TD 5
Solution

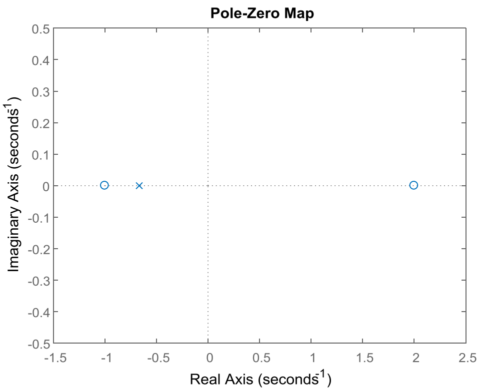
Exercice 1:

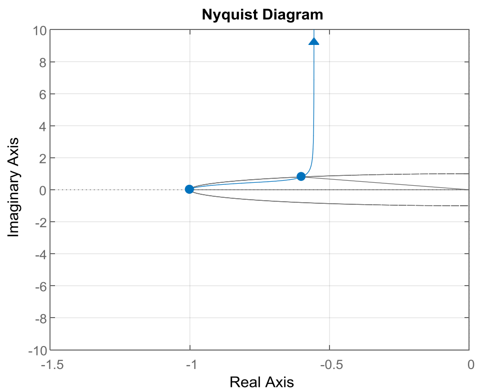
Dans cet exercice, on utilise le critère des pôles pour étudier la stabilité car les degrés des pôles dominant des FTs données sont ≤ 3.

1. $G1(p) = \frac{(p-2)(p+1)}{3p+2}$

Les pôles	*Les Zéros*
$p = -\frac{2}{3} < 0$	$z1 = 2 \quad z2 = -1$
Système instable (le pôle se trouve au demi-plan gauche et le nombre des zéros et supérieur au nombre des pôles)	

Lieu des racines:

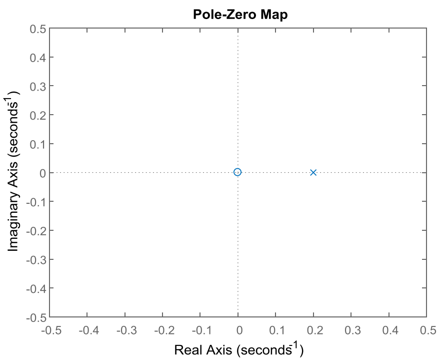


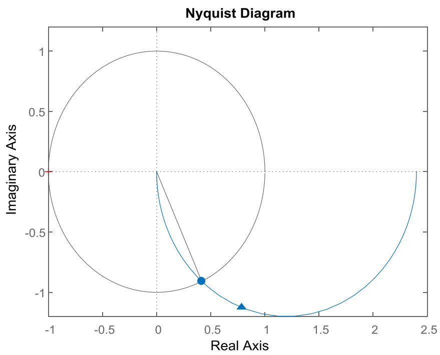


2. $G2(p) = \frac{12p}{5p-1}$

Les pôles	*Les Zéros*
$p = \frac{1}{5} > 0$	$z = 0$
Système instable (le pôle se trouve au demi-plan droit)	

Lieu des racines:

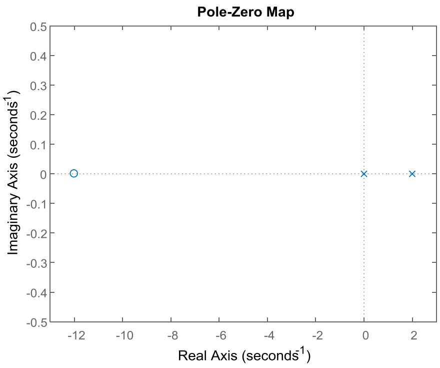


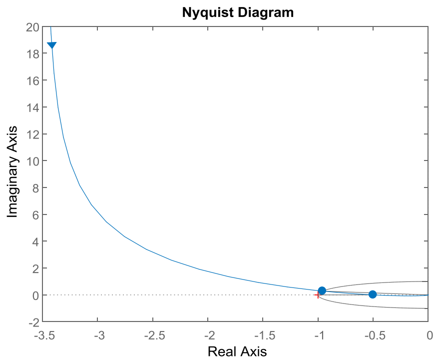


3. $G3(p) = \frac{(p+12)\cancel{(p+1)}}{(p-2)\cancel{(p+1)}p}$

Les pôles	***Les Zéros***
$p1 = 2 > 0$ $p2 = 0$	$z = -12$
Système instable (un pôle se trouve au demi-plan droit)	

<u>Lieu des racines:</u>

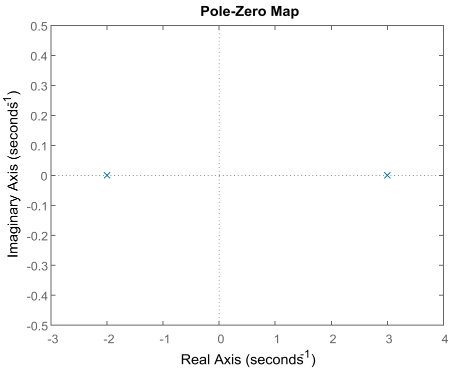


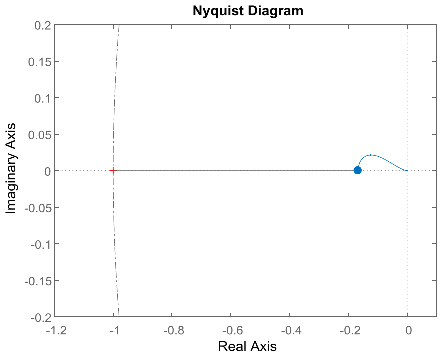


4. $G4(p) = \frac{1}{p^2-p-6}$

Les pôles	***Les Zéros***
$p1 = 3 > 0$ $p2 = -2 < 0$	
Système instable (un pôle se trouve au demi-plan droit)	

<u>Lieu des racines:</u>

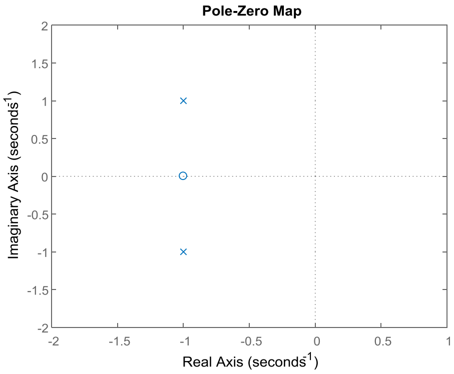


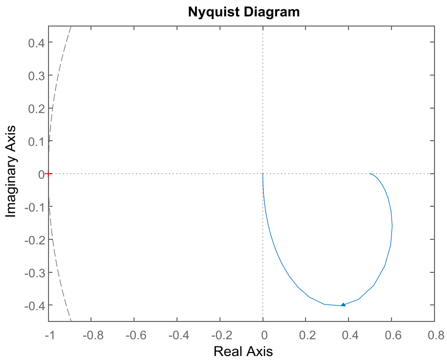


5. $G5(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+2}$

Les pôles	***Les Zéros***
$p1 = -1 - j1 < 0$ $p2 = -1 + j1 < 0$	$z = -1$
Système stable (tous les pôle se trouve au demi-plan gauche)	

<u>Lieu des racines:</u>





<u>Exo 2:</u>

Rappel de Critère de Routh-Hurwitz:

Le système est stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne de la table de Routh sont positifs.

Poser	s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
	s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
Calculer	s^{n-2}	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$
	s^{n-3}	$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	s^0	h_1	h_2	h_3

$$H1(p) = \frac{p + 0.5}{p^3 + 2p^2 + p + 5}$$

p^3	1	1	0
p^2	2	5	0
p^1	-3/2	0	0
p^0	5	0	0

Le coefficient de la 3eme ligne de la 1^{ere} colonne est <u>négatif</u>

$\rightarrow$ *le système est instable*

$$H2(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^3 + 6p^2 + 2p + 1}$$

p^4	1	6	1	0
p^3	2	2	0	0
p^2	5	1	0	0
p^1	8/5	0	0	0
p^0	1	0	0	0

Tous les coefficients de la 1^{ere} colonne sont <u>positifs</u> → *le système est stable*

$$H3(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 4p + k}$$

p^3	1	4	0
p^2	2	k	0
p^1	(8-k)/2	0	0
p^0	k	0	0

Condition de stabilité $\begin{cases} \frac{8-k}{2} > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 8 \\ k > 0 \end{cases}$

le système est stable si: $0 < k < 8$

<u>Exercice 3:</u>

<u>Rappel:</u>

Marge de phase $M\varphi = \varphi(j\omega_{c0}) + 180°$

où ω_{c0} est la pulsation de coupure à 0 dB sur le plan de Bode et à 1 sur le plan de Nyquist

Marge de gain $MG_{dB} = 20 log G(j\omega_{-\pi})$

où $\omega_{-\pi}$ est la pulsation dont la phase est à -180° .

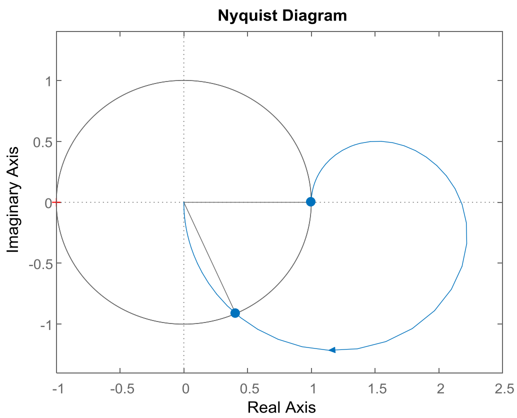
I)

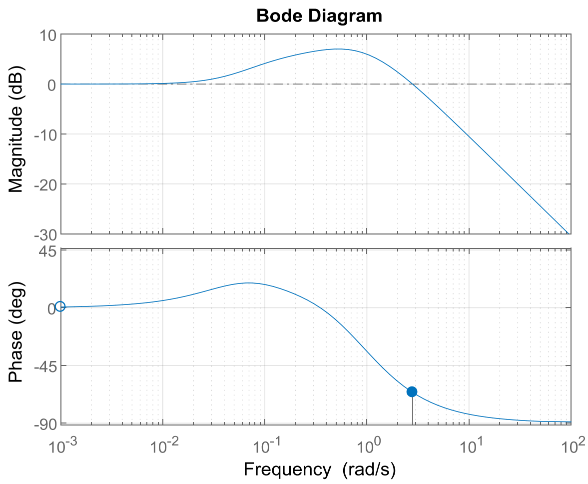
$$T1(p) = \frac{(1+3p)(1+20p)}{(1+p)(1+2p)(1+10p)} = \frac{1 + 23p + 60p^2}{1 + 13p + 32p^2 + 20p^3}$$

$$T1(j\omega) = \frac{1 - 60\omega^2 + j23\omega}{1 - 32\omega^2 + j(13\omega - 20\omega^3)}$$
$$= \frac{(1 - 60\omega^2 + j23\omega)(1 - 32\omega^2 - j(13\omega - 20\omega^3))}{(1 - 32\omega^2)^2 + (13\omega - 20\omega^3)^2}$$

$$\begin{cases} \varphi = arctg\dfrac{-(13\omega - 20\omega^3) - (13\omega - 20\omega^3)60\omega^2 + 23\omega(1 - 32\omega^2)}{1 - 32\omega^2 - (1 - 32\omega^2)60\omega^2 + 23\omega(13\omega - 20\omega^3)} \\ Re = \dfrac{1 - 32\omega^2 - (1 - 32\omega^2)60\omega^2 + 23\omega(13\omega - 20\omega^3)}{(1 - 32\omega^2)^2 + (13\omega - 20\omega^3)^2} \\ Im = \dfrac{-(13\omega - 20\omega^3) - (13\omega - 20\omega^3)60\omega^2 + 23\omega(1 - 32\omega^2)}{(1 - 32\omega^2)^2 + (13\omega - 20\omega^3)^2} \end{cases}$$

ω	0	0.1	0.35	0.5	$+\infty$
Re	1	1.5	2.2	2.22	0
Im	0.02	0.5	0	-0.34	0





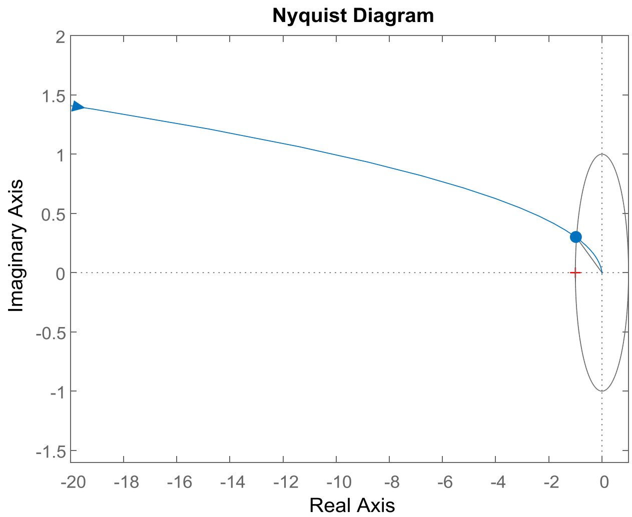
$$\omega_{c0} = 2.8\, rad/s \qquad M\varphi 1 = 114°$$
$$\omega_{-\pi} = non\ définie \qquad MG1 = \infty \quad \rightarrow système\ stable$$

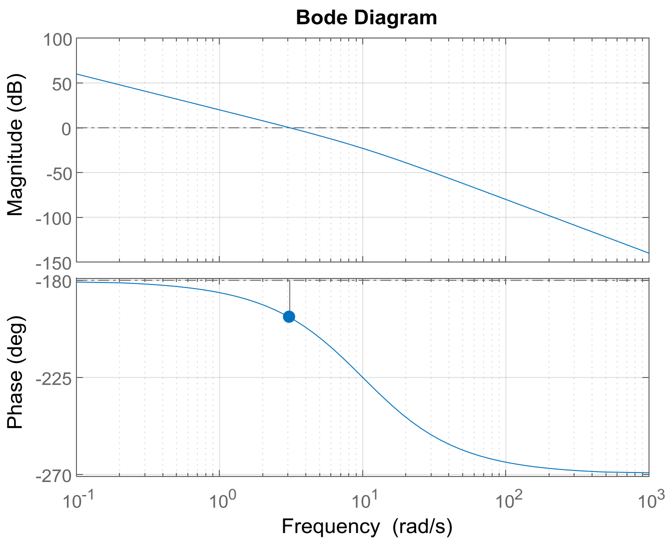
II)

$$T2(p) = \frac{10}{p^2(1 + 0.1p)} = \frac{10}{p^2 + 0.1p^3}$$

$$T2(j\omega) = \frac{10}{-\omega^2 - j0.1\omega^3} = \frac{10(-\omega^2 + j0.1\omega^3)}{\omega^4 + 0.01\omega^6}$$

$$
\begin{cases}
\varphi = arctg\dfrac{0.1\omega^3}{-\omega^2} = arctg(-0.1\omega) \\
Re = \dfrac{-10\omega^2}{\omega^4 + 0.01\omega^6} = \dfrac{-10}{\omega^2 + 0.01\omega^4} \\
Im = \dfrac{\omega^3}{\omega^4 + 0.01\omega^6} = \dfrac{1}{\omega + 0.01\omega^3}
\end{cases}
$$





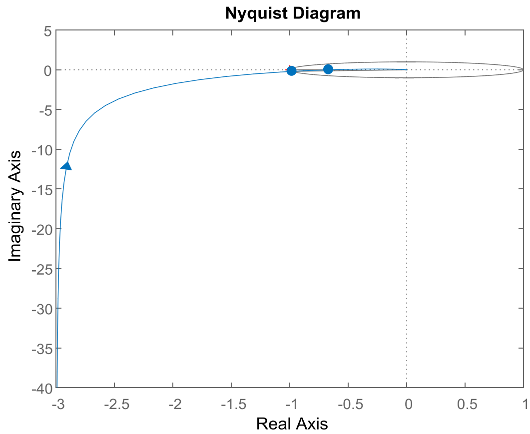
$$
\begin{matrix} \omega_{c0} = 3.09\, rad/s & M\varphi 1 = -17.2° \\ \omega_{-\pi} = 0\, rad/s & MG1 = 0 \end{matrix} \rightarrow \textit{système instable}
$$

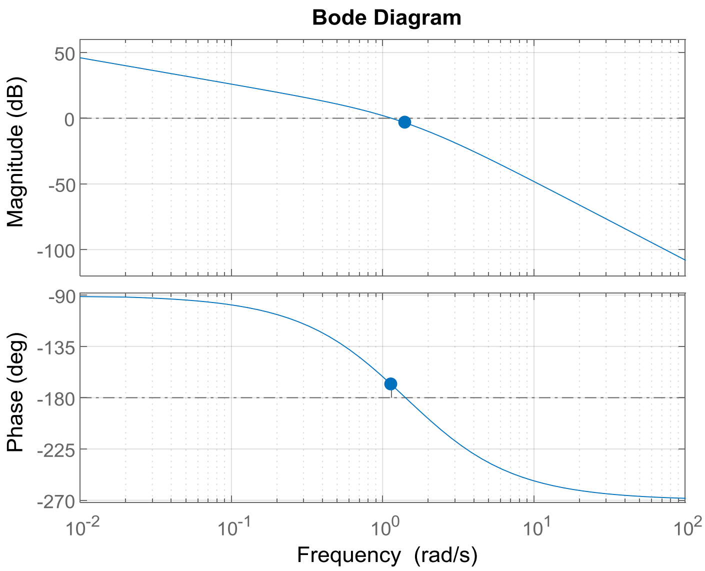
III)

$$
T3(p) = \frac{4}{p(1+p)(2+p)} = \frac{4}{p^3 + 3p^2 + 2p}
$$

$$
T3(j\omega) = \frac{4}{-\omega^2 + j(2\omega - \omega^3)} = \frac{4[-\omega^2 - j(2\omega - \omega^3)]}{\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2}
$$

$$\begin{cases} \varphi = arctg\dfrac{2\omega - \omega^3}{-\omega^2} \\ Re = \dfrac{-4\omega^2}{\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2} = \dfrac{-4}{\omega^2 + (2 - \omega^2)^2} \\ Im = \dfrac{-4(2\omega - \omega^3)}{\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2} = \dfrac{-4(2 - \omega^2)}{\omega^3 + \omega(2 - \omega^2)^2} \end{cases}$$





$$\begin{matrix} \omega_{c0} = 1.14\, rad/s & M\varphi 1 = 11.4° \\ \omega_{-\pi} = 1.41\, rad/s & MG1 = 3.52\, dB \end{matrix} \rightarrow système\ stable$$

Exercice 4: *(voir le cours chapitre 6)*

Exercice 5:

$$G_{BO}(s) = \frac{20A}{s(1 + 0.1s)} \Rightarrow G_{BF}(s) = \frac{\frac{20A}{s(1+0.1s)}}{1 + \frac{20A}{s(1+0.1s)}} = \frac{20A}{0.1s^2 + s + 20A}$$

La forme canonique de G_{BF} est:

$$G_{BF}(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{20A}s + \frac{1}{200A}s^2}$$

On peut conclure $\begin{cases} \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{20A} \\ \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{200A} \end{cases}$ avec $\xi = 0.5$

On obtient $\begin{cases} \omega_n = 20A \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$

Le système devient:

$$G_{BF}(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + 0.01s^2}$$

Erreur de position:

$$e_p = \lim_{s\to 0} s \frac{G_{BF}(s)}{s}$$

$$e_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + 0.1s + 0.01s^2} = 1$$

Erreur de vitesse:

$$e_v = \lim_{s\to 0} s \frac{G_{BF}(s)}{s^2}$$

$$e_p = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(1 + 0.1s + 0.01s^2)} = \infty$$