Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

Cours du module Analyse 2

1^{re} année MI

Par Yasmina Daikh

Chapitre 1

Intégrales définies et primitives

Nous abordons dans ce chapitre la construction ainsi que les principales propriétés de l'intégrale définie au sens de Riemann. On présente ensuite la notion de primitive ainsi que le lien primitives-intégrales définies. Une grande partie du chapitre est réservée à la présentation de quelques méthodes de calcul des primitives et intégrales pour certains types de fonctions.

1.1 Intégrale définie

1.1.1 Subdivisions et sommes de Darboux

Définition 1.1.1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *fixé. Une subdivision d'ordre* n *d'un intervalle* $[a, b]$ *est une partie finie* $d = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ *telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On appelle **pas de la subdivision** d, *le nombre* $h = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$.
Lorsque $x_i = a + ih$, *avec* $h = \dfrac{b-a}{n}$, *on parle de la subdivision* **équidistante (ou régulière)** *d'ordre* n *de* $[a, b]$. *On dit dans ce cas que* h *est* **le pas uniforme** *de cette subdivision.*

Exemple : Le pas de la subdivision régulière $d = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}, 1\}$ de l'intervalle $[0, 1]$ est $\frac{1}{n}$.

Définition 1.1.2. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **une fonction bornée**. *On appelle les quantités*

$$S(f, d) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

$$s(f,d) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

la somme de Darboux supérieure, *respectivement* **inférieure de** f *relativement à la subdivision* $d = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Remarque 1.1.3. *Les deux quantités* $S(f,d)$ *et* $s(f,d)$ *sont finies, car* $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ *et* $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ *sont des nombres réels finis, puisque* f *est supposée bornée. De plus* $s(f,d) \leq S(f,d)$, *puisque* $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$.

Interprétation géométrique : La somme de Darboux supérieure (resp. inférieure) est la somme des aires des rectangles supérieurs de base $[x_{i-1}, x_i]$ (resp. des rectangles inférieurs).

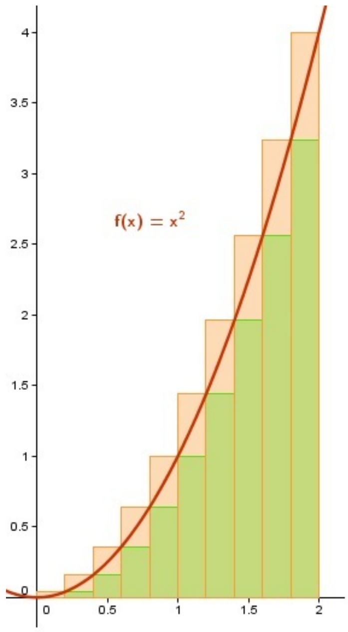

FIGURE 1.1 – Somme de Darboux inférieure (partie en vert) et supérieure (en vert plus la partie en rose) de $f(x) = x^2$ pour une subdivision équidistante $d = \{x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1,\ x_6 = 1.2,\ x_7 = 1.4,\ x_8 = 1.6,\ x_9 = 1.8,\ x_{10} = 2\}$ de l'intervalle $[0, 2]$.

1.1.2 Fonctions Riemann intégrables

On admet le résultat suivant

Proposition 1.1.4. *L'ensemble des sommes de Darboux inférieures a une borne supérieure, que l'on note* s_b^a.

L'ensemble des sommes de Darboux supérieures a une borne inférieure, que l'on note S_b^a. *De plus, on a l'inégalité*

$$s_b^a \leq S_b^a.$$

Ce résultat nous mène à la définition suivante

Définition 1.1.5. *Une fonction* **bornée** f *est* **Riemann intégrable sur** $[a,b]$ *si et seulement si les deux quantités*

$$S_b^a := \inf_{d \in S_{[a,b]}} S(f,d), \ s_b^a := \sup_{d \in S_{[a,b]}} s(f,d)$$

coincident ; où $S_{[a,b]}$ *est l'ensemble des subdivisions de* $[a,b]$.
La valeur $\mathrm{S}_b^a = s_b^a$ *sera notée* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *et appelée* **intégrale définie** *de* f *sur* $[a,b]$.
On note $\mathcal{R}_{[a,b]}$ *l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur* $[a,b]$.

Exemple : On considère la fonction de Dirichlet définie sur $[a,b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin [a,b] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pour toute subdivision $d \in S_{[a,b]}$, on a $S(f,d) = b-a$ et $s(f,d) = 0$. En effet, sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et par le théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (voir cours *Analyse*1) il existe un point rationnel, donc $\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = 1$, et un point irrationnel, d'où $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = 0$. Ainsi $s(f,d) = 0$ et $S(f,d)$ est somme des longueurs des sous-intervalles et donc égale à $b-a$. D'où f n'est pas Riemann intégrable.

Proposition 1.1.6. *Pour* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, *on a*

$$\forall d \in S_{[a,b]}, \quad s(f,d) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,d), \tag{1.1}$$

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f. \tag{1.2}$$

Preuve. La double inégalité (1.1) est une conséquence directe de la définition des sommes de Darboux $s(f,d)$ et $S(f,d)$ et des quantités s_b^a et S_b^a.

Pour montrer (1.2), il suffit de prendre $d = \{a,b\}$. □

En réalité, la définition de l'intégrabilité ci-dessus n'est pas commode à vérifier en pratique. C'est pourquoi il convient de donner des critères plus simples à vérifier.

Proposition 1.1.7. (*Critères d'intégrabilité*) : *Les trois assertions suivantes sont équivalentes* *i)* *Une fonction* **bornée** f *est* **Riemann intégrable sur** $[a, b]$,

ii)

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \, d \in S_{[a,b]}, S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon, \tag{1.3}$$

iii)

$$\lim_{h \to 0} (S(f, d) - s(f, d)) = 0.$$

Il n'est pas toujours aisé de caractériser explicitement l'ensemble des fonctions Riemann intégrables. Néanmoins, on montre que certaines fonctions (monotones ou continues par morceaux) ne posent pas problème.

Théorème 1.1.8. *Toute fonction* **bornée et monotone sur** $[a, b]$ *est Riemann intégrable.*

Preuve. On suppose par exemple f croissante sur $[a, b]$. Soit $d = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On a clairement

$$S(f, d) - s(f, d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f),$$

d'où

$$S(f, X) - s(f, x) \leq h(f(b) - f(a)).$$

Par conséquent

$$0 \leq \lim_{h \longrightarrow 0} (S(f, d) - s(f, d)) \leq \lim_{h \longrightarrow 0} h(f(b) - f(a)) = 0,$$

donc d'après la Proposition 1.1.7, f est Riemann intégrable. □

En utilisant le critère d'intégrabilité (1.3), on démontre le résultat suivant

Théorème 1.1.9. *Toute fonction* **continue sur** $[a, b]$ *(sauf en un nombre fini de points) est Riemann intégrable.*

1.1.3 Structure de l'ensemble des fonctions intégrables

Si on considère **l'espace vectoriel** des fonctions **bornées** de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, la proposition suivante affirme que l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ en est un sous-espace vectoriel.

Proposition 1.1.10. *Soient* $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *alors les propriétés suivantes sont vérifiées* *i) Linéarité :* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *et*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

ii) Positivité :

$$f \geq 0, \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0, \tag{1.4}$$

$$f \leq g, \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

iii) Fonction valeur absolue de f *: la fonction* $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$*, et on a*

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

iv) Relation de Chasles : soit $c \in [a,b]$*, alors* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]} \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}_{[a,c]} \wedge f \in \mathcal{R}_{[c,b]}$ *et on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Preuve.

ii)

$$f \geq 0 \Rightarrow \forall X \in S_{[a,b]},\ s(f,X) \geq 0 \text{ et } s(f,X) \leq \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$g - f \geq 0 \overset{(1.4)}{\Rightarrow} \int_a^b (g-f)(x)\,dx \geq 0 \overset{i)}{\Rightarrow} \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

La preuve du reste des points est laissée au lecteur. □

Convention : Si $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, on convient de poser

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

et

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Remarque 1.1.11. *Avec ces conventions, la relation de Chasles est valable quel que soit l'ordre de* a, b *et* c*. C'est en effet la principale motivation pour ces définitions.*

1.1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Le théorème suivant donne une inégalité très importante pour les intégrales de produits.

Théorème 1.1.12. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues de* $[a,b]$ *sur* $\mathbb{R}$*. On a*

$$\Big(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Preuve. Soit le polynôme P défini par $P(X)=\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+Xg(t)\big)^2\,dt$. On a

$$P(X)=X^2\int_a^b g^2(t)\,dt+2X\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt+\int_a^b f^2(t)\,dt.$$

L'implication (1.4), permet d'affirmer que le polynôme $P(X)$ est positif, puisque c'est l'intégrale d'une fonction positive.

- Si $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt=0$, le polynôme $P(X)$ ne peut pas être de degré 1, car $P(X)$ ne change pas de signe, donc P est constante, par conséquent $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt=0$ et l'inégalité du théorème est vraie.
- Si $\displaystyle\int_a^b g^2(t)\,dt\neq 0$, alors $P(X)$ est un polynôme du second degré dont le signe ne change pas. Ainsi son discriminant Δ est négatif, c-à-d

$$\Delta=\Big(2\int_a^b f(t)g(t)\Big)^2-4\Big(\int_a^b f^2(t)\,dt\Big)\Big(\int_a^b g^2(t)\,dt\Big)\leq 0.$$

En divisant par 4 on obtient l'inégalité désirée. □

1.2 Primitive d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Définition 1.2.1. *Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction.* **Une primitive** *de f est une fonction $F:I\to\mathbb{R}$* **dérivable** *telle que $F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$.*

Proposition 1.2.2. *Si F est une primitive de f sur I alors la fonction $G:I\to\mathbb{R}$ est une primitive de f si et seulement si $F-G=c$, où c est une constante de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soient F et G deux primitives de f. La fonction $F-G$ est dérivable sur I et l'on a

$$(F-G)'=F'-G'=f-f=0.$$

La fonction $F-G$ a une dérivée nulle sur I, et I étant un intervalle, donc $F-G$ est constante.

Réciproquement : Si $F-G$ est constante sur I, alors la relation $G=F+(G-F)$ entraîne que G est dérivable sur I et

$$G'=F'+(G-F)'=F'=f.$$

La fonction G est donc une primitive de f. □

Notation 1.2.3. *La Proposition 1.2.2 nous dit, lorsqu'on connaît une primitive F d'une fonction f, on obtient toutes les autres primitives en ajoutant simplement une constante arbitraire à F. L'ensemble de toutes les primitives de f (dit* **intégrale indéfinie de** *f) s'écrit*

$$\int f(x)\,dx = F + c.$$

On écrit aussi $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(u)\,du$; les lettres x, t, u, sont des lettres dites muettes. On peut même noter l'ensemble des primitives simplement par $\int f$.

Exemples.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ a pour primitive la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\frac{1}{3}x^3$. La fonction définie par $\frac{1}{3}x^3 + 5$ est aussi une primitive de f.
2. La fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ a pour primitive la fonction $G : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g. Et on écrit $\displaystyle\int g(x)\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$.
3. La fonction sinus a pour primitive $x \mapsto -\cos x$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ est la primitive de sinus qui s'annule en 0. La fonction $x \mapsto 2 - \cos x$ est une primitive strictement positive de sinus. On écrit $\int \sin t\,dt = -\cos t + c$, où c est une constante quelconque dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.4. *Si I n'est pas un intervalle, l'affirmation de la proposition 1.2.2 peut être fausse. En effet : soient $F, G\; :]-\infty, 0[\cup]0, \infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que*

$$F(x) = \ln|x|,$$

et

$$G(x) = \begin{cases} F(x), & \text{si } x > 0, \\ \ln|2x|, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$, et $F'(x) = G'(x) = \dfrac{1}{x}$. Les fonctions F et G sont des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, mais $F - G$ n'est pas constante.

Les propriétés de l'intégrale indéfinie sont données dans la proposition suivante

Proposition 1.2.5. *Si f et g admettent des primitives, il en est de même de $f + g$ et de λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'on a*

i) $\displaystyle\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$

ii) $\displaystyle\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$

Exemple.
On a $\displaystyle\int (7x^2 + \sin x)\, dx = 7 \int x^2\, dx + \int \sin x\, dx = \frac{7}{3}x^3 - \cos x + c.$

Attention : $\displaystyle\int (f \cdot g)(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$. Calculer par exemple $\displaystyle\int x^5\, dx$ puis $\displaystyle\int x^3\, dx \cdot \int x^2\, dx$.

1.2.1 Tableau des primitives usuelles

Les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par lecture inverse le tableau des primitives suivant : soit c une constante quelconque de $\mathbb{R}$,

La fonction	Ses primitives
$x^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$	$\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^\alpha,\ x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\int x^\alpha\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\dfrac{1}{x},\ x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, +\infty[$	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$
$e^{ax},\ x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$	$\int e^{ax}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + c$
$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
$\sin x,\ x \in \mathbb{R}$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in]-1, 1[$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$
$\operatorname{sh} x,\ x \in \mathbb{R}$	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + c$
$\operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R}$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + c$

Proposition 1.2.6.

1. *Si F est une primitive de f. Alors pour $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, on a*
$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$$
2. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors*
$$\text{si } u \neq 0 \text{ sur } I, \int \frac{u'(x)}{u(x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(u(x))^{1-\alpha} + c & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln|u(x)| + c & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$
et
$$\int u' e^u\, dx = e^u + c.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées : $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$. $\square$

Exemples.

1. $\displaystyle\int \cos(2x-3)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + c.$
2. Calculons la primitive de $\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}$. Ici $u(x) = x^3 + 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. D'où
$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx = 2(x^3+2)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x^3+2} + c.$$
3. $\displaystyle\int x^4 e^{(x^5-2)}\,dx = \frac{1}{5}e^{(x^5-2)} + c.$

1.2.2 Primitives et intégrales

Définition 1.2.7. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$. On peut définir une nouvelle fonction F sur $[a,b]$ comme suit*
$$F(x) := \int_a^x f(t)dt. \tag{1.5}$$
Cette fonction est appelée **intégrale fonction de la borne supérieure.**

Théorème 1.2.8. *Si f est* **continue** *sur $[a,b]$, alors la fonction F définie dans (1.5) est de classe C^1 sur $[a,b]$: c'est l'unique* **primitive** *de f qui s'annule en a.*

Preuve. D'abord F existe puisque f est continue donc Riemann intégrable d'après le Théorème 1.1.9. Soit $x_0 \in]a,b[$. On peut alors écrire, en utilisant la relation de Chasles
$$F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt,$$
or f est continue en x_0, c.-à-d.
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon,$$
donc pour $|x - x_0| < \delta$
$$|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|,$$
d'où
$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$
ceci prouve que F est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. Lorsque $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, on ne peut considérer que la limite à droite ou à gauche. Puisque f est continue, F est de classe

C^1 sur $[a, b]$.

On vient donc de montrer que **toute fonction continue admet une primitive.**

Unicité : Si G est une autre primitive de f, telle que $G(a) = 0$. La fonction $G - F$ est constante d'après la Proposition 1.2.2. On a donc

$$\forall x \in [a, b],\ G(x) - F(x) = G(a) - F(a) = 0,$$

c'est-à-dire $G = F$. □

Exemple. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0, \infty[$. La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ est la primitive qui s'annule en 1.

Dans la pratique, c'est la formule suivante que l'on applique pour calculer l'intégrale définie d'une fonction dont on connaît une primitive.

Corollaire 1.2.9. *Soit G une primitive quelconque de la fonction continue f sur $[a, b]$, on a alors*

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt. \tag{1.6}$$

Cette relation est appelée **formule de Leibniz-Newton**.

Preuve. Soit G une primitive quelconque de f. D'après la proposition 1.2.2, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, telle que $G = F + c$. Elle est donc de classe C^1 puisque F l'est d'après le Théorème 1.2.8, d'où

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - \underbrace{F(a)}_{=0} - c = F(b) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

□

Exemple. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x$.

La fonction tan est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de ses primitives est $F(x) = -\ln|\cos x|$. D'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx = -\ln(\cos(\frac{\pi}{4}) + \ln(\cos 0) = \ln \sqrt{2}.$$

1.3 Méthodes de calcul des primitives

Trouver les primitives d'une fonction f, c'est trouver les fonctions F dont la dérivée est f. Mais ce n'est pas toujours aussi simple. Par exemple, quelle serait votre réponse si

on vous demande de calculer $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+4t-t^2}}\,dt$.
Dans certains cas on peut utiliser la méthode d'intégration par parties ou de changement de variable.

1.3.1 Intégration par parties

Si u et v sont des fonctions définies et dérivables sur un même intervalle, on a $(uv)' = u'v + uv'$ d'après la règle de dérivation d'un produit. Si les fonctions u' et v' sont continues, il en va de même de $u'v, uv'$ et $(uv)'$ et donc en prenant les primitives, il vient

$$uv = \int (uv)'(x)\,dx = \int (u'v)(x)\,dx - \int (uv')(x)\,dx,$$

ou encore

$$\int u'(x)v(x)\,dx = (uv)(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$$

Cette dernière formule est appelée **formule d'intégration par parties.**
Si u et v sont de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = (uv)(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx,$$

où la notation $u(x)\Big|_a^b$ est par définition $u(x)\Big|_a^b = u(b) - u(a)$.

Remarque 1.3.1. *Lorsqu'on veut appliquer la formule d'intégration par parties pour calculer une primitive $\int f(x)\,dx$, ou une intégrale, il faut choisir adroitement des fonctions u et v de sorte que $f = u'v$ et qu'une primitive $\int u(x)v'(x)\,dx$ se calcule facilement.*

Exemples.

1. Calcul de $\int x^n \ln x\,dx$, où $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$. Posons $v(x) = \ln x$ et choisissons la fonction u de sorte que $u'(x) = x^n$. Nous avons

$$\begin{array}{ll} u'(x) = x^n & u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x}, \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(n+1)} + c \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\big(\ln x - \frac{1}{n+1}\big) + c,\ \ c \text{ une constante de } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Calculer la primitive de $\arctan x$. Intégrons par parties en posant

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 & u(x) &= x \\ v(x) &= \arctan x & v'(x) &= \tfrac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx.$$

La dernière primitive est de la forme $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx$ qui est égale à $\ln |u(x)| + c$, d'où

$$\int \arctan x \, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.
On pose

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & u(x) &= e^x \\ v(x) &= x^2 & v'(x) &= 2x. \end{aligned}$$

par application de la formule d'intégration par parties on obtient

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 x e^x \, dx.$$

On refait une deuxième intégration par parties pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x e^x \, dx$, en posant

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^x & u(x) &= e^x \\ v(x) &= x & v'(x) &= 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Finalement

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2 = e - 2.$$

1.3.2 Changement de variable

Théorème 1.3.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe C^1. Pour tout $a, b \in J$, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$.

Preuve. Comme F est une primitive de f alors $F' = f$, et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

D'où $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'$.
Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F \circ \varphi\big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$□

Remarque 1.3.3. *Comme φ est une bijection de J sur $\varphi(J)$, sa réciproque φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand φ s'annule. Si φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \varphi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.*
L'utilisation de la formule (1.7) *pour évaluer une intégrale repose sur un choix approprié de la nouvelle variable $t = \varphi^{-1}(x)$.*

Exemples.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ en considérant le changement de variable $t = e^x$.
D'abord l'application $x \mapsto e^x$ est bijective et continue de $[1, 2]$ dans $[e, e^2]$. Sa dérivée $x \mapsto e^x$ est continue sur $[1, 2]$. Ce changement de variable est donc légitime.
On procède en 3 étapes :
-Les bornes de l'intégrale : quand $x = 1$, la variable $t = e$, et pour $x = 2$, on a $t = e^2$.
-La variable d'intégration : Par dérivation $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{de^x}{dx} = e^x$.
-L'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{t^2 + 1}\,dt = \arctan t\big|_e^{e^2} = \arctan(e) - \arctan(e^2).$

2. Utiliser le changement de variable $t = x^2+1$, pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$.
On a $\dfrac{dt}{dx} = 2x$. Pour $x = 0$ on a $t = 1$ et pour $x = 1$ on a $t = 2$.
D'où
$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^2 \sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

3. Déterminer la primitive $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ à l'aide du changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$.
La fonction φ est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. Sa fonction réciproque est $\varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$.
Nous avons
$$\frac{dx}{dt} = \cos t,$$
et
$$\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t \text{ (puisque } \cos t \geq 0 \text{ sur } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \big(\cos(2t)+1\big)\,dt = \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2} + c.
\end{aligned}$$

1.4 Primitives des fractions rationnelles

Définition 1.4.1. *On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes à coefficient réels et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Exemples. $\dfrac{x+1}{x^3+x^2-1}, \dfrac{x^5-2x^4+x^2+6}{x^3+2}$ sont des fractions rationnelles.

Nous commençons par exposer les fractions rationnelles particulières dont on sait calculer une primitive. On les appelle **les éléments simples**. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b, c, α, β des réels quelconques.

Définition 1.4.2. *Un élément simple de première espèce est une fraction rationnelle de la forme* $\dfrac{\lambda}{(x+a)^n}$*, avec* $\lambda, a \in \mathbb{R}$*, et* $n \in \mathbb{N}^*$.

- Ses primitives :

$$\int \frac{\lambda}{(x+a)^n}\,dx = \begin{cases} \lambda \ln|x+a| + k, & \text{si } n = 1, \\ \dfrac{1}{1-n}\dfrac{\lambda}{(x+a)^{n-1}} + k, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

avec k une constante dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4.3. *Un élément simple de deuxième espèce est une fraction rationnelle de la forme* $\dfrac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$*, avec* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Les éléments simples de deuxième espèce sont plus difficile à intégrer. La technique conseillée est la suivante :

1) On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée $2ax+b$ du trinôme ax^2+bx+c,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n} &= \frac{\frac{\alpha}{2a}(2ax+b)+\beta-\frac{\alpha}{2a}b}{(ax^2+bx+c)^n} \\
&= \frac{\alpha}{2a}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} + (\beta-\frac{\alpha}{2a}b)\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}.
\end{aligned}$$

Le premier terme de la dernière expression est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)^n}$. Ces primitives sont donc

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx = \begin{cases} \ln|ax^2+bx+c|+k, & \text{si } n=1, \\ \frac{1}{1-n}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+k, & \text{si } n>1. \end{cases}$$

2) Reste à calculer $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$. Pour cela, on commence par mettre le trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}).$$

On effectue ensuite le changement de variable

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}(x+\frac{b}{2a}),$$

qui ramène le calcul à celui d'une primitive du type :

$$I_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

- Pour $n=1$, la primitive $I_1 = \arctan t + k$.
- Pour $n>1$, I_n se calcule en utilisant la relation de récurrence

$$2(n-1)I_n = \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}.$$

Considérons maintenant une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ à coefficient réels. Cette dernière détermine une fonction $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ définie sur $\mathbb{R} - \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, où les a_i sont les racines du polynôme Q, appelées **pôles de la fraction rationnelle.** Toute fraction rationnelle possède une primitive sur un intervalle I ne contenant aucun de ses pôles puisqu'elle est continue sur cet intervalle. **Les différentes étapes pour calculer une primitive de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sont les suivantes :**

Etape 1 : Si $deg(P) \geq deg(Q)$, on effectue la division euclidienne de P sur Q suivant les puissances décroissantes :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

avec $deg(R) < deg(Q)$, et E est un polynôme appelé la partie entière de la fraction rationnelle.

Exemple.

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1} = x^2-2x+3 - \frac{4x+6}{x^2+2x+1}.$$

Si $deg(P) < deg(Q)$, on passe à l'étape 2.

Etape 2 : On factorise le polynôme Q en polynôme irréductibles, c'est à dire en polynômes de degré 1 de la forme $(x+a)$ et/ou de degré 2 sans racines réelles de la forme x^2+bx+c avec $b^2-4c<0$:

$$Q(x) = \alpha(x-x_1)^{n_1}\cdot(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_\ell)^{n_\ell}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\cdots(x^2+b_{\ell'}x+c_{\ell'})^{m_{\ell'}},$$

où les x_i sont les racines réelles de Q, la puissance n_i est la multiplicité de x_i, et α est une constante réelle.

Exemple.

$Q(x) = (x+2)^3(x^2+2x+3)$, possède une racine réelle -2 de multiplicité 3.

Etape 3 : Décomposition de la fraction $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ en éléments simples :

à un pôle x_i de multiplicité n_i de la fraction $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, il lui correspond une décomposition en éléments simples de première espèce de la forme :

$$\frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\cdots+\frac{A_i}{(x-x_i)^{n_i}},$$

où $A_1,\cdots,A_i$ sont des coefficients réels.

A un polynôme irréductible de degré 2 : $(x^2+b_ix+c_i)^{m_i}$, avec $b^2-4c<0$, il lui correspond une décomposition en éléments simples de deuxième espèce de la forme :

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+b_ix+c_i)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+b_ix+c_i)^2}+\cdots+\frac{M_ix+N_i}{(x^2+b_ix+c_i)^{m_i}},$$

où $M_1,N_1,\cdots,M_i,N_i$ sont des coefficients réels.

Exemples.

1) : Considérons la fraction rationnelle $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^3(x-1)}$. D'abord on observe que deg(numérateur)<deg(dénominateur), par conséquent la fraction se décompose en éléments simples de première espèce comme suit :

$$\frac{x^2-4}{(x+2)^3(x-1)} = \frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3}+\frac{B}{x-1}. \tag{1.8}$$

Pour déterminer le coefficient A_3, on multiplie les deux membres de (1.8) par $(x+2)^3$ puis on fait $x \longrightarrow -2$, on trouve $A_3 = 0$.

Pour déterminer le coefficient B, on multiplie les deux membres de (1.8) par $(x-1)$ puis on fait $x \longrightarrow 1$, on trouve $B = -\frac{1}{9}$.

Pour déterminer le coefficient A_1, on multiplie les deux membres de (1.8) par $(x+2)$ puis on fait $x \to +\infty$. On trouve $A_1+B=0$, d'où $A_1 = \frac{1}{9}$.

Pour déterminer le coefficient A_2, on donne une valeur quelconque à x (à part -2 et 1). On choisit $x=0$ par exemple. On trouve $\dfrac{1}{2} = \dfrac{A_1}{2}+\dfrac{A_2}{4}+\dfrac{A_3}{8}-B$, d'où $A_2 = \dfrac{4}{3}$.

2) : Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{x^5+1}{(x^2+x+1)^3}.$$

Le deg(numérateur)(=5) < deg(dénominateur)(=6), et $\Delta(x^2+x+1) = -3 < 0$, par suite la décomposition a la forme suivante :

$$\frac{x^5+1}{(x^2+x+1)^3} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+x+1)^3},$$

où M_i, N_i, sont des réels à déterminer. Un moyen efficace pour déterminer ces coefficients est d'effectuer la division euclidienne suivant les puissances décroissantes de x^5+1 par x^2+x+1, puis du quotient obtenu par x^2+x+1, on trouve

$$\frac{x^5+1}{(x^2+x+1)^3} = \frac{x-2}{x^2+x+1} + \frac{x+3}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x}{(x^2+x+1)^3}.$$

3) : La fraction rationnelle $\dfrac{1}{(x+3)(x-1)^3(x^2-3x+5)}$ admet la décomposition

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} + \frac{Mx+N}{x^2-3x+5},$$

où A, B_i, M, N sont des coefficients réels à déterminer.

Etape 4 : On n'a donc plus qu'à trouver les primitives pour les deux types d'éléments simples.

Exercice. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2-3x+2)},$$

puis calculer

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2-3x+2)}\,dx.$$

Même question pour la fraction rationnelle

$$\frac{3x+1}{(x+5)^2(x^2-x+2)}.$$

1.5 Primitives des fonctions irrationnelles

Dans cette section, seront étudiées uniquement certaines fonctions irrationnelles dont les intégrales se transforment par des changements de variable appropriés à des intégrales de fonctions rationnelles que nous savons intégrer.

1.5.1 Primitives de type $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_i}{n_i}})\, dx$

Ici R est une fonction rationnelle et $x, \ldots, x^{\frac{m_i}{n_i}}, i \in \mathbb{N}^*$ sont ses arguments.

• On note par k le dénominateur commun des fractions $\frac{m_j}{n_j}, 0 \leq j \leq i$.

• Avec le changement de variable $x = t^k$, la fonction à intégrer se transforme en une fonction rationnelle de t.

Exemple. Calculer $I := \displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1}\, dx$.
Le dénominateur commun des fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ est 4. On effectue donc le changement de variable $x = t^4$. Ceci implique que $dx = 4t^3 dt$. Nous obtenons ainsi

$$I = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\, dt = 4\int (t^2 - \frac{t^2}{t^3+1})\, dt = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}\ln(t^3+1) + c = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\ln(x^{\frac{3}{4}}+1) + c,$$

où c est une constante réelle quelconque.

1.5.2 Primitives de type $\int R\big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\tilde{d}}}\big)\, dx,\ a\tilde{d} - cb \neq 0$

Posons $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+\tilde{d}}}$. On obtient $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+\tilde{d}}, x = \dfrac{\tilde{d}t^n - b}{a - ct^n}$ et $dx = \dfrac{n(a\tilde{d} - cb)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$.
D'où

$$\int R\big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\tilde{d}}}\big)\, dx = \int R\big(\frac{\tilde{d}t^n - b}{a - ct^n}, t\big)\frac{n(a\tilde{d} - cb)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \int R^*(t)\, dt,$$

où R^* est une fonction rationnelle de la variable t.
Exemple. Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\, dx$.
Ici $a = b = \tilde{d} = n = 1$ et $c = 0$. On pose donc $t = \sqrt{x+1}$, d'où

$$t^2 = x+1, x = t^2 - 1, dx = 2tdt,$$

on se ramène donc à calculer l'intégrale suivante

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = 2\int \frac{t}{t+1}\, dt.$$

Cette dernière est la primitive d'une fraction rationnelle :

$$2\int \frac{t}{t+1}\, dt = 2\int dt - \int \frac{1}{1+t} = 2t - 2\ln(1+t) + c.$$

On termine par remplacer t en fonction de x pour obtenir

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}\, dx = 2\sqrt{1+x} - 2\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) + c.$$

1.5.3 Primitives de type $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Ici les coefficients a, b et c sont dans $\mathbb{R}$ et $a \neq 0$, sinon on tombe sur un cas particulier de la sous-section précédente.
L'intégrale $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ peut être ramenée à celle d'une fonction rationnelle par **les changements de variables d'Euler**.

1) : **Première substitution d'Euler :** si $\Delta := b^2 - 4ac > 0$, le trinôme ax^2+bx+c admet donc deux racines réelles distinctes notées α et β. On pose

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$

soit

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2} \text{ et } dx = \frac{2at(\beta-\alpha)}{(a-t^2)^2}dt.$$

Exemple. Calculons $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$.
On a : $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. On pose donc $\sqrt{(x+1)(x-2)} = (x+1)t$. Ceci donne

$$(x-2) = (x+1)t^2 \Rightarrow x = \frac{2+t^2}{1-t^2}.$$

D'où

$$dx = \frac{6t}{(1-t^2)^2}dt,$$

par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Cette dernière est l'intégrale d'une fraction rationnelle qu'on sait calculer :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}} &= \int \frac{2dt}{1-t^2} \\ &= \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} \\ &= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}\right| + c. \end{aligned}$$

2) : **Deuxième substitution d'Euler :** si $a > 0$, on pose

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t.$$

Prenons, le signe + devant $\sqrt{a}$, on a alors

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2.$$

Ceci donne

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t},$$

ainsi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} + t.$$

On observe que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ s'est ramenée à une fonction rationnelle de t. Après calcul, dx s'exprime également par une fonctions rationnelles de t. L'intégrale est donc ramenée à celle d'une fonction rationnelle de t.

Exemple. Calculons les primitives $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

Ici $a = 1$, on pose donc $\sqrt{x^2+5} = x + t$, ceci donne

$$x^2 + 5 = x^2 + 2xt + t^2 \Rightarrow x = \frac{5 - t^2}{2t}$$

D'où

$$dx = \frac{-5 - t^2}{2t^2}dt \text{ et } \sqrt{x^2+5} = \frac{5 - t^2}{2t} + t = \frac{5 + t^2}{2t},$$

Par substitution on trouve

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} &= -\int \frac{2t}{5+t^2}\frac{5+t^2}{2t^2}dt \\
&= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c \\
&= -\ln|\sqrt{x^2+5} - x| + c.
\end{aligned}$$

Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k^2}}$, où k est une constante de $\mathbb{R}$.

3) : **Troisième substitution d'Euler :** si $c > 0$, posons

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c},$$

ceci donne

$$x = \frac{\pm\sqrt{c}t - b}{a - t^2}$$

Exemple. Calculer $\displaystyle I := \int \frac{1 - \sqrt{x^2+x+1}}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Ici, $c = 1$, on pose

$$\sqrt{x^2+x+1} = xt + 1 \Rightarrow x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \text{ soit } dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1-t^2)^2}.$$

Par substitution on trouve

$$I = \int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -\int dt + \int \frac{dt}{1-t^2}.$$

Exercice : Calculer les intégrales ou primitives suivantes

1) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx.$

2) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx, \quad \int \sin^4 x\,dx,$
Indication : utiliser la formule $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

3) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x}.$

5) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,dx.$

Bibliographie

[1] K. Allab, *Eléments d'analyse, fonctions d'une variable réelle,* Tome 1, OPU, 2007.

[2] K. Allab, *Eléments d'analyse, fonctions d'une variable réelle,* Tome 2, OPU, 2007.

[3] F. Liret, D. Martinet, *Mathématiques pour le DEUG, Analyse* 1^{re} *année*, Dunod, Paris, 1997.

[4] J.-M. Monier, *"Analyse 1", "Analyse 2", (série « j'intègre » / Monier, 3e édition*, Dunod, 1999.

[5] *exo7.emath.fr/cours/ch_int.pdf*.

[6] M. Hasler, *Cours de mathématiques 2*, 2002.