

Chapitre 5

Relation entre contraintes et déformations (Lois de comportements)

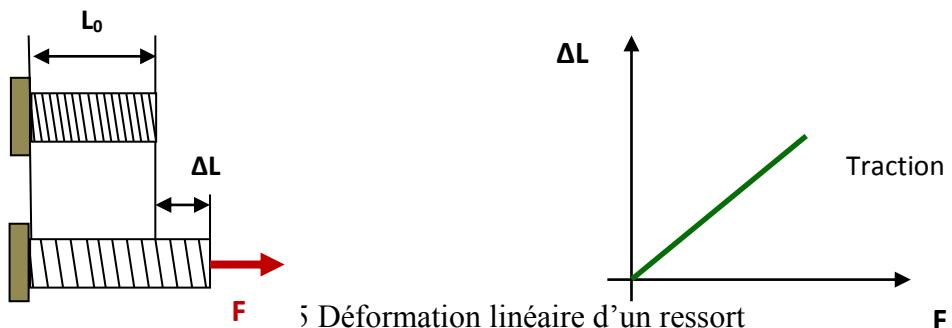
5.1 Introduction

La déformation élastique est une déformation réversible, le milieu retourne à son état initial lorsqu'on supprime les sollicitations. La déformation élastique est un domaine important de la mécanique des milieux continus. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles aux sollicitations. Dans cette théorie l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux, pour d'autre la fracture ou le fluage interviennent. Dans la théorie de l'élasticité, le matériau est homogène s'il possède les mêmes propriétés physiques et chimiques en tous ses points. Le matériau est isotrope s'il possède les mêmes propriétés physiques et chimiques dans toutes les directions.

5.2 Déformation élastique des solides

Le cas le plus simple qui illustre la déformation élastique est celui des ressorts (**figure 1.5**). Dans ce cas la force applique sur le ressort est proportionnelle à l'allongement obtenu. Le coefficient de proportionnalité est appelé raideur du ressort. Lorsque les déformations sont linéaires le coefficient de proportionnalité est appelé raideur du ressort et on le note souvent (K).

$$F = K \cdot \Delta L \quad (1.5)$$



5.3 Limite d'élasticité

La déformation élastique intervient pour des faibles sollicitations. Si l'on augmente les sollicitations, on change de mode de déformation. Lorsque on exerce une traction ou une compression on constate que la longueur de la pièce varie. La variation relative des dimensions de la pièce est proportionnelle à l'allongement relatif (ε). Le coefficient de proportionnalité s'appelle coefficient de Poisson.

Exemple 1 :

Soit un cylindre de rayon (r_0) de longueur initiale (L_0). Ce cylindre est soumis à une force de traction (\vec{F}). Sa longueur devient (L) et son rayon devient (r).

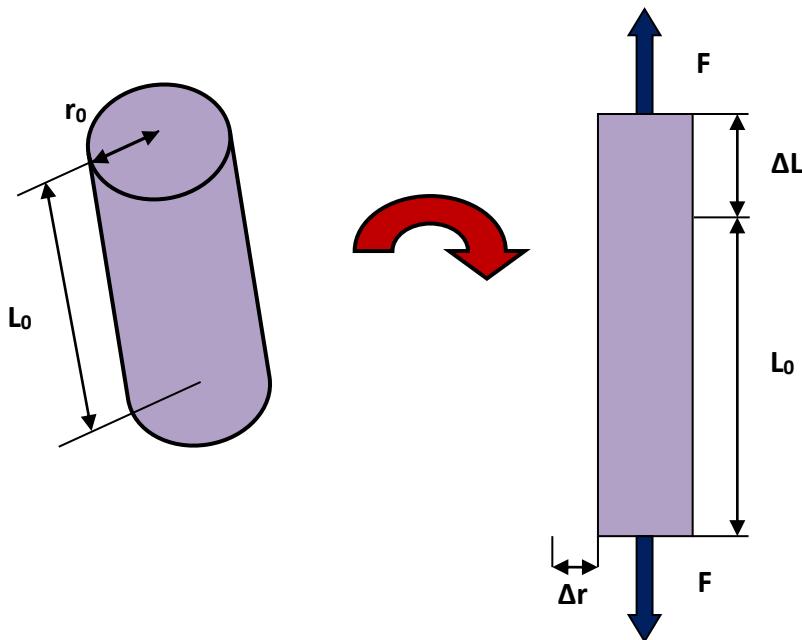


Fig. 2.5 Déformation d'un cylindre

On remarque qu'il y'a proportionnalité entre la variation de longueur (ΔL) et celle du rayon (Δr).

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta L}{L_0} = -v \cdot \varepsilon \quad (2.5)$$

Dans la relation (2.5), (ε) représente la déformation relative et (v) le coefficient de Poisson.

Exemple 2 :

Soit une barre prismatique de longueur initiale (L_0) et de dimensions ($a_0 \times b_0$), soumise à une force de traction (\vec{F}). Après déformation sa longueur devient (L) et ses cotés deviennent ($a \times b$) (figure 3.5).

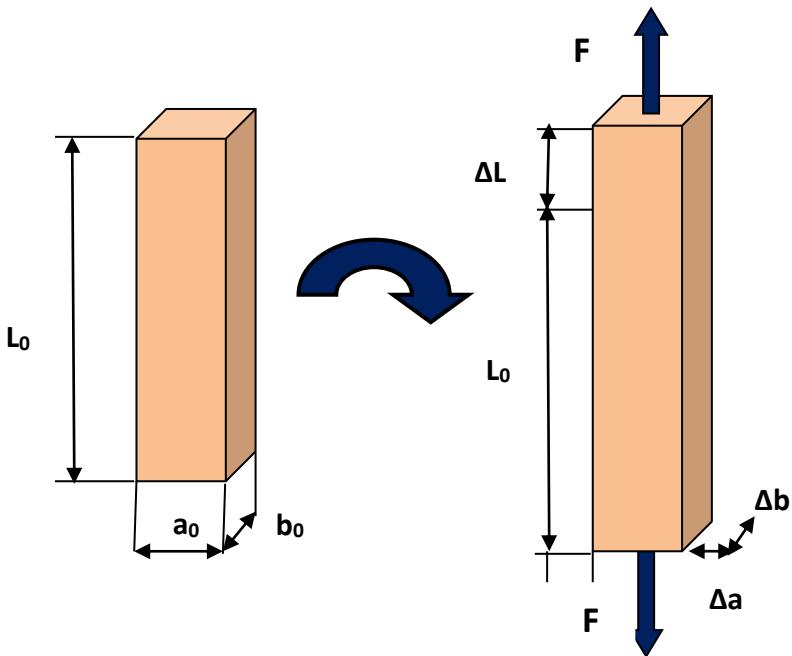


Fig.3.5 Déformation d'une barre prismatique

Il existe une proportionnalité entre la variation de la longueur (L) et celle des cotés (ax b) de telle sorte que :

$$\frac{\Delta a}{a_0} = -v \cdot \frac{\Delta L}{L_0} = -v \cdot \varepsilon \quad (3.5)$$

Et :

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -v \cdot \frac{\Delta L}{L_0} = -v \cdot \varepsilon \quad (3.5)$$

5.4 Loi de Hooke

C'est grâce à la propriété élastique des corps déformables qu'on a pu relier la déformation à la contrainte et établir une relation entre les deux phénomènes (loi de Hooke). La première formulation de cette relation a été établie expérimentalement par Hooke, qui avait suspendue une barre de section (S) à son propre poids. Le cas pratique le plus simple est celui d'une poutre de section (S_0) tendue par une force (\vec{F}) suivant un axe passant par son centre de gravité (**figure 4.5**), produisant ainsi une contrainte (σ) uniforme sur sa section telle que :

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (5.5)$$

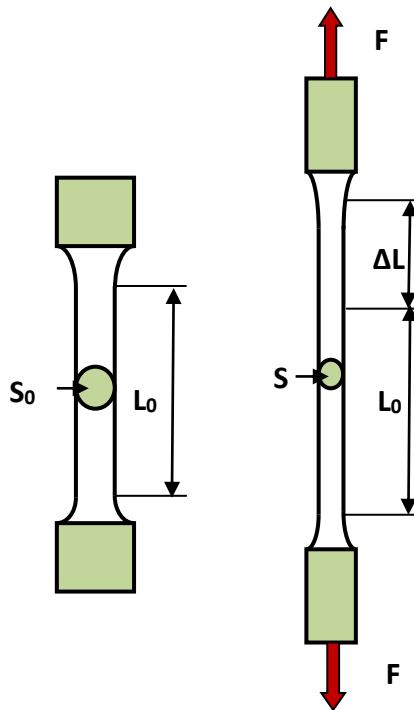


Fig. 4.5 Eprouvette soumise à un essai de traction simple

Grâce à un système d'enregistrement pouvant donner instantanément les valeurs de l'effort de traction (\vec{F}) et de l'allongement correspondant (ΔL) ou bien les valeurs de la contrainte (σ) et la déformation (ε). On peut obtenir une courbe (force - déplacement) ou bien (contrainte-déformation) représentée sur la figure (figure 6.5).

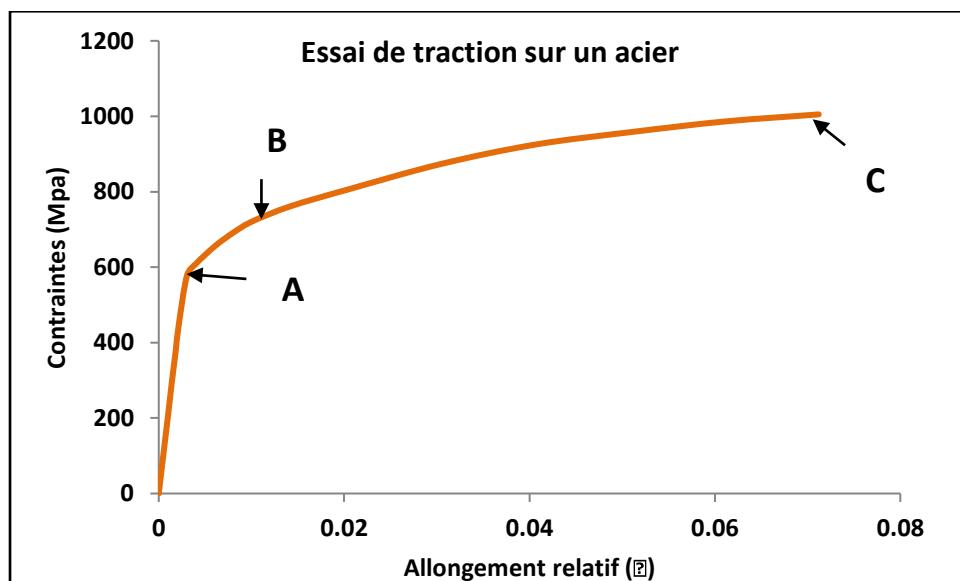


Fig. 6.5 Courbe (contrainte- déformation)

Cette courbe comporte 03 phases :

Phase OA : Elle correspond aux déformations élastiques (les allongements sont proportionnels aux charges. Dans cette phase le matériau subit une transformation réversible, quand la charge est supprimée l'éprouvette retourne à l'état initial. Le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et déformation est appelé module Young ou module d'élasticité longitudinale noté (E). Durant cette phase (OA) le matériau à un comportement élastique linéaire.

A partir de la courbe précédente (**figure 6.5**) on peut déduire plusieurs caractéristiques du matériau :

Phase OA :

- **Module de Young**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad (6.5)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (7.5)$$

Cette relation représente la loi de Hooke. La pente de la courbe est appelée module de Young (E), ou bien module d'élasticité longitudinale.

- **Limite élastique R_e / σ_e**

Elle correspond à la valeur de l'effort ou de la contrainte limite se trouvant à la fin de la phase (OA). Les déformations dans cette phase (OA) sont généralement très petites ce qui permet d'utiliser l'approximation des petits déplacements.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \quad (8.5)$$

Phase (AB + BC) : Cette phase correspond au domaine plastique dans lequel lorsqu'on supprime la charge l'éprouvette ne revient plus à l'état initial. Cependant elle conserve une déformation permanente dite plastique. La zone (AB) est appelée zone de plasticité répartie où les allongements sont uniformément réparties dans la section de l'éprouvette. La zone (BC) est appelée zone de plasticité localisée où les allongements sont localisées et la déformation a lieu dans une zone très limitée de l'éprouvette. La section diminue rapidement c'est ce qu'on appelle le phénomène de striction.

D'après la courbe précédente (**figure 6.5**) sur la phase (AB + BC) on peut déduire les caractéristiques suivantes:

- **La charge de rupture R_r / σ_r**
- **L'allongement relatif en %**

$$A = \frac{L - L_0}{L_0} \times 100 \quad (9.5)$$

- **La striction relative en %**

$$A = \frac{S_0 - L}{S_0} \times 100 \quad (9.5)$$

5.5 Solide élastique isotrope

Approche expérimentale :

Considérons un barreau conçu à partir d'un matériau élastique isotrope. On le soumet à un essai de traction triaxial. Ce barreau est équipé de 3 jauge extensiométriques qui ont pour but de mesurer les déformations selon les trois directions ($\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$) (figure 7.5).

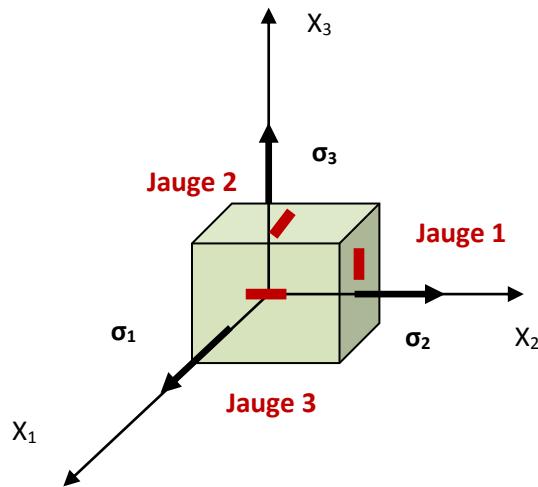


Fig.7.5 Barreau soumis à un état de traction triaxial

La jauge 1 : enregistre les déformations suivant la direction 3

La jauge 2 : enregistre les déformations suivant la direction 1

La jauge 3 : enregistre les déformations suivant la direction 2

Constatations

Jauge N° 2 : Le matériau s'allonge dans la direction (\vec{x}_1) selon le principe de la loi de Hooke :

$$\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1 \quad (10.5)$$

Ainsi :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (11.5)$$

On remarque aussi des contractions enregistrées par les deux autres jauge latérales (**Jauge N° 1** et **Jauge N° 3**).

Alors :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -v \cdot \varepsilon_1 = -v \cdot \frac{\sigma_1}{E} \quad (12.5)$$

On peut conclure qu'une contrainte (σ_1) provoque à la fois les déformations (ε_1), (ε_2) et (ε_3). Dans ce cas le tenseur de contrainte due à la première sollicitation (σ_1) est de la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

Le tenseur de déformation engendré est de la forme :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -v \cdot \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -v \cdot \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

Si on réalise des essais dans les deux autres directions (\vec{x}_2) et (\vec{x}_3) on obtient un résultat similaire à un indice près, et la superposition des trois essais de traction donne :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{v}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (15.5)$$

Ces équations traduisent la loi de Hooke en axes principaux.

5.6 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke peut être exprimée par rapport à un système d'axes quelconques. On pose :

$$-3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (16.5)$$

Si on substitue (16.5) dans (15.5) on aura :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 3p \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \sigma_1 \\ \varepsilon_2 = 3p \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \sigma_2 \\ \varepsilon_3 = 3p \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \sigma_3 \end{cases} \quad (17.5)$$

Sachant que :

$$\varepsilon(\vec{n}) = [\vec{n}]^T \cdot [\varepsilon] \cdot [\vec{n}] \quad (18.5)$$

En axes principaux :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \varepsilon_1 \cdot n_1^2 + \varepsilon_2 \cdot n_2^2 + \varepsilon_3 \cdot n_3^2 \quad (19.5)$$

Si on substitue (17.5) dans (19.5) on aura :

$$\varepsilon(\vec{n}) = 3p \cdot \frac{v}{E} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \frac{(1+v)}{E} \cdot (\sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 \cdot n_2^2 + \sigma_3 \cdot n_3^2) \quad (20.5)$$

Or la normale unitaire \vec{n} est donnée par la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (21.5)$$

Et la contrainte normale par la relation :

$$\sigma_N = \sigma_1 \cdot n_1^2 + \sigma_2 \cdot n_2^2 + \sigma_3 \cdot n_3^2 \quad (22.5)$$

En axes quelconques nous avons la contrainte normale ainsi que la déformation normale sont données grâce aux relations suivantes :

$$\sigma_N = n_i \sigma_{ij} n_j \quad (23.5)$$

Et :

$$\varepsilon(\vec{n}) = n_i \varepsilon_{ij} n_j \quad (24.5)$$

Alors :

$$\varepsilon(\vec{n}) = n_i \varepsilon_{ij} n_j = 3p \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \cdot (n_i \sigma_{ij} n_j) \quad (25.5)$$

Or :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = n_i n_j \delta_{ij} \quad (26.5)$$

Donc :

$$n_i \varepsilon_{ij} n_j = 3p \cdot \frac{v}{E} (n_i n_j \delta_{ij}) + \frac{(1+v)}{E} \cdot (\sigma_{ij} n_i n_j) \quad (27.5)$$

Finalement on obtient l'expression de la relation de Hooke généralisée en axes quelconques :

$$\varepsilon_{ij} = 3p \cdot \frac{v}{E} (\delta_{ij}) + \frac{(1+v)}{E} \cdot (\sigma_{ij}) \quad (28.5)$$

Application 1 : On se propose de déterminer les composantes du tenseur de déformation à partir de la relation de la loi de Hooke suivante :

$$\varepsilon_{ij} = 3p \cdot \frac{v}{E} (\delta_{ij}) + \frac{(1+v)}{E} \cdot (\sigma_{ij})$$

$i=1 \quad j=1$

$$\varepsilon_{11} = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{v}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

i=1 j=2

$$\varepsilon_{22} = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{v}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

i=3 j=3

$$\varepsilon_{33} = -(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \cdot \frac{v}{E} + \frac{(1+v)}{E} \sigma_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{v}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

i=1 j=2 / i=2 j=1

$$\varepsilon_{12} = \frac{(1+v)}{E} \sigma_{12} = \varepsilon_{21}$$

i=1 j=3 / i=3 j=1

$$\varepsilon_{13} = \frac{(1+v)}{E} \sigma_{13} = \varepsilon_{31}$$

i=2 j=3 / i=3 j=2

$$\varepsilon_{23} = \frac{(1+v)}{E} \sigma_{23} = \varepsilon_{32}$$

5.7 Module de cisaillement

On appelle module de cisaillement transversal la quantité notée (G) ou encore (μ) tel que :

$$\frac{1}{2G} = \frac{1}{2\mu} = \frac{(1+v)}{E} \quad (29.5)$$

Ou encore :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+v)} \quad (30.5)$$

5.8 Module de Young et coefficient de Poisson

La loi de Hooke généralisée peut être écrite sous une autre forme appelée équation de constitution d'un milieu élastique.

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (31.5)$$

μ, λ sont dit coefficients de Lamé et θ la dilatation cubique donnée par la relation :

$$\theta = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \quad (32.5)$$

Considérons les éléments diagonaux du tenseur de contrainte :

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (33.5)$$

Si on remplace (32.5) dans l'équation de constitution (30.5) on obtient :

$$\sigma_{ii} = \lambda \cdot \theta \cdot \delta_{ii} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ii} \quad (34.5)$$

Or :

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad (35.5)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \theta \quad (36.5)$$

Alors :

$$\sigma_{ii} = \lambda \cdot \theta \cdot 3 + 2\mu \cdot \theta \quad (37.5)$$

Donc :

$$\theta = \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2\mu} \quad (38.5)$$

Si on substitue (θ) dans l'équation de constitution (30.5) on obtient :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \frac{\sigma_{ii}}{(3\lambda + 2\mu)} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (39.5)$$

Finalement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \lambda \frac{\sigma_{ii}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \delta_{ij} \quad (40.5)$$

Application 2 :

On se propose de déterminer les composantes du tenseur de déformation (ε_{ij}).

$i=1 \ j=1$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{11} - \lambda \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Après arrangement :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left(\sigma_{11} - \frac{\lambda(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \right)$$

$i=2 \ j=2$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left(\sigma_{22} - \frac{\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{33})}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \right)$$

$i=2 \ j=2$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left(\sigma_{33} - \frac{\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \right)$$

$i=1 \ j=2 / i=2 \ j=1$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} = \varepsilon_{21}$$

$i=1 \ j=3 / i=3 \ j=1$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{13} = \varepsilon_{31}$$

$i=2 \ j=3 / i=3 \ j=2$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23} = \varepsilon_{32}$$

Par comparaison avec les résultats de l'**application 1** on peut déduire que :

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad (41.5)$$

Ce qui conduit à une relation entre le module de Young (E) et les coefficients de Lamé (λ) et (μ) :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (42.5)$$

Nous avons aussi :

$$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu \quad (43.5)$$

Alors :

$$\lambda = \frac{-2\nu\mu}{2\nu - 1} \quad (44.5)$$

Si on substitue (40.5) dans la relation (38.5) on obtient :

$$E = \frac{\mu \left(3 \left(\frac{-2\nu\mu}{2\nu - 1} \right) + 2\mu \right)}{\frac{-2\nu\mu}{2\nu - 1} + \mu} = 2\mu(1 + \nu) \quad (45.5)$$

Finalement on aboutit à une relation entre le module de cisaillement (μ) et celui de Young (E).

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (46.5)$$

5.9 Tenseurs d'élasticité

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu continu sont liés par des lois appelées lois de comportement. Ces lois caractérisent le comportement mécanique de ce milieu. Le comportement élastique d'un milieu continu est caractérisé par une relation linéaire liant les contraintes aux déformations :

$$[\sigma] = [C].[\varepsilon] \quad (47.5)$$

En notation indicelle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (48.5)$$

Le comportement élastique d'un milieu continu est aussi caractérisé par une relation linéaire liant les déformations aux contraintes:

$$[\varepsilon] = [S].[\sigma] \quad (49.5)$$

En notation indicelle :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (50.5)$$

(C_{ijkl}) et (S_{ijkl}) représentent respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse. Compte tenu de la symétrie des deux tenseurs (σ_{ij}) et (ε_{ij}) on peut dire que ces deux tenseurs sont aussi symétrique et on peut écrire que :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klji} \quad (51.5)$$

A cause de sa symétrie, le tenseur d'élasticité fait apparaître (21) coefficients au lieu de (36).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & C_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (52.5)$$

Et :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ \bullet & \bullet & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & S_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (53.5)$$

5.10 Notation de Voigt

La notation de Voigt est une convention qui est employée pour réduire le nombre d'indices utilisés pour décrire un tenseur symétrique. Le principe de la notation de Voigt est illustré par le cas des tenseurs symétriques de second ordre, tels que le tenseur de contraintes et celui de déformation. Soit le tenseur de second ordre représenté par la matrice suivante :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (54.5)$$

Cette matrice contient (9) coefficients. Par raison de symétrie le nombre de coefficients se réduit à (6) seulement. Connaitre ses (6) coefficients suffit pour représenter complètement le tenseur (a_{ij}) . La notation de Voigt consiste à rassembler deux indices en un seul suivant la convention suivante dans le but de simplifier l'écriture.

$$\begin{array}{ll} 11 \rightarrow 1 & 32 \text{ ou } 23 \rightarrow 4 \\ 22 \rightarrow 2 & 31 \text{ ou } 13 \rightarrow 5 \\ 33 \rightarrow 3 & 21 \text{ ou } 12 \rightarrow 6 \end{array}$$

Exemple : Considérons la loi de Hooke qui lie les contraintes aux déformations :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Par exemple pour la composante σ_{13} :
 $i=1, j=3, k=1,2,3$ et $l=1,2,3$

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{13} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + C_{1323}\varepsilon_{23} + C_{1332}\varepsilon_{32} + C_{1331}\varepsilon_{31} + C_{1313}\varepsilon_{13} + C_{1321}\varepsilon_{21} + C_{1312}\varepsilon_{12}$$

Sachant que les tenseurs $(C_{ijkl}\varepsilon_{kl})$ et (ε_{kl}) sont symétriques alors :

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{13} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + 2.C_{1332}\varepsilon_{32} + 2.C_{1331}\varepsilon_{31} + 2.C_{1321}\varepsilon_{21}$$

Le coefficient 2 est intégré par convention dans les composantes de déformation ce qui donne :

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{13} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + C_{1332}\varepsilon_{32} + C_{1331}\varepsilon_{31} + C_{1321}\varepsilon_{21}$$

On passe ainsi de la notation complète à celle de Voigt par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_{ij} & C_{\alpha\beta}C_{ijkl} \\ \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_{ij} & \text{Pour } \alpha=1,2,3 \\ \varepsilon_\alpha &= 2 \cdot \varepsilon_{ij} & \text{Pour } \alpha=4,5,6 \end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes prends la forme d'un vecteur (σ_i) tel que :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (55.5)$$

De même le tenseur de déformation prends la forme d'un vecteur (ε_α) :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (56.5)$$

5.11 Milieux anisotrope

Dans le cas général, la matrice de rigidité et celle de souplesse font apparaitre chacune (21) coefficients indépendants. Ce cas correspond à un matériau non homogène, ne possédant aucune propriété de symétrie, un tel matériau est dit **triclinique**.

Les matrices de rigidité et de souplesse sont de la forme :

- **Matrice de rigidité pour un matériau triclinique:**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & C_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \quad (57.5)$$

- **Matrice de souplesse pour un matériau triclinique :**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ \bullet & \bullet & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & S_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \quad (58.5)$$

En réalité la plupart des matériaux anisotropes possèdent des structures présentant une ou plusieurs symétries ; ce qui permet alors de réduire le nombre de constantes indépendantes des matrices de rigidité et de souplesse, nécessaires à la description du comportement mécanique des matériaux. On peut citer ici quelques cas :

- **Matériau monoclinique :** Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un seul plan de symétrie. Les matrices de rigidité et celle de souplesse sont écrites comme suit :
- **Matrice de rigidité pour un matériau monoclinique:**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \quad (59.5)$$

- **Matrice de souplesse pour un matériau monoclinique :**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ \bullet & \bullet & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & S_{45} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \quad (60.5)$$

- **Matériaux orthotropes :** Un matériau monoclinique est un matériau qui possède (3) plans de symétries perpendiculaires (2) à (2). La forme de la matrice de rigidité et celle de souplesse sont écrites comme suit :
- **Matrice de rigidité pour un matériau orthotrope :**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \quad (61.5)$$

- **Matrice de souplesse pour un matériau orthotrope :**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \quad (62.5)$$

- **Matériaux isotropes :** Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions. Dans ce cas le nombre de constantes d'élasticité est réduit à (2) et la matrice de rigidité prend la forme suivante :
- **Matrice de rigidité pour un matériau isotrope :**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \frac{1}{2} \cdot (C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (63.5)$$

Les coefficients de la matrice de rigidité sont exprimés en fonction des coefficients de Lamé (μ) et (λ) :

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \quad (64.5)$$

$$\mu = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \quad (65.5)$$

$$C_{12} = \lambda \quad (66.5)$$

5.12 Coefficient du tenseur d'élasticité pour un milieu isotrope

Si le milieu considéré est isotrope l'équation de constitution s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (67.5)$$

Cette relation est appelée aussi relation de Lamé où (μ) et (λ) sont les coefficients de Lamé et (θ) la dilatation cubique.

Sachant que :

Sachant que :

$$\theta = \frac{\partial U_i}{\partial X_i}$$

Et :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

Alors :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \theta = \varepsilon_{kk} \quad (68.5)$$

Et :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \quad (69.5)$$

Application 3 : On se propose de déterminer les composantes du tenseur de rigidité (C_{ijkl}) en fonction des coefficients de Lamé.

D'après la relation (69.5) :

$$\begin{aligned} & i=1, j=1 \\ & \sigma_{11} = \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_{11} + \lambda \cdot (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ & i=2, j=2 \\ & \sigma_{22} = \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{22} = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_{22} + \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \\ & i=3, j=3 \\ & \sigma_{33} = \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \cdot \varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu) \cdot \varepsilon_{33} + \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ & i=1, j=2 \\ & \sigma_{12} = 2\mu \cdot \varepsilon_{12} = \sigma_{21} \\ & i=1, j=3 \\ & \sigma_{13} = 2\mu \cdot \varepsilon_{13} = \sigma_{31} \\ & i=2, j=3 \\ & \sigma_{23} = 2\mu \cdot \varepsilon_{23} = \sigma_{32} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle et en utilisant la notation de l'ingénieur on obtient une relation entre les composantes du vecteur de contraintes et celle du vecteur de déformation: