Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electrotechnique
Systèmes Asservis, L3, EMD 16/01/2022

EXO : 1

1) Soit le système donné par son équation caractéristique

$$A\,P^4 + 2P^3 + A\,(1+P^2) + AP - 3 = 0$$

Etudiez la stabilité du système en fonction du paramètre « A »

2) a) Déterminez en utilisant la méthode des résidus la transformée de Laplace inverse de :

$$F(P) = \frac{(P+2)}{P^2(P+1)^2(P+3)}$$

b) Déterminez en utilisant la méthode de décomposition en éléments simples la transformée de Laplace inverse de :

$$G(P) = \frac{2P}{(P+2)(P+4)(P+5)}$$

EXO : 2

Soit le système donné par sa fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$F_0(P) = \frac{1}{P(P+1)(P+3)}$$

1) Le système est il stable en boucle ouverte ? pourquoi ?
2) Tracez le lieu de Nyquist de ce système.
3) Qu'en est il de la stabilité (graphiquement) du système en boucle fermée, justifiez votre réponse.

EXO : 3

Soit le système asservi linéaire donné par sa FTBO suivante :

$$H_0(P) = \frac{(1+0.1P)(1+0.05P)}{P^2(1+0.01P)(1+0.005P)}$$

1) Tracez (asymptotiquement) le diagramme de Bode, gain et phase, (indiquer la pente pour chaque tronçon) ;
2) Déterminer la fréquence de coupure $\boldsymbol{\omega_c}$ (en se basant sur le tracé asymptotique), puis la marge de phase $\boldsymbol{\varphi_m}$
3) Le système est il stable (graphiquement) en boucle fermée, justifiez votre réponse.
4) Déterminer la fréquence d'inversion de la phase $\boldsymbol{\omega_\pi}$, que vaut alors la marge de gain $\mathbf{A_m}$

Barème 5 7 8

Bonne chance
Pr. M. Lefouili

Correction de L'EMD

Exo : 1 (05 points)

1) A P^4+ $2P^3$+A(1+P^2)+ AP – 3 =0
L'équation caractéristique ordonnée sera : A P^4+ $2P^3$+A P^2 + AP+ (A– 3) =0 (0.25)
Application du critère de stabilité de Routh :
La 1ere condition de stabilité de Routh : tous les An de même signe
Donc [A ; 2 ; A ; A, (A-3)] de même signe, ce qui donne
A>0 et (A-3) >0 ⇒ **A>3** (0.25)
La 2eme condition, on construit la table de Routh

P^4	A	A	A-3	
P^3	2	A	0	(0.5)
P^2	b_1	b_2		
P^1	c_1	C_2		
P^0	d_1			

$b_1 = \frac{(2*A)-(A*A)}{2} = \frac{2A-A^2}{2}$; $\quad b_1 > 0 \Rightarrow \boldsymbol{A(2-A) > 0}$
Comme A>0 de la 1ere Condition donc
(2-A) doit être nécessairement positif, (2-A) >0 ⇒ A<2
Ce qui n'est pas valide avec la 1ere condition qui est **A>3** (0.5)
donc le système est instable $\forall\ \boldsymbol{A}$ (0.5)

2) a) Méthode des résidus : $F_0(P) = \frac{(P+2)}{P^2(P+1)^2(P+3)}$

Nous avons un pole simple (P_1=-3) et deux pôles doubles ($P_2=P_3$=0) et ($P_4=P_5$=-1).

<u>Au pôle simple</u> $\quad résidu_{pi} = \lim_{p\to pi}(p-pi)F(p)e^{pit}$ (0.25)

P_1=-3 est un pole simple $\quad résidu_{p\to -3} = \lim_{p\to -3}(p+3)\frac{(P+2)}{P^2(P+1)^2(P+3)}e^{-3t} = \frac{-1}{36}\ e^{-3t}$ (0.25)

Au pôle multiple d'ordre « m » $\quad residu_{pi} = \frac{1}{(m-1)!}\ \lim_{p\to pi}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}[\,(p-pi)^m\,F(p)e^{pt}]$ (0.25)

($P_2=P_3$=0) est un pole double on a (m=2)

$$residu_{p\to 0} = \frac{1}{(2-1)!}\ \lim_{p\to 0}\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}}[\,(P+0)^2\frac{(P+2)}{P^2(P+1)^2(P+3)}e^{pt}] = \lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\ \frac{(P+2)}{(P+1)^2(P+3)}e^{pt} = \frac{6t-11}{9}$$ (0.25)

($P_4=P_5$=-1) est un pole double on a (m=2)

$$residu_{p\to -1} = \frac{1}{(2-1)!}\ \lim_{p\to -1}\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}}[\,(P+1)^2\frac{(P+2)}{P^2(P+1)^2(P+3)}e^{pt}] = \lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\ \frac{(P+2)}{P^2(P+3)}e^{pt} = -3e^{-t}+2$$ (0.25)

f(t) =∑ résidus = $-\frac{1}{36}e^{-3t} + \frac{6t-11}{9} - 3e^{-t} + 2$ (0.25)

b) Méthode de décomposition en Eléments simples $\quad G(P) = \frac{2P}{(P+2)(P+4)(P+5)}$

Nous avons trois pôles simples (**P_1=-2, P_2=-4 et P_3=-5**)

$G(P) = \frac{A}{(P+2)} + \frac{B}{(P+4)} + \frac{C}{(P+5)}$ (0.5) avec :

$A = \lim_{p\to pi}(p-pi)F(p) = \lim_{p\to -2}(p+2)\frac{2P}{(P+2)(P+4)(P+5)} = \frac{2(-2)}{(-2+4)(-2+5)} = \frac{-4}{6}$ (0.25)

$B = \lim_{p\to pi}(p-pi)F(p) = \lim_{p\to -4}(p+4)\frac{2P}{(P+2)(P+4)(P+5)} = \frac{2(-4)}{(-4+2)(-4+5)} = \frac{-8}{-2} = 4$ (0.25)

$C = \lim_{p\to pi}(p-pi)F(p) = \lim_{p\to -5}(p+5)\frac{2P}{(P+2)(P+4)(P+5)} = \frac{2(-5)}{(-5+2)(-5+4)} = \frac{-10}{3}$(0.25)

$g(t) = -\frac{4}{6}e^{-2t} + 4e^{-4t} - \frac{10}{3}e^{-5t}$ (0.25)

Exo : 2 (07 points) 1) $F_0(P) = \frac{1}{P(P+1)(P+3)}$ Le système est marginalement stable en boucle ouverte, car il a un pole nul et deux pôles à parties réelles négatives (P_1=0, P_2=-1 et P_3=-3) (1.5)

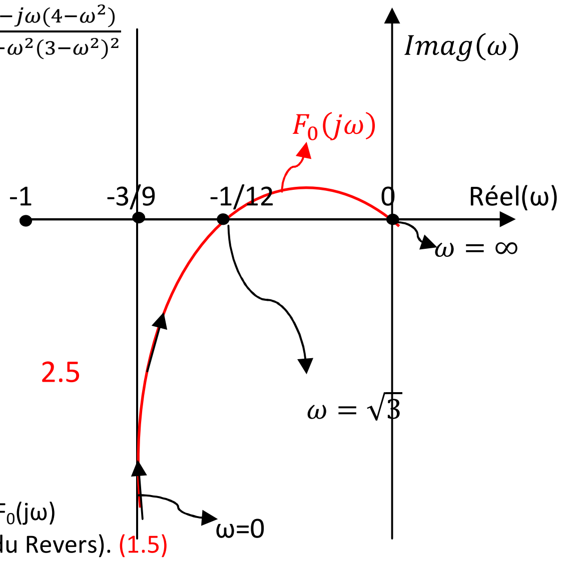
2) Trace du lieu de Nyquist $F_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{-4\omega^2 - j\omega(4-\omega^2)}{16\omega^4+\omega^2(3-\omega^2)^2}$

$Reel(\omega) = \frac{-4}{16\omega^2+(3-\omega^2)^2}$ 0.5

$Imag(\omega) = \frac{j(3-\omega^2)}{16\omega^3+\omega(3-\omega^2)^2}$ 0.5

ω	0	$\sqrt{3}$	∞
$Reel(\omega)$	-4/9	-1/12	0
$Imag(\omega)$	-∞	0	0

0.5



3) Le système est stable en boucle fermée car son lieu de Nyquist $F_0(j\omega)$ (quand ω varie de zéro à l'infini) n'entoure pas le point (-1, 0j) (Critère du Revers). (1.5)

EXO 3 : (08 points)

1) Tracé du Diagramme de Bode (gain et phase) : $H_0(P) = \frac{(1+0.1P)(1+0.05P)}{P^2(1+0.01P)(1+0.005P)}$

-Le gain $(A_{dB}(\omega) = 20\log|G_0(j\omega)| = 20\log\sqrt{1+(0.1)^2\omega^2} + 20\log\sqrt{1+(0.05)^2\omega^2}$

$$-40\log\omega - 20\log\sqrt{1+(0.01)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.005)^2\omega^2} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

-La phase $\varphi_1(\omega) = arctg\left[\frac{0.1\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_1(0) = 0,\ \ \varphi_1(10) = +\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_1(\infty) = +\pi/2$

$$\varphi_2(\omega) = arctg\left[\frac{0.05\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_2(0) = 0,\ \ \varphi_2(50) = +\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_2(\infty) = +\pi/2$$

$$\varphi_3(\omega) = -2 * arctg\left[\frac{\omega}{0}\right] = -\pi$$

$$\varphi_4(\omega) = -arctg\left[\frac{0.01\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_4(0) = 0,\ \ \varphi_4(100) = -\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_4(\infty) = -\pi/2$$

$$\varphi_5(\omega) = -arctg\left[\frac{0.005\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_5(0) = 0,\ \ \varphi_5(200) = -\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_5(\infty) = -\pi/2$$

2) Détermination de ω_c et de la marge de phase :

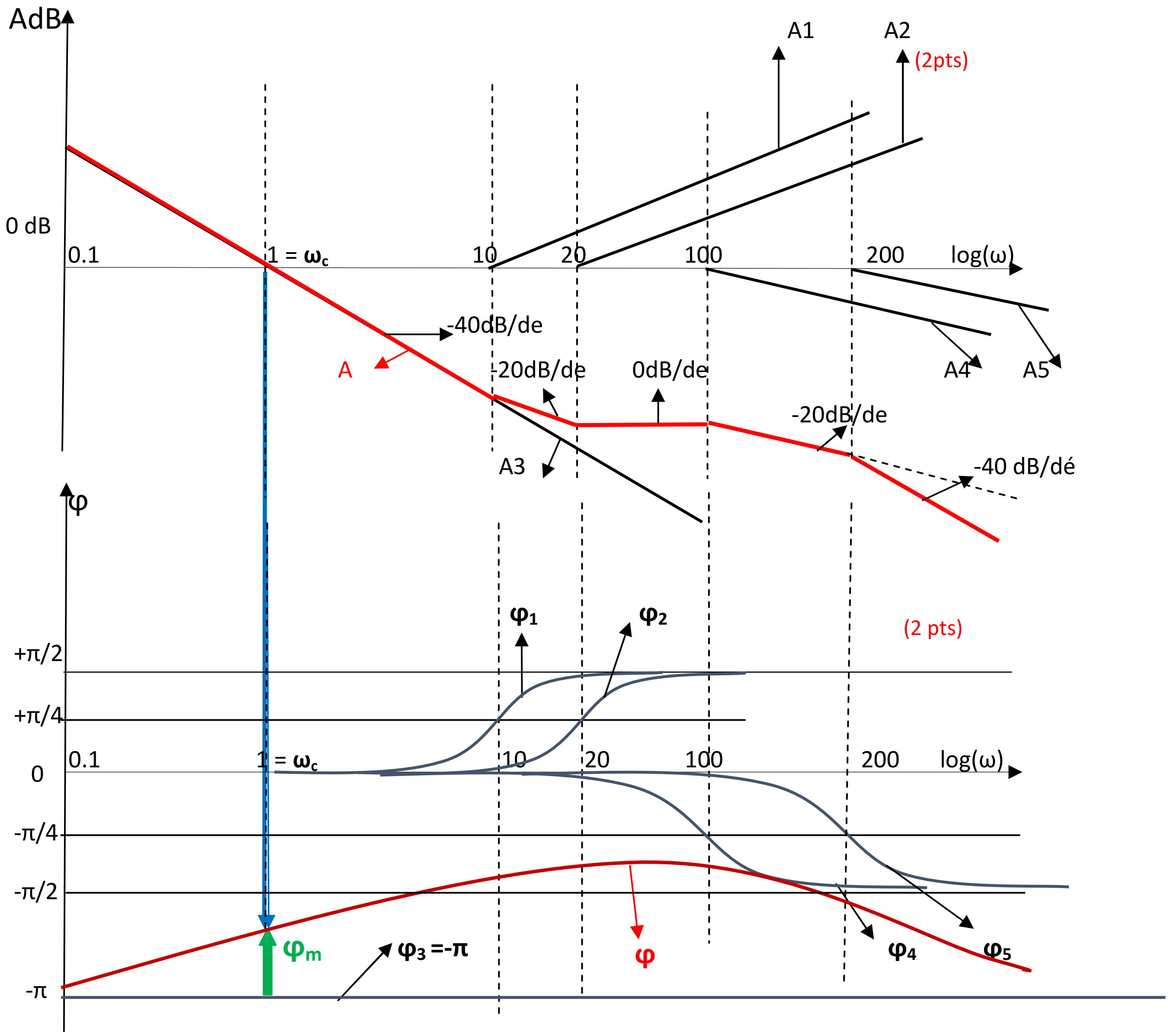
d'après le tracé, le gain $A_{dB}(\omega)$ coupe l'axe (0) db en ω_c= 1 rd/s (1.0)

pour trouver la marge de phase, on calcule : $\boldsymbol{\varphi_m} = \varphi(\omega_c)+\pi$ avec ω_c= 1 rd/s

$$\varphi_m = arctg\left[\frac{0.1\omega_c}{1}\right] + arctg\left[\frac{0.05\omega_c}{1}\right] - \pi - arctg\left[\frac{0.01\omega_c}{1}\right] - arctg\left[\frac{0.005\omega_c}{1}\right] + \pi = 7.74$$ (1.0)

3) Le système est stable en boucle fermée car $\varphi(\omega_c)>-\pi$ Critère du revers (1.0)

4) La phase $\varphi(\omega)$ ne coupe pas l'axe (-π) donc $\omega_\pi = \infty$ et donc la marge de gain est ∞ (1.0)



AdB
A1
A2
(2pts)
0 dB
0.1
1 = ωc
10
20
100
200
log(ω)
-40dB/de
A
-20dB/de
0dB/de
A4
A5
-20dB/de
A3
-40 dB/dé
φ
φ1
φ2
(2 pts)
+π/2
+π/4
0.1
1 = ωc
10
20
100
200
log(ω)
0
-π/4
-π/2
φm
φ3 =-π
φ
φ4
φ5
-π