

4

CHAPITRE 4

Lois de comportement en élasticité linéaire

4.1. Linéarité géométrique, Linéarité physique, élasticité linéaire.

Dans le deuxième chapitre nous avons modelé un tenseur qui est représentant de l'état de contraintes à l'intérieur du matériau lorsque celui-ci est soumis à un état de chargement à sa frontière.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude de la déformation c'est-à-dire que connaissant le champ de déplacement dans le matériau, nous avons élaboré un tenseur de déformation qui permet de traduire localement les variations de longueurs et les variations angulaires. Nous avons également défini la notion de linéarité du point de vue des déformations. Cette linéarité est souvent appelée *linéarité géométrique* car elle ne s'intéresse qu'à la géométrie de la déformation.

Les deux premiers chapitres peuvent s'appliquer à tout milieu continu (solide élastique, solide plastique, fluide) car aucune loi spécifique de comportement n'a été introduite. Par loi de comportement, nous entendons la manière dont le matériau s'oppose à la sollicitation. Cette loi peut dépendre du point du matériau considéré, de la température et du temps.

Dans ce chapitre nous allons établir une relation entre les composantes du tenseur des contraintes et les composantes du tenseur des déformations. Ces relations peuvent être linéaires (*linéarité physique*), et s'il y a simultanément linéarité physique et géométrique alors la théorie introduite sera celle de l'*élasticité linéaire*.

4.2. Loi de Hooke généralisée.

Dans l'élasticité linéaire classique on suppose que les déplacements et les gradients de déplacement sont petits et il n'y a pas de distinction entre les descriptions de Lagrange et d'Euler. On suppose que le processus de déformation est *adiabatique* (pas de gain ou de perte de chaleur) et *isothermique* (température constante). Dans ce cas les relations entre l'état de contrainte et l'état de déformation sont des fonctions linéaires.

On peut donc écrire :

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} v_{kl} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{v}} \quad (4.1)$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi de Hooke généralisée*. Le tenseur du quatrième ordre \mathcal{C} représente le *tenseur d'élasticité* ou le *tenseur de raideur*. Dans l'hypothèse d'un milieu continu *homogène*, ses composantes sont indépendantes des coordonnées du point considéré. Ce tenseur comporte 81 termes, mais compte tenu de la symétrie des tenseurs de contrainte et de déformation, le tenseur d'élasticité est caractérisé par 36 termes.

Le tenseur d'élasticité est un tenseur d'ordre 4. Il est donc particulièrement difficile à expliciter. Les formules développées sont relativement lourdes. Il convient donc de trouver une méthode qui permette une simplification d'écriture.

On remplace le double indice du tenseur de contrainte par un seul indice de rang 6.

$$\dagger_{ij} = \begin{bmatrix} \dagger_{11} & \dagger_{12} & \dagger_{13} \\ \dagger_{21} & \dagger_{22} & \dagger_{23} \\ \dagger_{31} & \dagger_{32} & \dagger_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \dagger_K = \begin{bmatrix} \dagger_{11} = \dagger_1 \\ \dagger_{22} = \dagger_2 \\ \dagger_{33} = \dagger_3 \\ \dagger_{23} = \dagger_{32} = \dagger_4 \\ \dagger_{31} = \dagger_{13} = \dagger_5 \\ \dagger_{12} = \dagger_{21} = \dagger_6 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

De même pour le tenseur des déformations

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix} \rightarrow V_M = \begin{bmatrix} V_{11} = V_1 \\ V_{22} = V_2 \\ V_{33} = V_3 \\ X_{23} = 2V_{23} = V_4 \\ X_{31} = 2V_{31} = V_5 \\ X_{12} = 2V_{12} = V_6 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La relation (4.1) s'écrit d'une manière simplifiée,

$$\dagger_k = C_{KM} \vee_M \quad (K=1,2,\dots,6) \quad (4.4)$$

et l'énergie interne dans ce cas est purement mécanique appelée *énergie de déformation*.

La nouvelle forme du tenseur d'élasticité permet alors de lui associer une matrice carrée (6x6) :

$$\begin{bmatrix} \dagger_1 \\ \dagger_2 \\ \dagger_3 \\ \dagger_4 \\ \dagger_5 \\ \dagger_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

4.3. Isotropie, Anisotropie et symétrie élastique.

L'hypothèse d'**isotropie** impose que la loi de comportement soit indépendante du repère choisi pour l'exprimer. En d'autre terme, le tenseur d'élasticité doit être invariant pour tout changement de base.

Un milieu est dit **orthotrope** pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par symétrie relative à deux plans orthogonaux. On remarque qu'alors la symétrie par rapport au troisième plan orthogonal est automatiquement acquise. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour le bois, les composites unidirectionnels et les produits métalliques laminés.

4.3.1 Symétrie par rapport au plan x_1, x_2 .

Le matériau étudié présente un plan de symétrie parallèle à x_1, x_2 . Dans ce cas, la forme de la matrice des constants élastiques doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Ce type de matériau est appelé *matériau monoclinique*.

Pour un plan de symétrie élastique parallèle aux axes x_1, x_2 (voir figure ci-dessous)

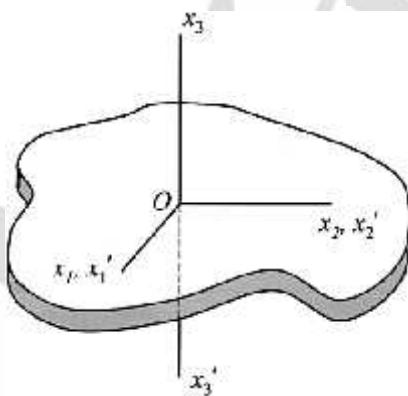


Fig. 4.1. Plan de symétrie parallèle à x_1, x_2

La matrice de changement de base traduisant cette symétrie est :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La formule de transformations des contraintes est

$$\dot{\tau}_{ij} = a_{ip} a_{jq} \dot{\tau}_{pq} \quad \text{ou} \quad [\dot{\tau}] = [A] [\dot{\tau}] [A]^T \quad (4.7)$$

ou en forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_1 & \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_5 \\ \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_2 & \dot{\tau}_4 \\ \dot{\tau}_5 & \dot{\tau}_4 & \dot{\tau}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tau}_1 & \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_5 \\ \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_2 & \dot{\tau}_4 \\ \dot{\tau}_5 & \dot{\tau}_4 & \dot{\tau}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tau}_1 & \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_5 \\ \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_2 & \dot{\tau}_4 \\ -\dot{\tau}_5 & -\dot{\tau}_4 & -\dot{\tau}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau}_1 & \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_5 \\ \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_2 & \dot{\tau}_4 \\ \dot{\tau}_5 & \dot{\tau}_4 & \dot{\tau}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tau}_1 & \dot{\tau}_6 & -\dot{\tau}_5 \\ \dot{\tau}_6 & \dot{\tau}_2 & -\dot{\tau}_4 \\ -\dot{\tau}_5 & -\dot{\tau}_4 & \dot{\tau}_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Alors $\dot{\tau}_K = \dot{\tau}_K$ pour $K=1,2,3,6$ et $\dot{\tau}_K = -\dot{\tau}_K$ pour $K=4,5$

De la même manière la formule de transformation des déformations est

$$\dot{v}_{ij} = a_{ip} a_{jq} v_{pq} \text{ ou } \begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = [A] [E] [A]^T \quad (4.9)$$

Alors $\dot{v}_K = v_K$ pour $K=1,2,3,6$ et $\dot{v}_K = -v_K$ pour $K=4,5$

La loi de Hooke dans le repère $ox_1x_2x_3$ est $\dot{\tau}_K = C_{KM} v_M$

La loi de Hooke dans le repère $ox_1x_2x_3$ est $\dot{\tau}_K = C_{KM} \dot{v}_M$

Les six équations sont :

Pour $K=1$

$$\dot{\tau}_1 = C_{11}v_1 + C_{12}v_2 + C_{13}v_3 + C_{14}v_4 + C_{15}v_5 + C_{16}v_6 \quad (4.10)$$

$$\dot{\tau}_1 = C_{11}\dot{v}_1 + C_{12}\dot{v}_2 + C_{13}\dot{v}_3 + C_{14}\dot{v}_4 + C_{15}\dot{v}_5 + C_{16}\dot{v}_6 \quad (4.11)$$

Substituons les résultats de (4.8) et (4.9) dans la relation (4.11)

$$\dot{\tau}_1 = C_{11}v_1 + C_{12}v_2 + C_{13}v_3 - C_{14}v_4 - C_{15}v_5 + C_{16}v_6 \quad (4.12)$$

Comparons (4.10) et (4.12), on trouve $C_{14} = C_{15} = 0$

Pour $K=2$

$$\dot{\tau}_2 = C_{21}v_1 + C_{22}v_2 + C_{23}v_3 + C_{24}v_4 + C_{25}v_5 + C_{26}v_6 \quad (4.13)$$

$$\dot{\tau}_2 = C_{21}\dot{v}_1 + C_{22}\dot{v}_2 + C_{23}\dot{v}_3 + C_{24}\dot{v}_4 + C_{25}\dot{v}_5 + C_{26}\dot{v}_6 \quad (4.14)$$

Substituons les résultats de (4.8) et (4.9) dans la relation (4.14)

$$\dot{\tau}_2 = C_{21}v_1 + C_{22}v_2 + C_{23}v_3 - C_{24}v_4 - C_{25}v_5 + C_{26}v_6 \quad (4.15)$$

Comparons (4.13) et (4.15), on trouve $C_{24} = C_{25} = 0$

Pour $K=3$

$$\dagger_3 = C_{31}v_1 + C_{32}v_2 + C_{33}v_3 + C_{34}v_4 + C_{35}v_5 + C_{36}v_6 \quad (4.16)$$

$$\dot{\dagger}_3 = C_{31}\dot{v}_1 + C_{32}\dot{v}_2 + C_{33}\dot{v}_3 + C_{34}\dot{v}_4 + C_{35}\dot{v}_5 + C_{36}\dot{v}_6 \quad (4.17)$$

Substituons les résultats de (4.8) et (4.9) dans la relation (4.17)

$$\dagger_3 = C_{31}v_1 + C_{32}v_2 + C_{33}v_3 - C_{34}v_4 - C_{35}v_5 + C_{36}v_6 \quad (4.18)$$

Comparons (4.16) et (4.18), on trouve $C_{34} = C_{35} = 0$

Pour $K=4$

$$\dagger_4 = C_{41}v_1 + C_{42}v_2 + C_{43}v_3 + C_{44}v_4 + C_{45}v_5 + C_{46}v_6 \quad (4.19)$$

$$\dot{\dagger}_4 = C_{41}\dot{v}_1 + C_{42}\dot{v}_2 + C_{43}\dot{v}_3 + C_{44}\dot{v}_4 + C_{45}\dot{v}_5 + C_{46}\dot{v}_6 \quad (4.20)$$

Substituons les résultats de (4.8) et (4.9) dans la relation (4.20)

$$\begin{aligned} -\dagger_4 &= C_{41}v_1 + C_{42}v_2 + C_{43}v_3 - C_{44}v_4 - C_{45}v_5 + C_{46}v_6 \\ \dagger_4 &= -C_{41}v_1 - C_{42}v_2 - C_{43}v_3 + C_{44}v_4 + C_{45}v_5 - C_{46}v_6 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Comparons (4.19) et (4.21), on trouve $C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{46} = 0$

Pour $K=5$

$$\dagger_5 = C_{51}v_1 + C_{52}v_2 + C_{53}v_3 + C_{54}v_4 + C_{55}v_5 + C_{56}v_6 \quad (4.22)$$

$$\dot{\dagger}_5 = C_{51}\dot{v}_1 + C_{52}\dot{v}_2 + C_{53}\dot{v}_3 + C_{54}\dot{v}_4 + C_{55}\dot{v}_5 + C_{56}\dot{v}_6 \quad (4.23)$$

Substituons les résultats de (4.8) et (4.9) dans la relation (4.23)

$$\begin{aligned} -\dagger_5 &= C_{51}v_1 + C_{52}v_2 + C_{53}v_3 - C_{54}v_4 - C_{55}v_5 + C_{56}v_6 \\ \text{ou} \quad \dagger_5 &= -C_{51}v_1 - C_{52}v_2 - C_{53}v_3 + C_{54}v_4 + C_{55}v_5 - C_{56}v_6 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Comparons (4.22) et (4.24), on trouve $C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{56} = 0$

Pour $K=6$

$$\dagger_6 = C_{61}v_1 + C_{62}v_2 + C_{63}v_3 + C_{64}v_4 + C_{65}v_5 + C_{66}v_6 \quad (4.25)$$

$$\dot{\dagger}_6 = C_{61}\dot{v}_1 + C_{62}\dot{v}_2 + C_{63}\dot{v}_3 + C_{64}\dot{v}_4 + C_{65}\dot{v}_5 + C_{66}\dot{v}_6 \quad (4.26)$$

Substituons les résultats de (4.8) et (4.9) dans la relation (4.26)

$$\dagger_6 = C_{61}v_1 + C_{62}v_2 + C_{63}v_3 - C_{64}v_4 - C_{65}v_5 + C_{66}v_6 \quad (4.27)$$

Comparons (4.25) et (4.27), on trouve $C_{64} = C_{65} = 0$

Enfin le tenseur d'élasticité est de la forme

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Le nombre de constantes indépendantes du tenseur d'élasticité monoclinique est donc 13.

4.3.2 Symétrie par rapport au plan x_1, x_3 .

Supposons maintenant que le matériau possède un plan de symétrie élastique parallèle aux axes x_1, x_3 . Le même raisonnement conduit à un tenseur de la forme

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.3.3 Symétrie par rapport au plan x_2, x_3 .

Supposons encore que le matériau possède un plan de symétrie élastique parallèle aux axes x_2, x_3 . Le même raisonnement aussi conduit à un tenseur de la forme

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.3.4 Symétrie par rapport à deux plans orthogonaux. Matériau orthotropique.

Si le matériau possède ces deux plans de symétrie simultanément, alors le tenseur d'élasticité sera la combinaison de (4.28) et (4.29). Il vient:

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

On remarque que la symétrie par rapport au plan x_2, x_3 apparaît naturellement dès que l'on impose celle par rapport à x_1, x_2 et celle par rapport à x_1, x_3 . On obtient ici le tenseur d'élasticité orthotrope, à trois plans de symétrie orthogonaux, qui est souvent celui des matériaux composites dont la structure possède ces trois plans de symétrie.

Un matériau orthotrope est caractérisé par 9 *constantes élastiques indépendantes* si les plans de symétries sont connus.

4.3.5 Matériau isotrope.

Un matériau pour lequel, en un point quelconque, les composantes du tenseur d'élasticité C_{ijkm} sont identiques dans toutes les directions est un matériau isotrope. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, un tel matériau est fonction uniquement de deux paramètres caractéristiques indépendants. On peut démontrer qu'un matériau isotrope correspond en fait à un matériau orthotrope possédant de plus une symétrie de révolution autour de chacun de ces axes d'orthotropie.

Pour une isotropie le nombre des constants élastiques indépendantes se réduit à deux.

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Avec $C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$; $C_{44} = \lambda$; $C_{12} = \mu$

λ et μ sont appelées les *constantes de Lamé*.

La relation (4.32) devient

$$C_{KM} = \begin{bmatrix} \} + 2\sim & \} & \} & 0 & 0 & 0 \\ \} & \} + 2\sim & \} & 0 & 0 & 0 \\ \} & \} & \} + 2\sim & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sim & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sim & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sim \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

En fonction de $\}$ et \sim la loi de Hooke (4.1) pour un matériau isotrope s'écrit

$$\tau_{ij} = \} u_{ij} v_{kk} + 2\sim v_{ij} \quad (4.34)$$

L'inverse de la relation (4.34) donne les déformations en fonction des contraintes

$$v_{ij} = \frac{-\}}{2\sim(3\} + 2\sim)} u_{ij} \tau_{kk} + \frac{1}{2\sim} \tau_{ij} \quad (4.35)$$

ou

$$v_{ij} = \frac{1+\epsilon}{E} \tau_{ij} - \frac{\epsilon}{E} u_{ij} \tau_{kk} \quad (4.36)$$

avec

$$\sim = G = \frac{E}{2(1+\epsilon)} \text{ et } \} = \frac{\epsilon E}{(1+\epsilon)(1-2\epsilon)} \quad (4.37)$$

E est le module d'élasticité et ϵ le coefficient de Poisson qui sont appelés les *constantes de l'ingénieur*.

Le développement de la relation (4.36) donne:

$$v_{ij} = \frac{1+\epsilon}{E} \tau_{ij} - \frac{\epsilon}{E} u_{ij} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$$

$$v_{11} = \frac{1+\epsilon}{E} \tau_{11} - \frac{\epsilon}{E} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{E} \tau_{11} - \frac{\epsilon}{E} (\tau_{22} + \tau_{33}) \quad (4.38)$$

$$v_{22} = \frac{1}{E} \tau_{22} - \frac{\epsilon}{E} (\tau_{11} + \tau_{33}) \quad ; \quad v_{33} = \frac{1}{E} \tau_{33} - \frac{\epsilon}{E} (\tau_{11} + \tau_{22}) \quad (4.39)$$

$$v_{12} = \frac{1+\epsilon}{E} \tau_{12} \quad ; \quad v_{13} = \frac{1+\epsilon}{E} \tau_{13} \quad ; \quad v_{23} = \frac{1+\epsilon}{E} \tau_{23} \quad (4.40)$$

En forme matricielle

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{22} \\ v_{33} \\ v_{23} \\ v_{31} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\epsilon}{E} & -\frac{\epsilon}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\epsilon}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\epsilon}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\epsilon}{E} & -\frac{\epsilon}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\epsilon)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\epsilon)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\epsilon)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{12} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$