation : allure du signal numérique

Graphe N° 3



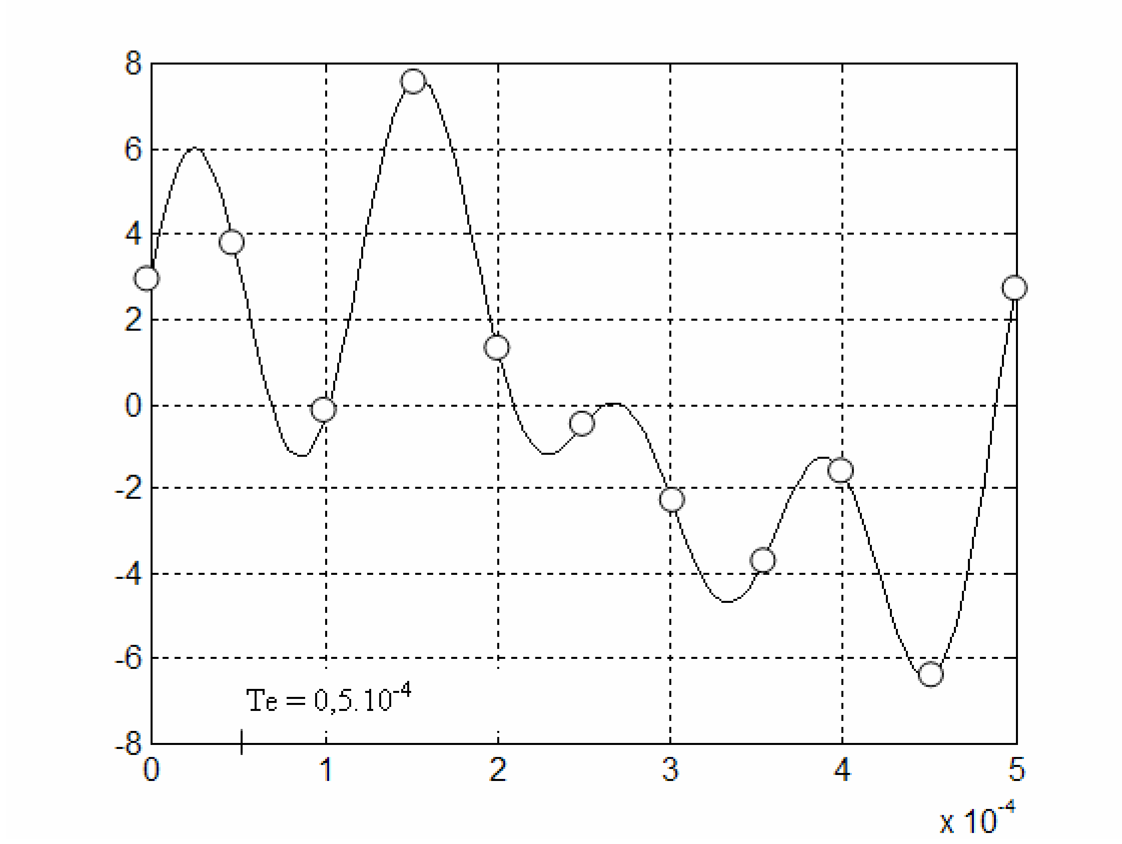
Allure du signal numérique après échantillonnage et quantification



1. Proposer une valeur pour la fréquence d'échantillonnage, et représenter les échantillons prélevés sur le signal analogique.
2. Quel est le volume du fichier correspondant à 5 secondes de ce signal ?
3. Quel est le pas de quantification ?
4. Donner les valeurs binaires des quatre premiers échantillons si la quantification est en PCM.
5. Quel gain peut on obtenir sur le volume si l'on passe maintenant à une quantification ADPCM.
6. Quelle est la valeur maximale du bruit de quantification ?

Solution :

1. Le signal ayant été filtré à 10 kHz, on peut l'échantillonner au minimum à deux fois cette fréquence pour respecter le théorème de Shannon. On peut donc prélever 20 000 échantillons par seconde, soit un échantillon toutes les 50 us.



2. Le volume est de : 8x20000x5 = 800 000 bits soit 100 000 octets soit 97,6 ko
3. La quantification étant sur 8 bits, il y a 256 combinaisons, le pas de quantification est de 16volts/2^8 = 0,0625
4. On dispose de 8 bits pour quantifier, soit 128 combinaisons pour les échantillons positifs (premier bit à 0) et autant pour les échantillons négatifs (premier bit à 1).
    - Le premier échantillon vaut 3 volts , il correspond donc au 3/0,0625 ème code soit 48. en binaire on obtient donc sur 8 bits 00110000.
    - Le deuxième échantillon vaut 4 volts , il correspond donc au 4/0,0625 ème code soit 64. en binaire on obtient donc sur 8 bits 01000000.
    - Le troisième échantillon vaut 0 volts , il correspond donc au code 0. en binaire on obtient donc sur 8 bits 00000000.
    - Le quatrième échantillon vaut 7,5 volts , il correspond donc au 7,5/0,0625 ème code soit 120. En binaire on obtient donc sur 8 bits 01111000.
5. La quantification ADPCM permet d'obtenir une qualité similaire pour un codage sur 4 bits. Le volume va donc être divisé par deux.
6. Le bruit de quantification est au maximum égal à la moitié du pas de quantification soit 0,03125 volts.

Exercice 08:

Considérant un signal dont le spectre est représenté à la figure 3.1, déterminez la fréquence d'échantillonnage minimum pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral. Admettant $f_e = 16\,[\mathrm{kHz}]$,

1. dessinez le spectre du signal échantillonné pour f compris entre $\pm 16\,[\mathrm{kHz}]$;
2. que faut-il faire pour éviter le recouvrement spectral ?
3. dessinez le nouveau spectre ; quel en est l'avantage ?

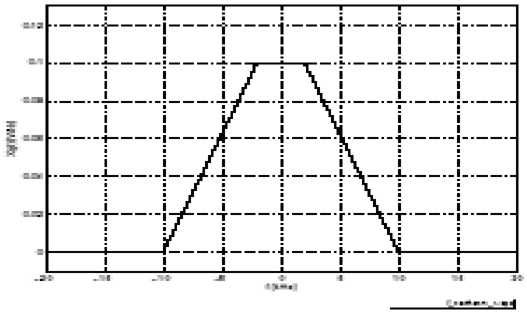


FIG. 3.1 – Exercice 1 (fichier source).

Solution :

On constate que le spectre proposé est borné par $f_{max} = 10\,[\mathrm{kHz}]$; la fréquence d'échantillonnage devrait donc être supérieure à $2 \cdot f_{max} = 20\,[\mathrm{kHz}]$.

1. Cependant, comme on propose $f_e = 16\,[\mathrm{kHz}]$, il y aura inévitablement du recouvrement spectral pour $f > f_e - f_{max} = 6\,[\mathrm{kHz}]$.
2. En filtrant analogiquement le signal temporel avant de l'échantillonner, on pourra supprimer les fréquences supérieures à $f_N = \frac{f_e}{2} = 8\,[\mathrm{kHz}]$ et éviter ainsi tout recouvrement jusqu'à la fréquence de Nyquist f_N.
3. On a ainsi gagné $2\,[\mathrm{kHz}]$ de bande passante non perturbée par le recouvrement spectral.

Exercice 09 :

Considérant le signal analogique

$$x_a(t) = 2\cdot\cos(100\cdot\pi\cdot t) + 5\cdot\sin\left(250\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{6}\right) - 4\cdot\cos(380\cdot\pi\cdot t) + 16\cdot\sin\left(600\cdot\pi\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

1. quelle valeur minimum faut-il choisir pour f_e si l'on veut respecter le théorème d'échantillonnage ?
2. soit $f_e = 3\cdot f_{e\,\min}$, esquissez les spectres d'amplitudes et de phases du signal $x_e(t)$.

Solution :

1. Ce signal comporte quatre composantes spectrales situées en $f = 50,\ 125,\ 190,\ 300$ [Hz]. La fréquence d'échantillonnage devra donc valoir au moins $2\cdot f_{\max} = 600$ [Hz].
2. En choisissant $f_e = 3\cdot f_{e,\min} = 1800$ [Hz], il n'y aura pas de recouvrement spectral. Dans la bande de base, il n'y aura donc pas d'autres raies spectrales que celles données au point 1.

Exercice 10 :

Un signal analogique

$$x_a(t) = \cos(2\cdot\pi\cdot 240\cdot t) + 3\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot 540\cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

est échantillonné à raison de 600 échantillons par seconde.

1. que vaut la fréquence de Nyquist $f_N = \frac{f_e}{2}$?
2. si elles existent, que valent les fréquences repliées f_r ?
3. si $x[n]$ est restitué à l'aide d'un convertisseur NA suivi d'un filtre passe-bas idéal tel que $f_c = \frac{f_e}{2}$, que vaut le signal reconstruit $y_a(t)$?

Solution :

1. Comme l'on a $f_e = 600$ [Hz], la fréquence de Nyquist vaut $f_N = \frac{f_e}{2} = 300$ [Hz]. On constate que le théorème d'échantillonnage n'est pas respecté et qu'il y aura du recouvrement spectral.

2. Les fréquences repliées vaudront $f_r = \pm f_e \pm f_{max} = \pm 600 \pm 540 = \pm 60$ [Hz] dans la bande de base. Le cosinus de fréquence 540 [Hz] sera donc perçu comme un cosinus de fréquence 60 [Hz].
3. Le signal reconstruit et suivi d'un filtre passe-bas idéal vaudra donc

$$y_a(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 240 \cdot t) + 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Le changement de signe de la phase provient du fait que la composante +60 [Hz] est due à la raie −540 [Hz] dont la phase vaut $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 11 :

Un signal $x(t)$ sinusoïdal d'amplitude $A = 10$ [V] de fréquence $f = 1$ [kHz] est échantillonné très rapidement (à 1 [MHz], par exemple) à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique 4 bits travaillant entre + et −10 [V].

1. esquissez les signaux $x(t)$, $x_e[n]$, $x_q(t)$;
2. esquissez l'erreur de quantification $e(t)$;
3. quelle est la valeur efficace de ce bruit de quantification ?
4. que vaut le SNR ?

Solution

1. Voir figure 3.2 page suivante
2. Voir figure 3.2 page suivante
3. Selon le cours, la puissance du bruit de quantication est donnée par :

$$P_Q = \frac{Q^2}{12}$$

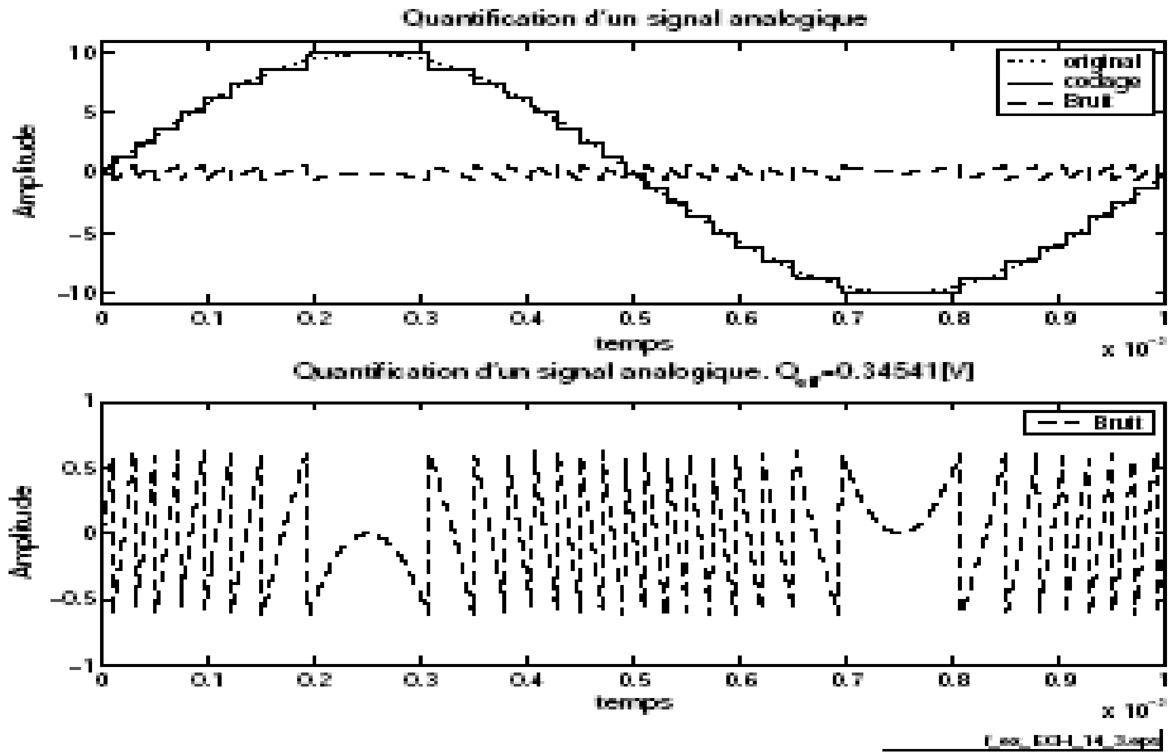


FIG. 3.2

La valeur efficace du bruit est par définition :

$$Q_{eff} = \sqrt{P_Q} = \frac{Q}{\sqrt{12}}$$

En tenant compte des valeurs numérique, on a :

$$\begin{aligned} Q_{eff} &= \frac{Q}{\sqrt{12}} = \frac{\frac{U_{max}}{2^{n-1}}}{\sqrt{12}} \\ &= \frac{\frac{10\,[V]}{2^{4-1}}}{\sqrt{12}} \\ &= 0.3608 \end{aligned}$$

A noter que si l'on calcule effectivement la puissance de $e(t)$ puis sa valeur efficace sur la base de ses valeurs numériques successives telles qu'elles apparaissent sur la figure 3.2 page ci-contre par la formule

$$P_x = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) \cdot dt \longrightarrow P_x \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

on obtient $P_Q = 0.1193$ et donc

$$Q_{eff} = \sqrt{P_Q} = 0.3454$$

qui est très proche de la valeur calculée plus haut.

4. Le rapport signal-sur-bruit (SNR) se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \mathrm{SNR} &= \frac{X_{eff}}{Q_{eff}} \\ &= \frac{\frac{10\,[V]}{\sqrt{2}}}{0.3608\,[V]} \\ &= 18.56 \\ &= 25.37\,[\mathrm{dB}] \end{aligned}$$

Exercice 12:

Considérant un signal carré à valeur moyenne nulle de période $T_0 = 1$ [ms] et d'amplitude $A = 1$[V] que l'on échantillonne à la fréquence $f_e = 9.8$ [kHz], on demande :

1. Quelles sont les fréquences et amplitudes des raies spectrales du signal analogique ? Esquissez le spectre d'amplitudes.
2. Quelle est la largeur de la bande de base ? Quelles sont les composantes spectrales réelles présentes dans la bande de base ?
3. Quelles sont les fréquences apparentes d'ordre $n \in [0, \ldots, 15]$ présentes dans la bande de base ?
4. Quelles sont les amplitudes de chacune de ces raies ?
5. Les résultats de l'analyse spectrale sont donnés dans la figure 3.4 ; associez les numéros des composantes spectrales théoriques aux raies spectrales obtenues après échantillonnage.

Solution :

1. Le spectre d'un signal carré d'amplitude A est décrit par

$$X(j \cdot k) = A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t)}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t} = \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair ou } k = 0 \\ \pm\frac{A}{k \cdot \pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

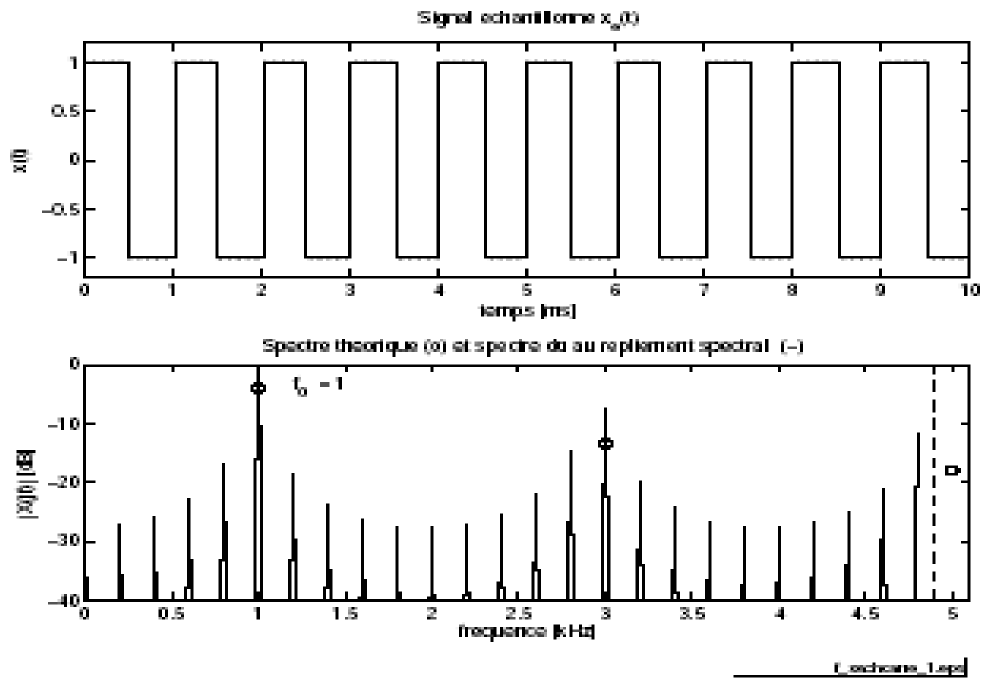


FIG. 3.3 – Echantillonnage et repliement spectral pour un signal carré (fichier source).

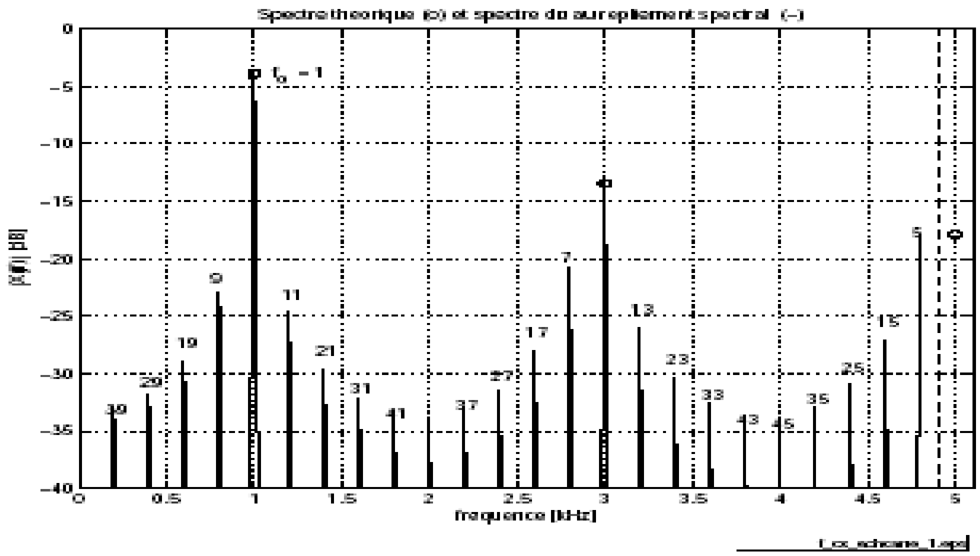


FIG. 3.4 – Repliement spectral pour un signal carré.

2. La bande de base est comprise entre $\pm\frac{f_e}{2} = 4.9\,[\mathrm{kHz}]$. Les composantes spectrales réelles présentes se situent donc en ± 1 kHz et $\pm 3\,[\mathrm{kHz}]$.
3. Les fréquences apparentes sont présentées dans la figure 3.4.
4. L'amplitude de chaque raie d'ordre k vaut $\frac{A}{k\pi}$.
5. Voir figure 3.4