جـامـعــــــــــة عبد الحق بن حمودة جيـجـــــــــــــل
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي
السنة الجامعية **2022/2021**

الامتحــان الاستدراكي "الجـــــبر 1"

التمــرين الأول: (5.5 ن)

نعرف على $G=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ قانون التركيب $\perp$ المعرف بـ

1- برهن أن : $\perp$ قانون تركيب داخلي على G .

توجيه : يمكن استخدام عكس نقيض الاستلزام.

2- برهن أن $(G,\perp)$ لها بنية الزمرة التبديليه.

التمــرين الثاني: (7.5 ن)

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

1- أحسب الصورة المباشرة $f(A)$ حيث $A=\{-1,0,1\}$.

2- أحسب الصورة العكسية $f^{-1}(\quad)$ حيث $[B=\{-1\}]$.

3- هل التطبيق : f متباين ؟ غامر؟ علل اجابتك.

4- ليكن التطبيق : $g:]-\infty,0]\longrightarrow[0,1[$ معرف بـ $\forall x\in\mathbb{R}: g(x)=f(x)$

برهن أن g تقابلي و عين التطبيق العكسي g^{-1}

التمــرين الثالث: (7 ن)

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على $\mathbb{R}^2$ بـ :

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2:(x,y)\mathcal{R}(x',y')\Leftrightarrow[x\le x' et\ y\le y'] .$$

1- برهن أن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب $\mathbb{R}^2$.

2- هل الترتيب على $\mathbb{R}^2$ كلي ام جزئي؟ علل اجابتك.

بـــــــالـــــــــتـــــــوفـــــيـــــــق

الحل النموذجي للامتحان الاستدراكي

التمرين الاول:

$\perp$ قانون تركيب داخلي $\Leftrightarrow [\forall(a,b)\in G^2: a\perp b\in G]$ و هو محقق من السؤال الاول لأن:

0.50 $\forall(a,b)\in G^2: a\neq -\frac{1}{3}\wedge : b\neq -\frac{1}{3}\Rightarrow a\perp b\neq -\frac{1}{3}$

0.50 2

0.50 $\forall(x,y)\in G^2: a\perp b=-\frac{1}{3}\Rightarrow a=-\frac{1}{3}\vee b=-\frac{1}{3}$

0.25 $a\perp b=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3ab+a+b+\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow 9ab+3a+3b+1=0\Leftrightarrow (3a+1)(3b+1)=0\Leftrightarrow (3a+1)=0\vee(3b+1)=0\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}\vee b=-\frac{1}{3}$

2- تكون $(G,\perp)$ زمرة تبديليه اذا كان $\perp$ قانون تركيب داخلي ،تجميعي ،تبديلي ، يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير في G

(1) يكون $\perp$ تبديلي اذا كان $\forall(x,y)\in G^2: a\perp b=b\perp a$

$a\perp b=3ab+a+b=3ba+b+a=b\perp a.$ 0.25

0.25 (2) يكون $\perp$ تجميعي اذا كان $\forall(a,b,c)\in G^3: (a\perp b)\perp c=a\perp(b\perp c)$

$$(a\perp b)\perp c=3(a\perp b)c+(a\perp b)+c=3(3ab+a+b)c+3ab+a+b+c=9abc+3ac+3bc+3ab+a+b+c \quad (i).$$

$$a\perp(b\perp c)=3a(b\perp c)+a+(b\perp c)=3a(3bc+b+c)+a+3bc+b+c=9abc++ab+3ac+a+3bc+b+c \quad (ii).$$

بالمقارنة نجد $\perp$ تجميعي 1.00

(3) $\perp$ يقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow [\exists e\in,\forall a\in G: a\perp e=e\perp a=a]$ 0.25

بما أن$\perp$ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$a\perp e=a\Leftrightarrow 3ae+a+e=a\Leftrightarrow e(3a+1)=0$ و $a\neq -\frac{1}{3}\Rightarrow e=0$ 0.75

(4) لكل عنصر نظير$\Leftrightarrow [\forall a\in G,\exists a'\in G: a\perp a'=a'\perp a=0]$ 0.25

بما أن $\perp$ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$a\perp a'=0\Leftrightarrow 3aa'+a+a'=0\Leftrightarrow a'(3a+1)=-a\Rightarrow a'=-\frac{a}{3a+1}$ 0.75

بقي اثبات أن $a'\in G$

$$a'+\frac{1}{3}==-\frac{a}{3a+1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3(3a+1)}\neq 0\Rightarrow a'\in G.$$

و منه $(G,\perp)$ زمرة تبديليه

التمرين الثاني:

1- حساب الصورة المباشرة ل ب$f(A)$

$$f(A)=\{f(x): x\in\{-1,0,1\}\}=\{f(-1),f(0),f(1)\}=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$$

2- حساب الصورة العكسية$[f^{-1}(\{-1\})]$

1.00 $f^{-1}(\{-1\})=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\in\{-1\}\}=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=-1\}=\emptyset$

3- التطبيق f غير متباين لأن $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}$

1.00 التطبيق f غير متباين لأن المعادلة $f(x)=-1$ ليست لها حل.

$\left(g \text{ تقابلي}\right)\Leftrightarrow(\forall y\in[0,1[,\exists! x\in\mathbb{R}: y=g(x))$-

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = y \Leftrightarrow x^2(1-y) = y \wedge 1-y > 0 \Rightarrow x^2 = \frac{y}{1-y} \wedge x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

اذن التطبيقg تقابلي و معرف بـ

$$g^{-1}: [0,1[\rightarrow]-\infty, 0]; g^{-1}(x) == -\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

جامعـــــــة عبد الحق بن حمودة جيجــــــــل
كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي السنة الجامعية **2022/2021**

امتحــان "الجــــبر 1"

<u>التمــرين الأول:</u> **(**5.5 ن**)**

اعط التعريفات التالية :

(1) المجموعة B زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$

(2) الثلاثية $(A,*,\cdot)$ حلقة.متى تكون الحلقة $(A,*,\cdot)$ تامة؟ و متى تكون حقل؟

(3) اعط مثال لحلقة تامة ليست حقل.

(4) لتكن $(G,*)$ زمرة.برهن أن :

$$\forall(\,x,y,z) \in G^3 : [x*y = x*z \Rightarrow\ y = z]$$

<u>التمــرين الثاني:</u> (7.5 ن)

ليكن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تطبيق معرف بـ $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

3- برهن أن f متباين (ادرس حالة بحالة)

4- أحسب الصورة العكسية ل$\{1\}$ بf أي $[f^{-1}(\{1\})]$. هل التطبيق غامر؟

3- برهن أن : $\forall x\in\mathbb{R}: |f(x)|<1$ و استنتج المجموعة $f(\mathbb{R})$

ليكن التطبيقان : $g:\mathbb{R}\longrightarrow\,]-1,1[$ و $h:\,]-1,1[\,\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفين بـ

$$g(x)=f(x)\ ,h(x)=\frac{x}{1-|x|}$$

(1) برهن أن g تقابلي.

(2) برهن أن h هو التطبيق العكسي لـ g أي $h=g^{-1}$

<u>التمــرين الثالث:</u> (7 ن)

لتكن المجموعة $G=\,]-1,1[$ مزودة بالقانون $\perp$ المعرف بـ $\forall(x,y)\in G^2: x\perp y=\frac{x+y}{1+xy}$

1- برهن أن : $\forall(x,y)\in G^2: x\perp y+1>0$ و $x\perp y-1<0$ و استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي على G

2- برهن أن $(G,\perp)$ لها بنية الزمرة التبديليه.

3- نعتبر التطبيق: $f:(G,\perp)\longrightarrow(\mathbb{R},+)$ معرف بـ :

$$f(x)=ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

برهن أن التطبيق تماثل زمري .

بـــــــالـــــــتــــــوفـــــيـــــق

الحل النموذجي

التمرين الأول:

(1) لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها الحيادي e و نظير x هو x'

زمرة جزئية من $(G,*)$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} B \text{ جزء غير خال من } A & (1) \\ \forall (x,y)\in B^2 : x*y \in B & (2) \\ \forall x\in B : x' \in B & (3) \end{array}\right.$ 1.00 $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} e\in B\subset A & (1) \\ \forall (x,y)\in B^2 : x*y \in B & (2) \\ \forall x\in B : x' \in B & (3) \end{array}\right.$

B

(2) تكون الثلاثية $(A,*,\cdot)$ حلقة اذا كانت:

أ) لتكن $(A,*)$ زمرة تبديلية أي أن $*$ قانون تركيب داخلي،تجميعي،تبديلي،يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير

ب) القانون $\cdot$ داخلي،تجميعي و توزيعي على $*$ 1.00

-- حتى تكون الحلقة $(A,*,\cdot)$ تامة يجب أن لا تملك قواسم الصفر اي :

0.75 $\forall (x,y)\in A^2 : x\cdot y = 0 \Rightarrow x=0$ او $y=0$

--- تكون الحلقة $(A,*,\cdot)$ حقل اذا كانت واحدية (تملك عنصر حيادي) و مجموعة العناصر القابلة للقلب هي

0.75 $A^* = A-\{0\}$

(3) الحلقة $(\mathbb{Z},+,.)$ تامة لكنها ليست حقل لأن 1.00 $\mathbb{Z}^* = \{-1,1\} \neq \mathbb{Z}-\{0\}$

(4) ليكن x' نظير لـ x و بما أن القانون تجميعي اذن :

1.00 $* y = x*z \Rightarrow x' * (x*y) = x' * (x*z) \Rightarrow (x'*x)*y = (x'*x)*z \Rightarrow \quad y = z$

التمرين الثاني:

أ) - (f متباين) $\Leftrightarrow$ 0.25 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x'})\in\mathbb{R}^2 : \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(x')} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x'})$

نلاحظ أن اشارة $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ **هي اشارة** $\boldsymbol{x}$ و بما أن $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(x')}$ **اذن نميز حالتين :**

$(1)\ f(x) = f(x') \geq 0 \Rightarrow x\geq 0$ و $x'\geq 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{x'}{1+x'} \Rightarrow x + xx' = x' + x.x' \Rightarrow \ x = x'$

$(2)\ f(x) = f(x') < 0 \Rightarrow x < 0$ و $x' < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{x'}{1-x'} \Rightarrow x - xx' = x' - x.x' \Rightarrow \ x = x'$

و منه $\boldsymbol{f}$ متب 1.00

-2 حساب الصورة العكسية لـ$\{1\}$ بـ f أي $[f^{-1}(\{1\})]$

$$f^{-1}(\{1\}) = \{x\in\mathbb{R} : f(x)\in\{1\}\} = \{x\in\mathbb{R} : f(x) = 1\} = \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x}{1+|x|} = 1\right\} =$$

$$\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{x}{1+x} = 1\right\} = \{x\in\mathbb{R} : x = x+1\} = \emptyset \qquad 1.00$$

لدينا ($\boldsymbol{f}$ غامر) $\Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}, \exists \boldsymbol{x}\in\mathbb{R} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)})$ و هذا غير محقق من اجل $\boldsymbol{y} = \mathbf{1}$ اذن $\boldsymbol{f}$ ليس 0.50

غامر

-3 اثبات المتراجحة : $\forall x\in\mathbb{R} : |f(x)| < 1$

$$\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} si\ x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ si\ x\neq 0 \Rightarrow |f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < \frac{|x|}{|x|} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| < 1 \qquad 0.75$$

واضح أن: 0.50 $|f(x)| < 1 \Rightarrow f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$ بقي اثبات الاحتواء في الجهة العكسية:

$$\forall \boldsymbol{y}\in]-1,1[\Rightarrow |f(x)| = |y| \Rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} = |y| \Rightarrow |x| = \frac{|y|}{1-|y|} \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x\in\mathbb{R} \Rightarrow]-1,1[\subset f(\mathbb{R})$$

اذن 1.00 $(\mathbb{R}) =]-1,1[$

(1) بما أن f متباين اذن g متباين.من جهة أخرى لدينا $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ اذن g غامر فهو تقابلي. 1.00

(2) لدينا h هو التطبيق العكسي لـ $g \Leftrightarrow h \circ g = id_{\mathbb{R}} \wedge g \circ h = id_{]-1,1[}$ 0.50

لدينا 0.50

$$\forall x \in \mathbb{R}: (h \circ g)(\ \ ) = h\big(g(x)\big) = \frac{g(x)}{1-|g(x)|} = \frac{\frac{|x|}{1+|x|}}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} = x = id_{\mathbb{R}}(x)$$

$$\forall x \in]-1,1[: (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{h(x)}{1+|h(x)|} = \frac{\frac{|x|}{1-|x|}}{1+\frac{|x|}{1-|x|}} = x = id_{]-1,1[}(x)$$ 0.50

و منه $\forall x \in \mathbb{R}: h(x) = g^{-1}(x)$

التمرين الثالث :

لدينا : $\forall (x,y) \in G^2: -1 < x < 1$ و $-1 < y < 1 \Rightarrow 1 + x > 0, x - 1 < 0$ و $-1 < xy < 1$

1- لدينا 0.50 $\forall(x,y) \in G^2: x \perp y + 1 = \frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{x+y+xy+1}{1+xy} = \frac{(1+x).(1+y)}{1+xy} > 0$

و كذلك 0.50 $\forall(x,y) \in G^2: x \perp y - 1 = \frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-xy-1}{1+xy} = \frac{(x-1).(1-y)}{1+xy} < 0$

$\perp$ قانون تركيب داخلي $\Leftrightarrow [\forall(x,y) \in G^2: x \perp y \in G]$ و هو محقق من السؤال الاول لأن:

0.50 $\forall(x,y) \in G^2: x \perp y + 1 > 0 \wedge : x \perp y - 1 > 0 \Rightarrow -1 < x \perp y < 1 \Rightarrow x \perp y \in G$

2- تكون $(G,\perp)$ زمرة تبديليه اذا كان $\perp$ قانون تركيب داخلي ،تجميعي ،تبديلي ، يقبل عنصر حيادي و لكل عنصر نظير 0.50

(1) يكون $\perp$ تبديلي اذا كان 0.25 $\forall(x,y) \in G^2: x \perp y = y \perp x$

$$x \perp y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y \perp x.$$ 0.25

(2) يكون $\perp$ تجميعي اذا كان 0.25 $\forall(x,y,z) \in G^3: (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$

$$(x \perp y) \perp z = \frac{(x\perp y)+z}{1+(x\perp y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \qquad (i).$$

$$x \perp (y \perp z) = \frac{x+(y\perp z)}{1+x.(y\perp z)} = \frac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz} \qquad (ii).$$

بالمقارنة نجد $\perp$ تجميعي 1.00

(3) $\perp$ يقبل عنصر حيادي $\Leftrightarrow$ 0.25 $[\exists e \in, \forall x \in \mathrm{G}: x \perp e = e \perp x = x]$

بما أن$\perp$ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$$x \perp e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow e(1-x^2) = 0 \text{ و } x \neq \pm 1 \Rightarrow e = 0.$$ 0.75

(4) لكل عنصر نظير $\Leftrightarrow$ 0.25 $[\forall x \in \mathrm{G}, \exists x' \in \mathrm{G}: x \perp x' = x' \perp x = 0]$

بما أن $\perp$ تبديلي نكتفي بحل معادلة واحدة

$$x \perp x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x + x' = 0 \Rightarrow x' = -x \in \mathrm{G}.$$ 0.75

و منه $(G,\perp)$ زمرة تبديليه

3- حتى f تماثل زمري من $(G,\perp)$ في $(\mathbb{R},+)$ يجب 0.25 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x'}) \in \mathbb{R}^2: \boldsymbol{f}(x \perp x') = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x'})$ يكون

$$\boldsymbol{f}(x \perp x') = ln\frac{1+(x\perp x')}{1-(x\perp x')} = ln\frac{1+\frac{x+x'}{1+xx'}}{1-\frac{x+x'}{1+xx'}} = ln\frac{1+xx'+x+x'}{1+xx'-x-x'} = ln\frac{(1+x)(1+x')}{(1-x)(1-x')} = ln\frac{1+x}{1-x} + ln\frac{1+x'}{1-x'} = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{f}(x$$

1.00

و منه f تماثل زمري من $(G, \perp)$ في $(\mathbb{R}, +)$