

Systemes linéaires

Rappel

Analyse temporelle

Système premier ordre

Système du 1^{er} ordre

□ Système régi par l'équation différentielle

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

□ Fonction de transfert

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \Rightarrow sTY(s) + Y(s) = KU(s)$$

$$H(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

T : constante de temps

K : gain statique

Pôle : $\lambda = -\frac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T > 0$

□ Réponse indicielle

◆ Entrée : signal échelon $u(t) = \Gamma(t)$

◆ Réponse du système

$$u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} . \text{ On en déduit } Y(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)}$$

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K\left(1 - e^{\lambda t}\right)$$

Caractéristiques:

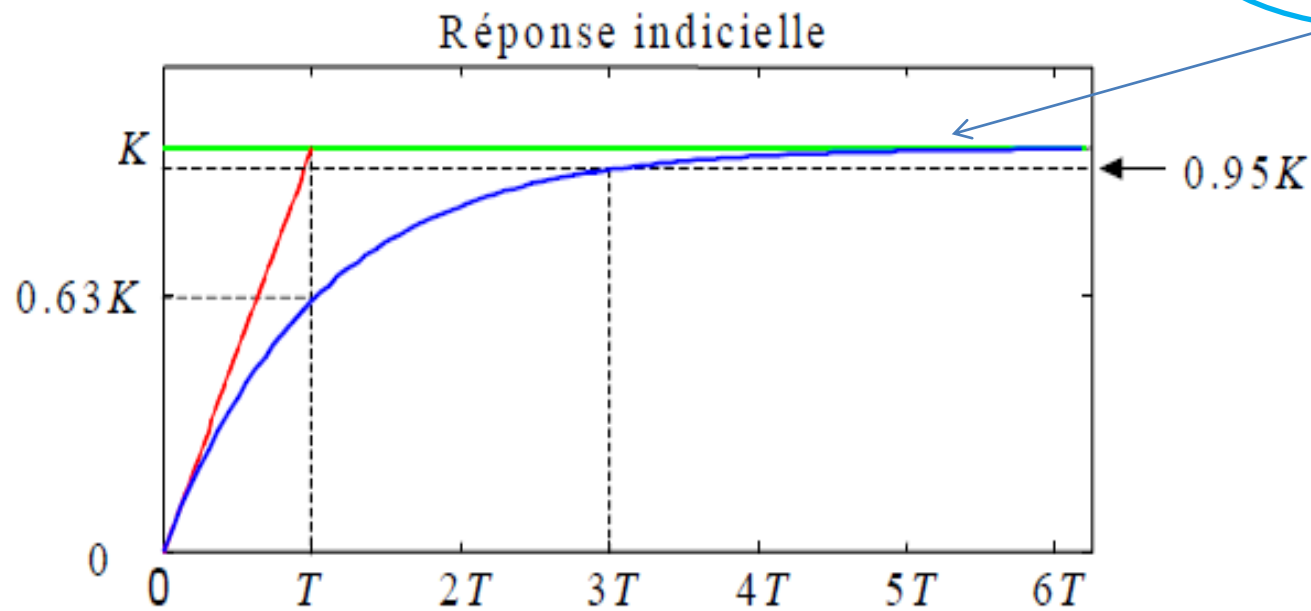
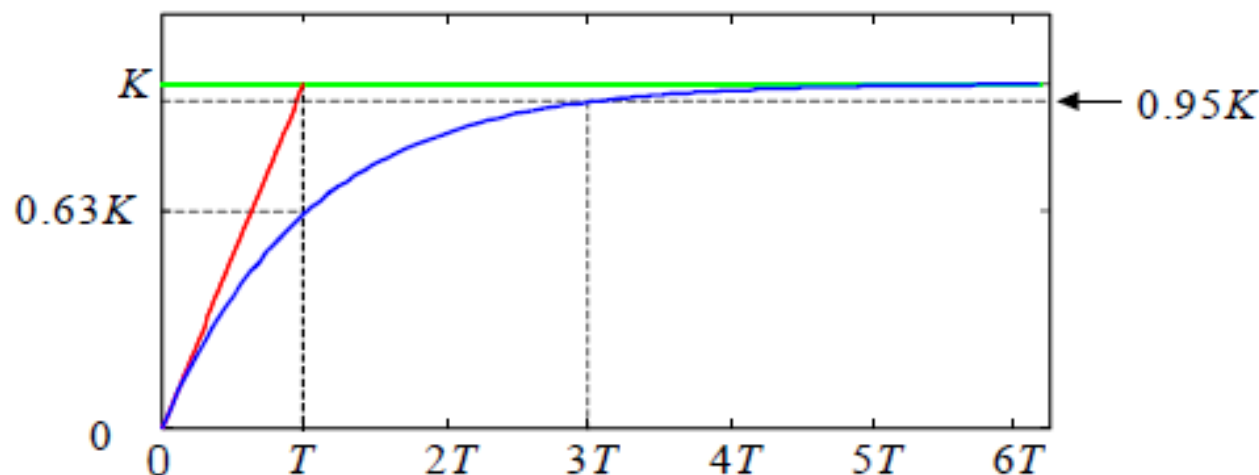


Tableau récapitulatif de l'évolution de la sortie

t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\frac{y(t)}{y_{\infty}} (\%)$	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_{∞} : valeur de la sortie en régime permanent

Rapidité du système



◆ Temps de réponse t_r du système

t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

$$t_r \approx 3T$$

◆ Temps de montée t_m

t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\infty$ à $0.9y_\infty$

$$t_m \approx 2,2T$$

Analyse temporelle

Système second ordre

Système du 2^e ordre

- ❑ Système régi par l'équation différentielle

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

- ❑ Fonction de transfert

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \Rightarrow (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = b_0 U(s)$$

$$H(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

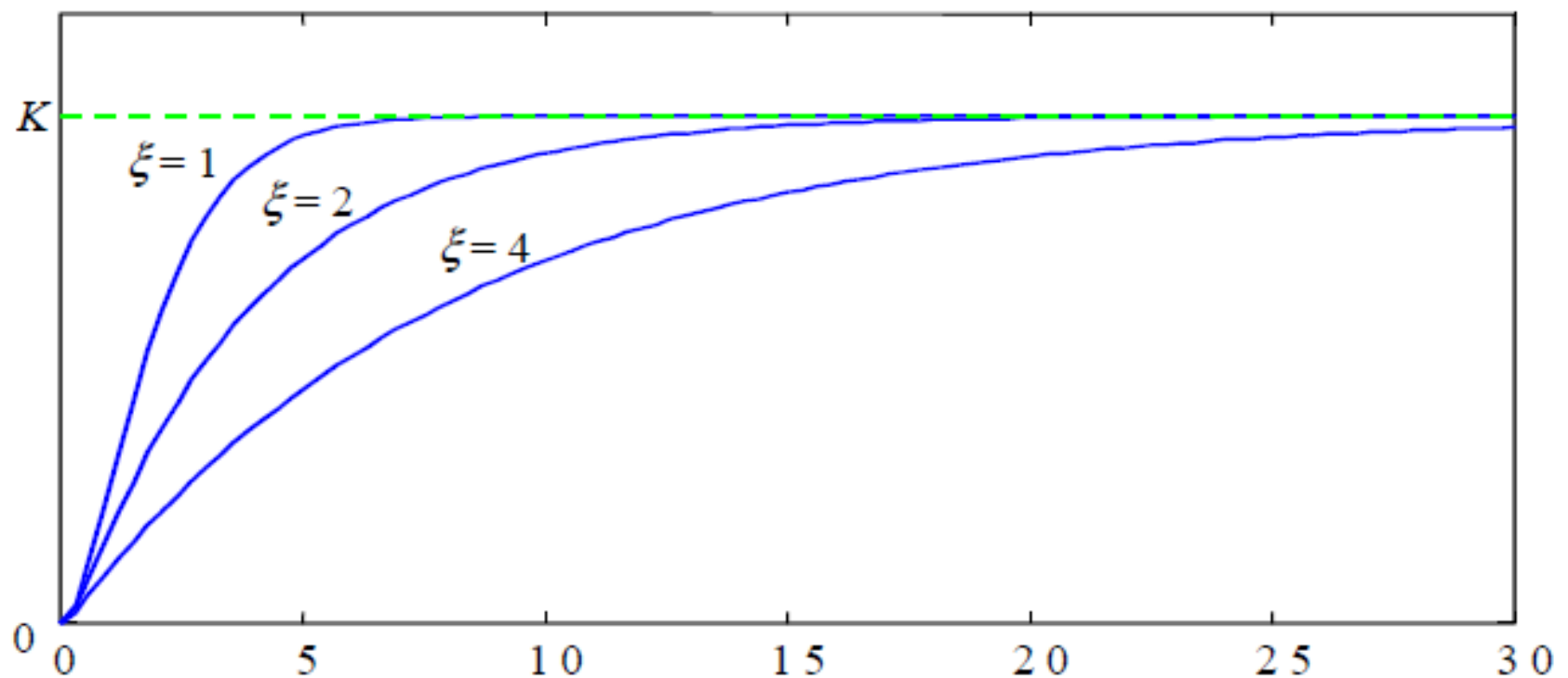
Forme canonique:

$$H(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$$

ξ : facteur d'amortissement, K : gain

ω_n : pulsation naturelle non amortie du système avec $\omega_n > 0$

□ Système apériodique ($\xi \geq 1$) : réponse indicielle



◆ Remarques

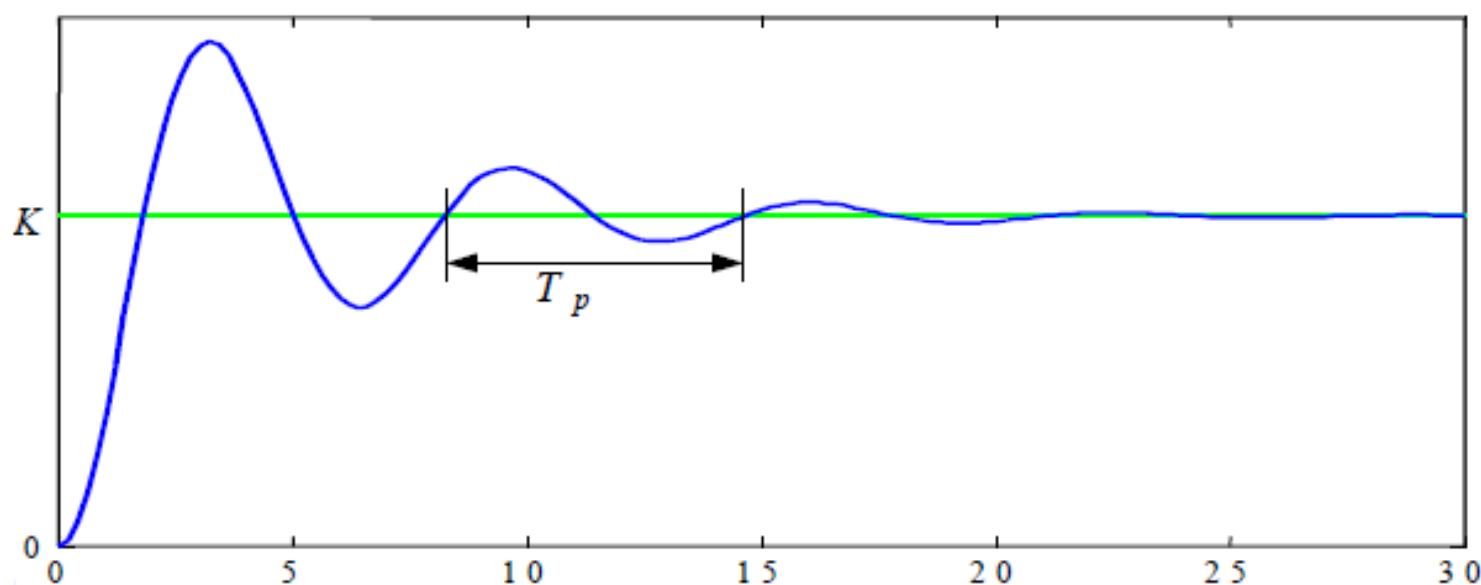
- Pente à l'origine nulle
- La réponse la plus rapide correspond à $\xi=1$
- Asymptote horizontale $y=K$

□ Système oscillatoire ($0 < \xi < 1$)

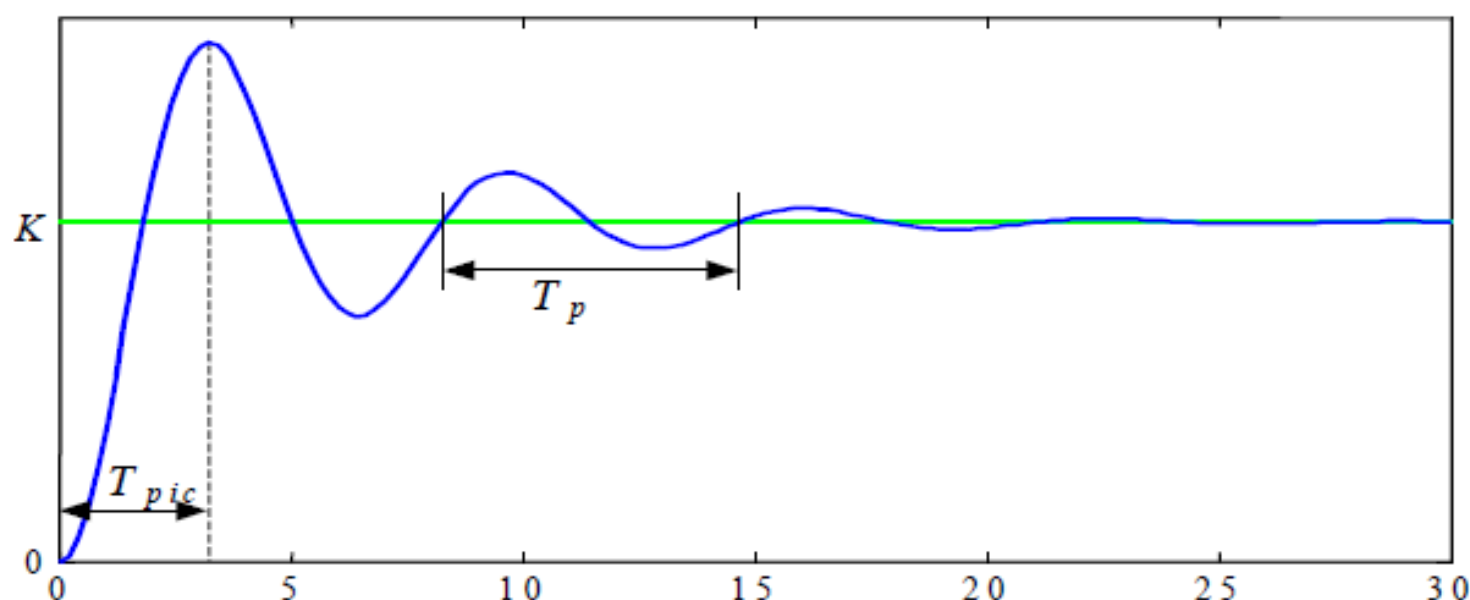
◆ Réponse indicielle

$$y(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_p t + \varphi) \right)$$

avec $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) = \arccos \xi$



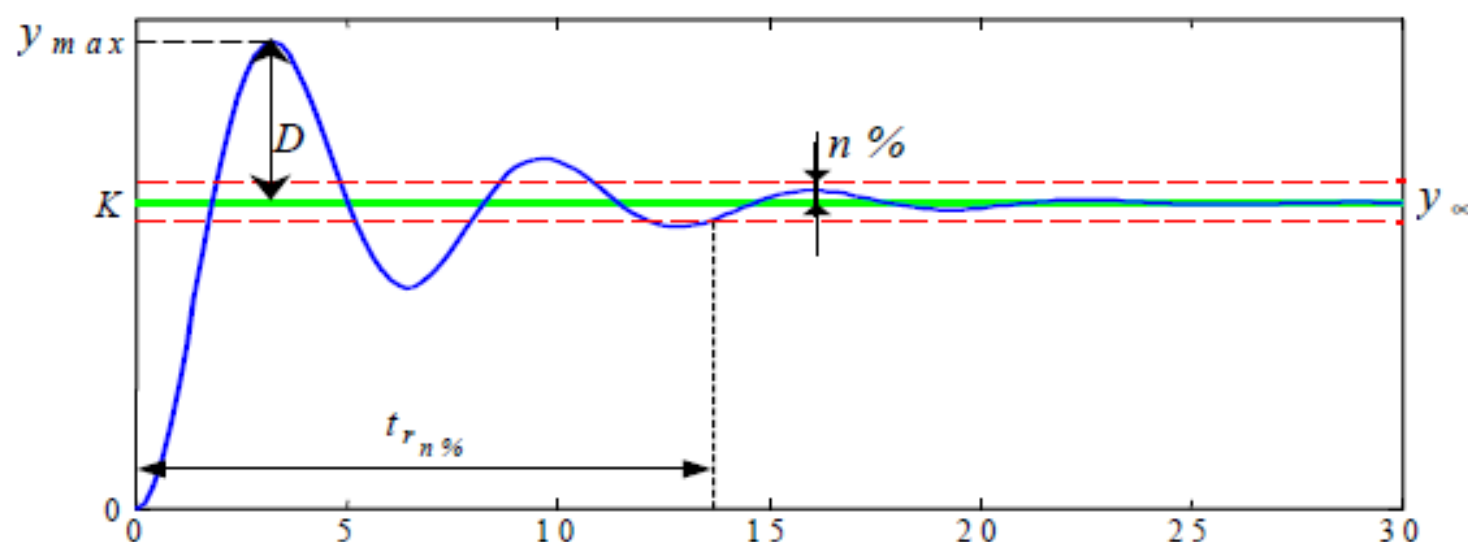
□ Système oscillatoire ($0 < \xi < 1$) : réponse indicielle



□ Caractéristiques de la réponse indicielle

- Réponse oscillatoire amortie de pulsation $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$
- Pseudo-période des oscillations $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$
- Temps de pic $T_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p}$

Système oscillatoire : caractéristiques de la réponse indicielle



➤ Dépassement (D)

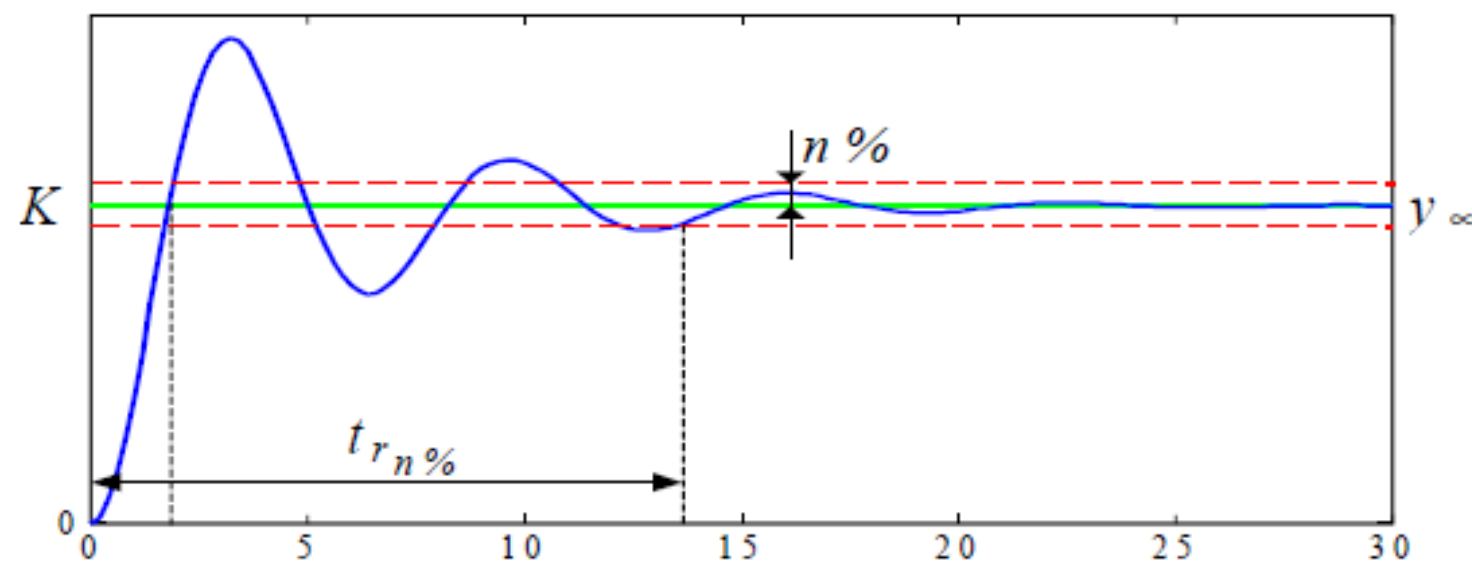
Définition : $D_{\%} = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \times 100$

y_{∞} : valeur de la sortie en régime permanent

$y_{\max}$: valeur de pic de la réponse indicielle

D est lié au coefficient d'amortissement ξ par : $D_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Système oscillatoire : caractéristiques de la réponse indicielle



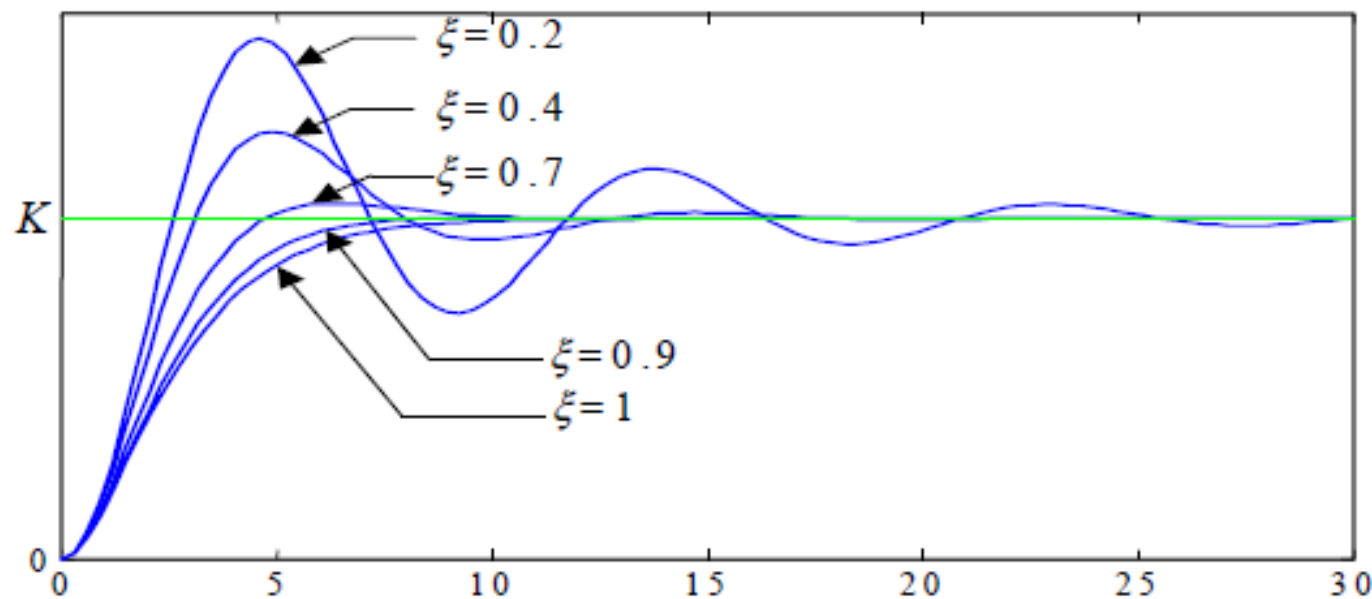
➤ Temps de réponse à $n\%$ ($t_{r_{n\%}}$)

C'est le temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $\pm n\%$ de sa valeur finale

$$t_{r_{n\%}} \approx \frac{1}{\xi \omega_n} \ln \frac{100}{n} \quad (\xi < 0.7)$$

On mesure en général le temps de réponse à 5% : $t_{r_{5\%}} \approx \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (\xi < 0.7)$

Influence du coefficient d'amortissement

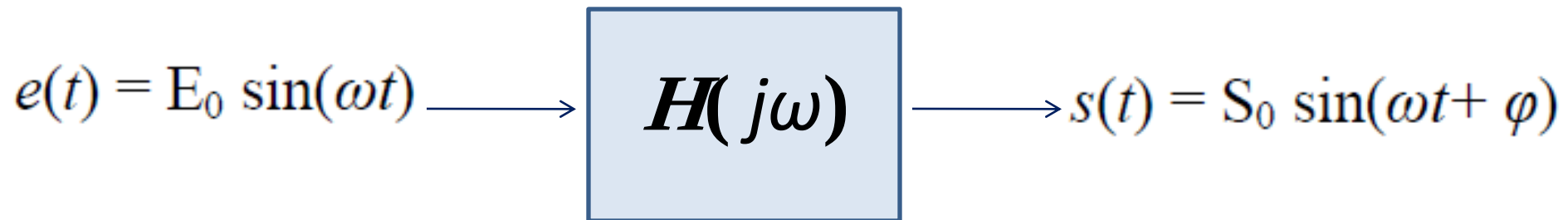


- Amortissement faible ($\xi < 0.7$) : réponse peu amortie, fortes oscillations, fort dépassement, réponse d'autant plus rapide que ξ est faible
- Amortissement fort ($\xi > 0.7$) : réponse très amortie, pas d'oscillations, dépassement à peine visible
- Amortissement $\xi = 0.7$ (souvent utilisé)
 - Dépassement $D \approx 5\%$ et $t_{r_{5\%}} \approx 3$

Analyse fréquentielle

Système premier ordre

Réponse harmonique



- $|H(j\omega)|$ est le gain du système qui est le rapport (S_0/E_0)
- $\varphi = \arg(H(j\omega))$ est le déphasage entre la sortie et l'entrée.

Diagramme de Bode (*rappel*)

Soit la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = \frac{k}{p^\alpha} \frac{\prod_i (1 + \tau_i p) \prod_j (1 + 2\xi_j p / \omega_{0_j} + p^2 / \omega_{0_j}^2)}{\prod_k (1 + \tau_k p) \prod_l (1 + 2\xi_l p / \omega_{0_l} + p^2 / \omega_{0_l}^2)}$$

Diagramme de Bode (*rappel*)

Le gain:

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

$$\begin{aligned} G_{dB} = & 20 \log_{10} |K| + \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| \\ & + \sum_j 20 \log_{10} \left| 1 - \omega^2/\omega_{0j}^2 + j\omega 2\xi_j/\omega_{0j} \right| - \alpha 20 \log_{10} |j\omega| \\ & - \sum_k 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_k| - \sum_l 20 \log_{10} \left| 1 - \omega^2/\omega_{0l}^2 + j\omega 2\xi_l/\omega_{0l} \right| \end{aligned}$$

Diagramme de Bode (*rappel*)

Le gain:

$$G_{dB} = \sum_n 20 \log_{10} \sqrt{(\operatorname{Re}|H(j\omega)|_n)^2 + (\operatorname{Im}|H(j\omega)|_n)^2}$$

$$\begin{aligned} G_{dB} = & 20 \log_{10} |K| + \sum_i 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega \tau_i^2} \\ & + \sum_j 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \omega^2 / \omega_{0j}^2\right)^2 + \left(\omega 2 \xi_j / \omega_{0j}\right)^2} - \alpha 20 \log_{10} |\omega| \\ & - \sum_k 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega \tau_k^2} \\ & - \sum_l 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \omega^2 / \omega_{0l}^2\right)^2 + \left(\omega 2 \xi_l / \omega_{0l}\right)^2} \end{aligned}$$

Diagramme de Bode (*rappel*)

La phase:

$$\varphi = \arg\{H(j\omega)\};$$

$$\begin{aligned}\varphi = & \arg(K) + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_j \arg\left(1 - \omega^2/\omega_{0j}^2 + j\omega 2\xi_j/\omega_{0j}\right) \\ & - \alpha.\arg(j\omega) - \sum_k \arg(1 + j\omega\tau_k) \\ & - \sum_l \arg\left(1 - \omega^2/\omega_{0l}^2 + j\omega 2\xi_l/\omega_{0l}\right)\end{aligned}$$

Diagramme de Bode (*rappel*)

La phase:

$$\varphi = \sum_n \left(\arctg \frac{\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{H(j\omega)\}} \right)_n$$

$$\begin{aligned} \varphi = \arctg(K) &+ \sum_i \arctg\left(\frac{\omega\tau_i}{1}\right) + \sum_j \arctg\left(\frac{\omega 2\xi_j/\omega_{0j}}{1 - \omega^2/\omega_{0j}^2}\right) - \alpha \cdot \arctg(\omega) \\ &- \sum_k \arctg\left(\frac{\omega\tau_k}{1}\right) - \sum_l \arctg\left(\frac{\omega 2\xi_l/\omega_{0l}}{1 - \omega^2/\omega_{0l}^2}\right) \end{aligned}$$

Diagramme de Bode (*rappel*)

- Si la fonction de transfert est **gain pur**:

La fonction de transfert d'un gain pur est $H(P)=K$, la fonction de transfert harmonique est donc identique : $H(j\omega)=K$.

D'où :

- Le gain en décibel : $G_{dB} = 20\log K$
- La phase : $\varphi = 0^\circ$

Diagramme de Bode (*rappel*)

➤ Si la fonction de transfert est *intégrateur* :

La fonction de transfert d'un intégrateur est de la forme : $H(p) = \frac{K}{p}$, d'où la fonction de transfert harmonique : $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$.

On en déduit :

- Le gain en décibel : $G_{dB} = 20\log(K) - 20\log(\omega)$. Ce qui correspond dans le lieu de Bode à une pente de -20 dB par décade (notée (-1)) et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega=K$.
- La phase $\varphi = -90^\circ$ car $H(j\omega)$ est un imaginaire pur.

Diagramme de Bode (*rappel*)

➤ Si la fonction de transfert est *intégrateur* :

On peut généraliser au cas où le système a pour fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p^n}$, on a alors :

- une pente (-n) (-20.n dB par décade) pour le gain
- une phase qui vaut $-90^\circ.n$

Rappel:

On appelle *décade*, l'intervalle qui sépare une fréquence f_1 d'une fréquence $f_2=10.f_1$

Diagramme de Bode (*exemple*)

- Si la fonction de transfert est **système 1^{er} ordre**:

Prenant l'exemple

$$H(p) = \frac{10}{p + 5}$$

On met le système sous forme canonique

$$H(j\omega) = \frac{10/5}{1 + j\omega/5} = \frac{2}{1 + 0.2j\omega}$$

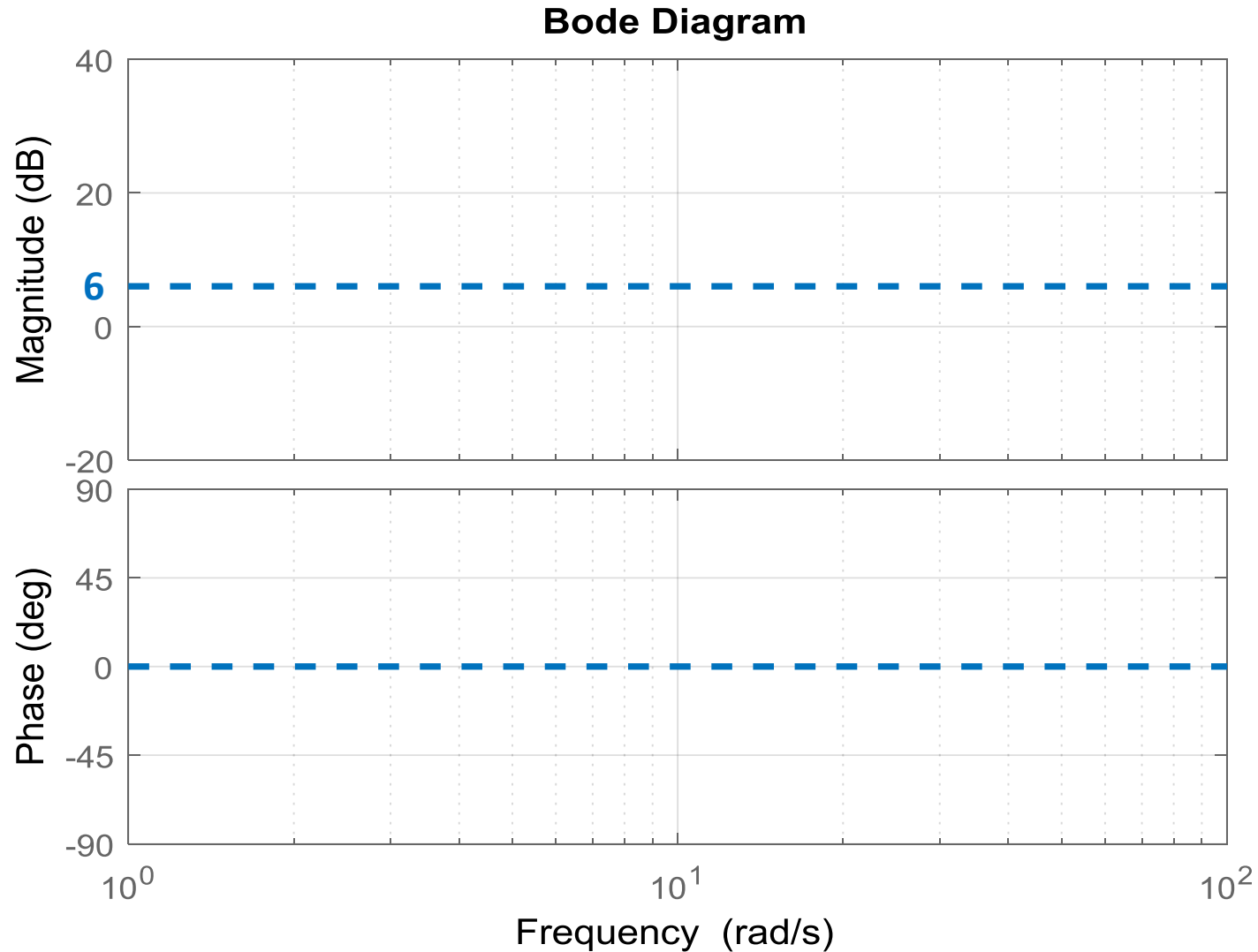
Recherche des asymptotes ($\omega_0 = 5$)

Si $\omega \ll 5 \rightarrow H(j\omega) = \frac{2}{1}$ (ω est négligeable par rapport à ω_0)

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(2) = 6 \text{ dB}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{0}{2}\right) - \arctg\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

Diagramme de Bode (*exemple*)



Première asymptote horizontale

Diagramme de Bode (*exemple*)

- Si la fonction de transfert est **système 1^{er} ordre**:

$$\text{Si } \omega \gg 5 \rightarrow H(j\omega) = \frac{2}{j\omega/5} \quad (\text{car: } 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \cong j\frac{\omega}{\omega_0})$$

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20\log_{10}(2) - 20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(5) \\ &= 6 - 20\log_{10}(\omega) + 14 = 20 - 20\log_{10}(\omega) \end{aligned}$$

(ce qui est une asymptote de pente égale à -20dB par décade).

$$\varphi = -\arctg(\omega/5) = -\arctg(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Diagramme de Bode (*exemple*)

Deuxième asymptote est une pente de -20 dB/décade qui coupe la première asymptote à 5 rad/s (pulsation de coupure)

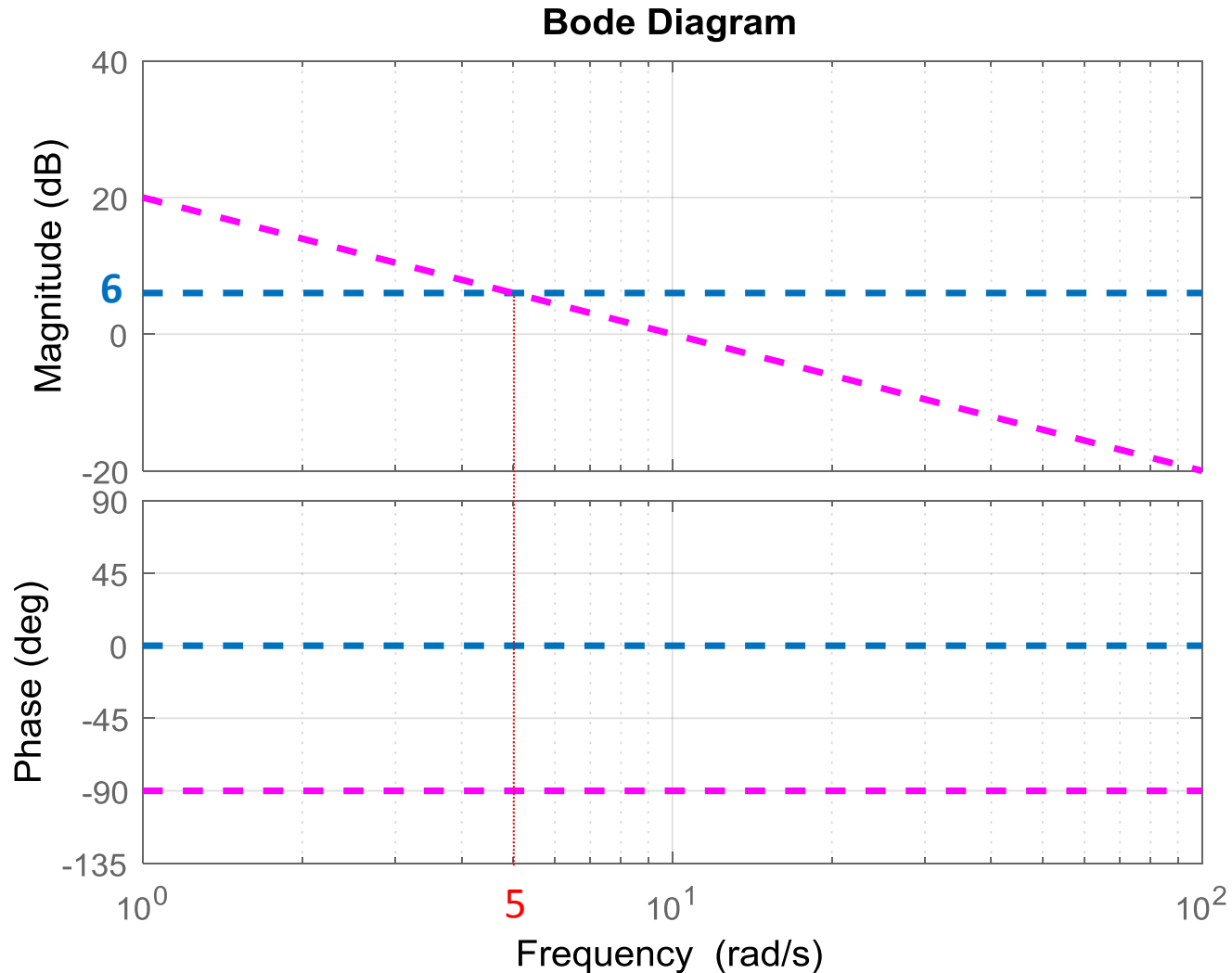


Diagramme de Bode (*exemple*)

➤ Si la fonction de transfert est **système 1^{er} ordre**:

$$\text{Si } \omega = 5 \rightarrow H(j\omega) = \frac{2}{1+j}$$

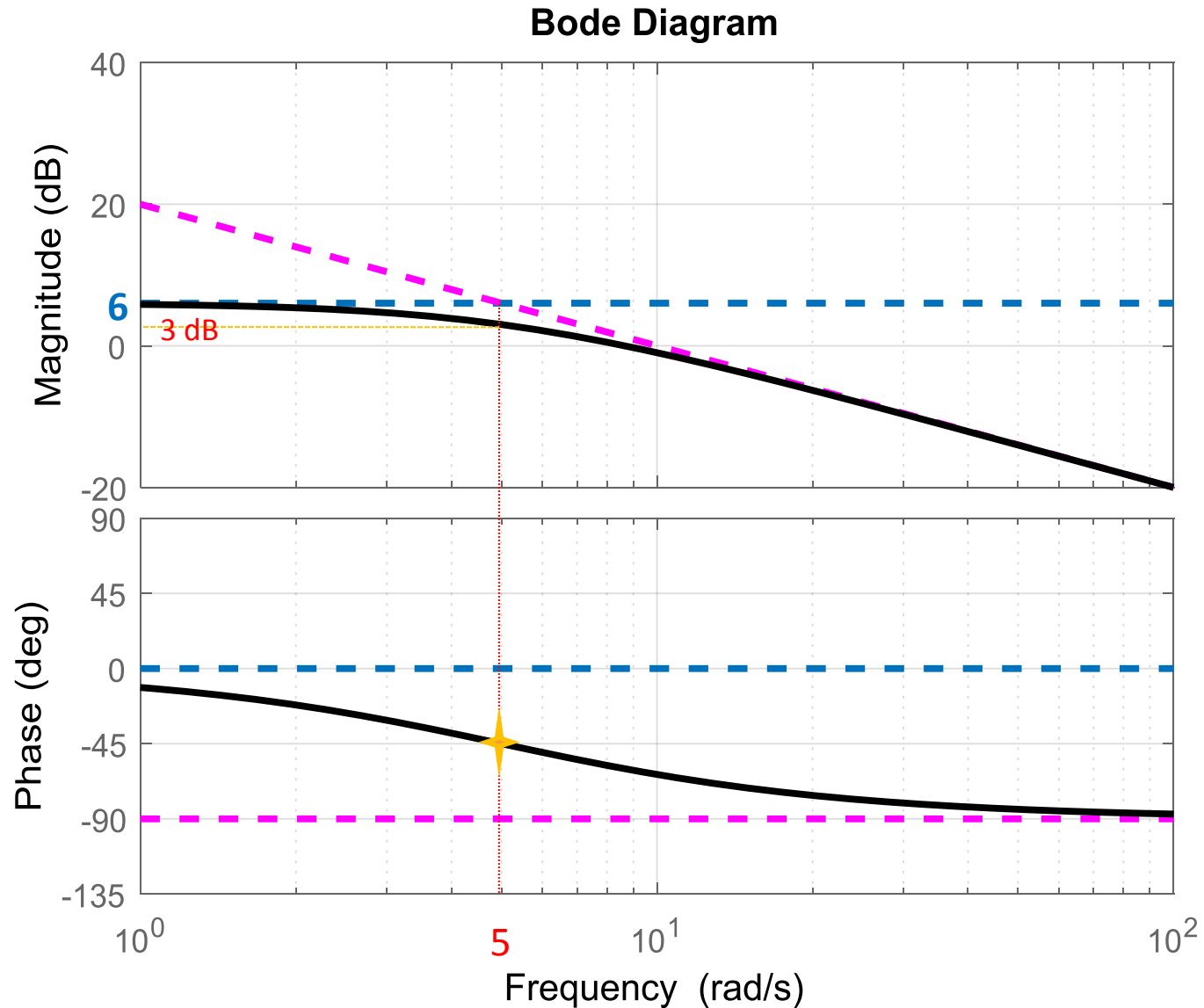
$$G_{dB} = 20 \log_{10}(2) - 20 \log_{10} \sqrt{2} = 6 - 3 = 3 \text{ dB}$$

(ce qui correspond en fait à un affaiblissement de **3 dB** entre l'asymptote horizontale et la courbe réelle).

$$\varphi = \arctg\left(\frac{0}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

- Les deux asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$
- ω_0 est appelée **pulsation de coupure**.

On obtient le tracé de Bode,



Analyse fréquentielle

Système second ordre

Diagramme de Bode (*rappel*)

- Si la fonction de transfert est **système 2^{er} ordre**:

La fonction de transfert du second ordre est $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

Nous avons vu lors de l'étude de la réponse temporelle que la réponse du second ordre dépend des racines du dénominateur et donc du facteur d'amortissement ξ . Nous allons donc distinguer les différents cas.

ξ est notée z sur le graphe

Diagramme de Bode (*rappel*)

- Si la fonction de transfert est **ystème 2^{er} ordre**:

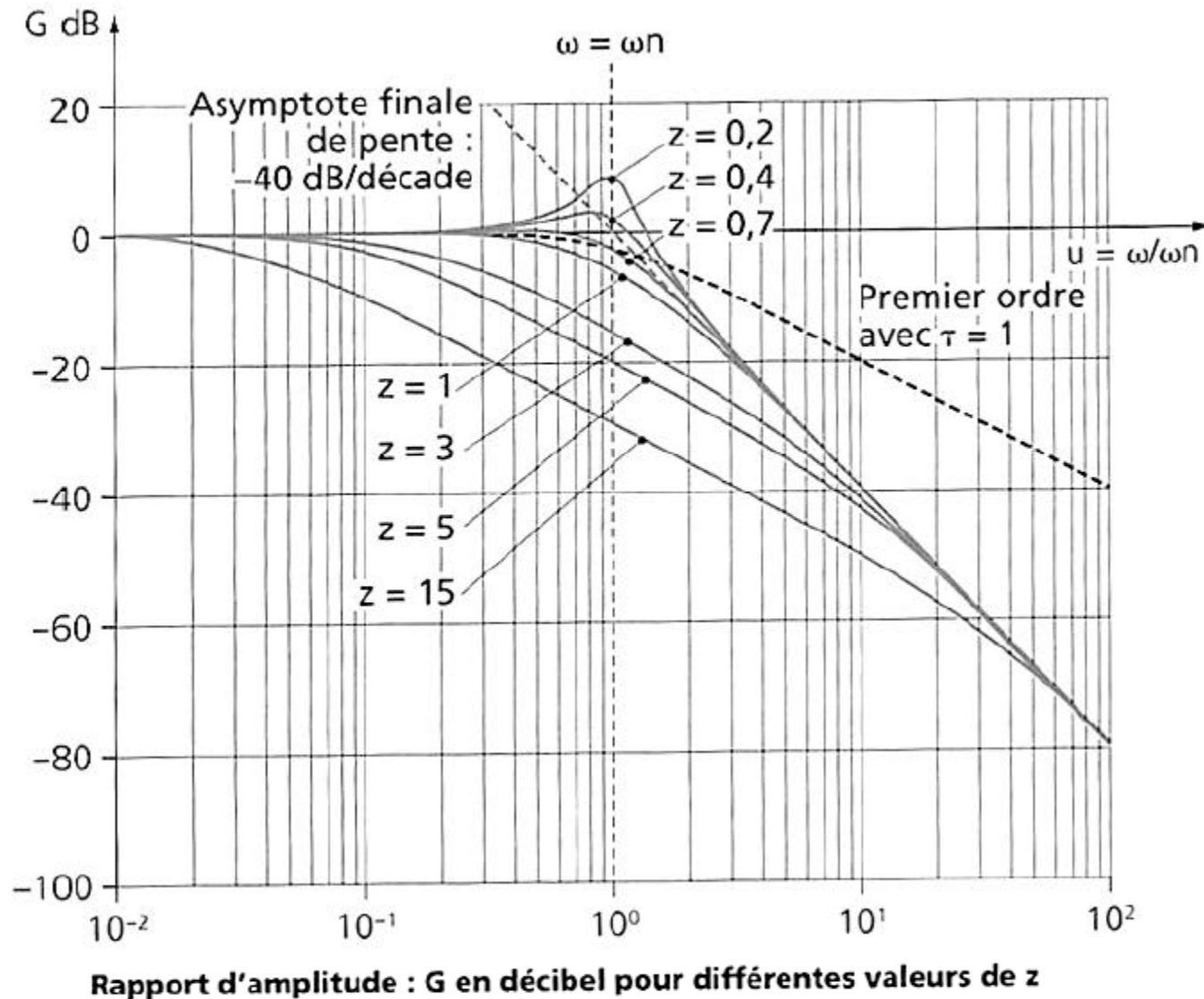
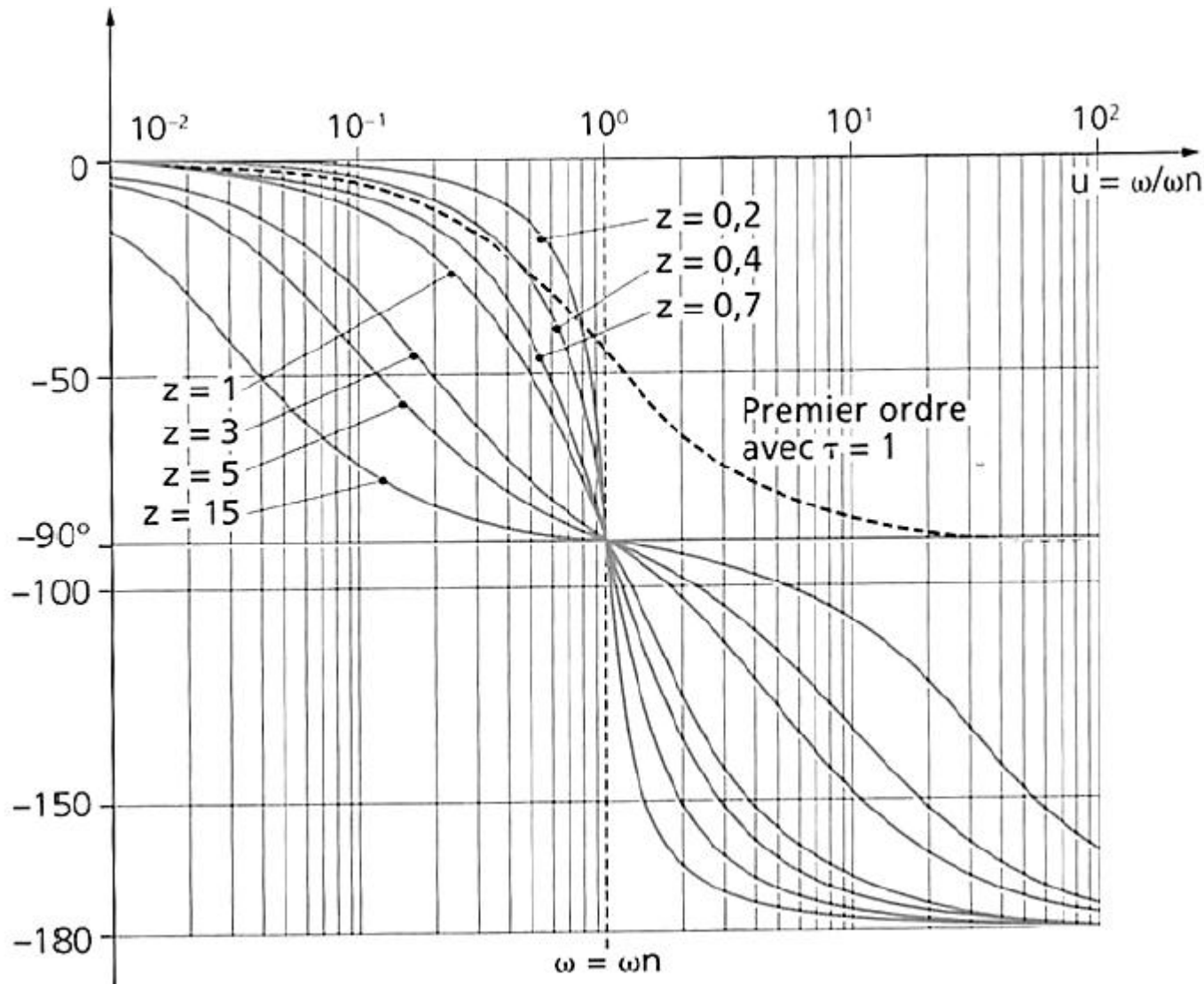


Diagramme de Bode (*rappel*)

- Si la fonction de transfert est **système 2^{er} ordre**:



Rapport de phase pour différents valeurs de z

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

- Si la fonction de transfert est **système 2^{er} ordre**:

Prenant l'exemple

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 5p + 6}$$

On met le système sous forme canonique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{1/6}{1 + \frac{5}{6}p + \frac{1}{6}p^2}$$

$$\text{On déduit que:} \begin{cases} k = 1/6 \\ \omega_0 = \sqrt{6} = 2.45 \\ \xi = \frac{5}{6} \frac{\sqrt{6}}{2} = 1.02 \end{cases}$$

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

➤ Si la fonction de transfert est **système 2^{er} ordre**:

Puisque $\xi > 1$, le système est sur-amorti. Dans ce cas, le dénominateur a 2 racines réelles; on peut alors factoriser la fonction de transfert comme suit:

$$H(p) = \frac{1}{6 \left(1 + \frac{1}{2}p\right) \left(1 + \frac{1}{3}p\right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{6(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$$

ce qui correspond à deux systèmes du premier ordre en cascade avec les deux pulsations de coupure : $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ avec: $\tau_1 = \frac{1}{2}$ et $\tau_2 = \frac{1}{3}$

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

- Si la fonction de transfert est **système 2^{er} ordre**:

Méthode 1:

On obtient 2 systèmes 1er ordre:

$$H(j\omega) = H1(j\omega) + H2(j\omega), \text{ avec } \begin{cases} H1(j\omega) = \frac{1}{6(1 + j\omega/2)} \\ H2(j\omega) = \frac{1}{6(1 + j\omega/3)} \end{cases}$$

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 1: étude du système $H1(j\omega) = \frac{1}{6(1 + j\omega/2)}$

Si $\omega \ll 2 \rightarrow H0(j\omega) = \frac{1}{6}$ (ω est négligeable par rapport à ω_1)

$$G0_{dB} = -20\log_{10}(6) = -15.56 \text{ dB}$$

$$\varphi0 = -\arctg\left(\frac{0}{6}\right) = 0$$

Si $\omega > 2 \rightarrow H1(j\omega) = \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}j\omega\right)} = \frac{1}{3(j\omega)}$ (car: $1 + j\frac{\omega}{\omega_1} \cong j\frac{\omega}{\omega_1}$)

$$G1_{dB} = -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}(2) = -9.54 - 20\log_{10}\omega$$

(ce qui est une asymptote de pente égale à -20dB par décade).

$$\varphi1 = -\arctg(3\omega) = -\arctg(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 1: étude du système $H1(j\omega) = \frac{1}{6(1 + j\omega/2)}$

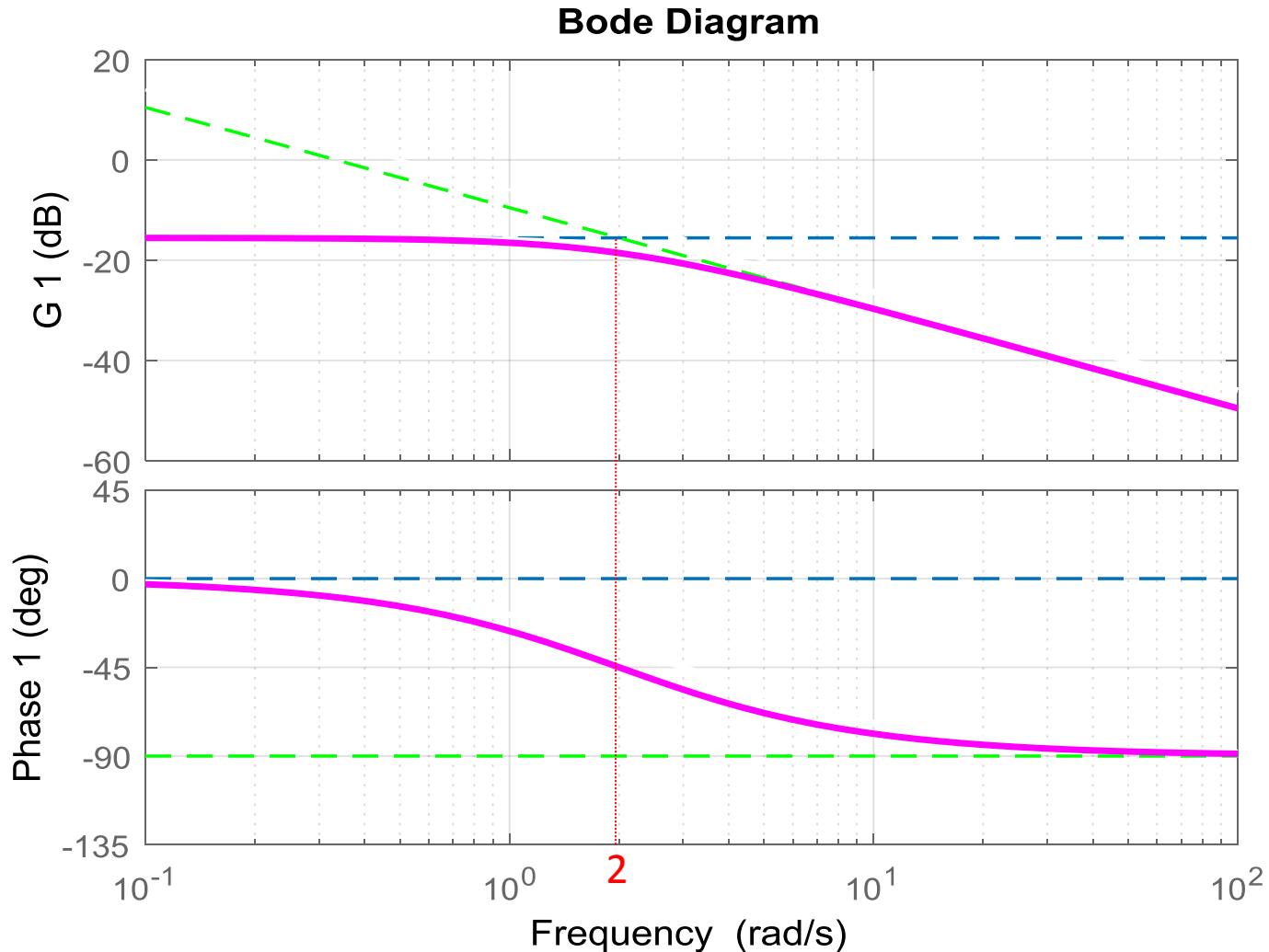


Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 1: étude du système $H_2(j\omega) = \frac{1}{6(1 + j\omega/3)}$

Si $\omega \ll 3 \rightarrow H_0(j\omega) = \frac{1}{6}$ (ω est négligeable par rapport à ω_2)

$$G_0_{dB} = -20\log_{10}(6) = -15.56 \text{ dB}$$

$$\varphi_0 = -\arctg\left(\frac{0}{6}\right) = 0$$

Si $\omega > 3 \rightarrow H_2(j\omega) = \frac{1}{6\left(\frac{1}{3}j\omega\right)} = \frac{1}{2(j\omega)}$ (car: $1 + j\frac{\omega}{\omega_2} \cong j\frac{\omega}{\omega_2}$)

$$G_2_{dB} = -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$= -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}(3) = -6 - 20\log_{10}\omega$$

(ce qui est une asymptote de pente égale à -20dB par décade).

$$\varphi_2 = -\arctg(3\omega) = -\arctg(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 1: étude du système $H_2(j\omega) = \frac{1}{6(1 + j\omega/3)}$

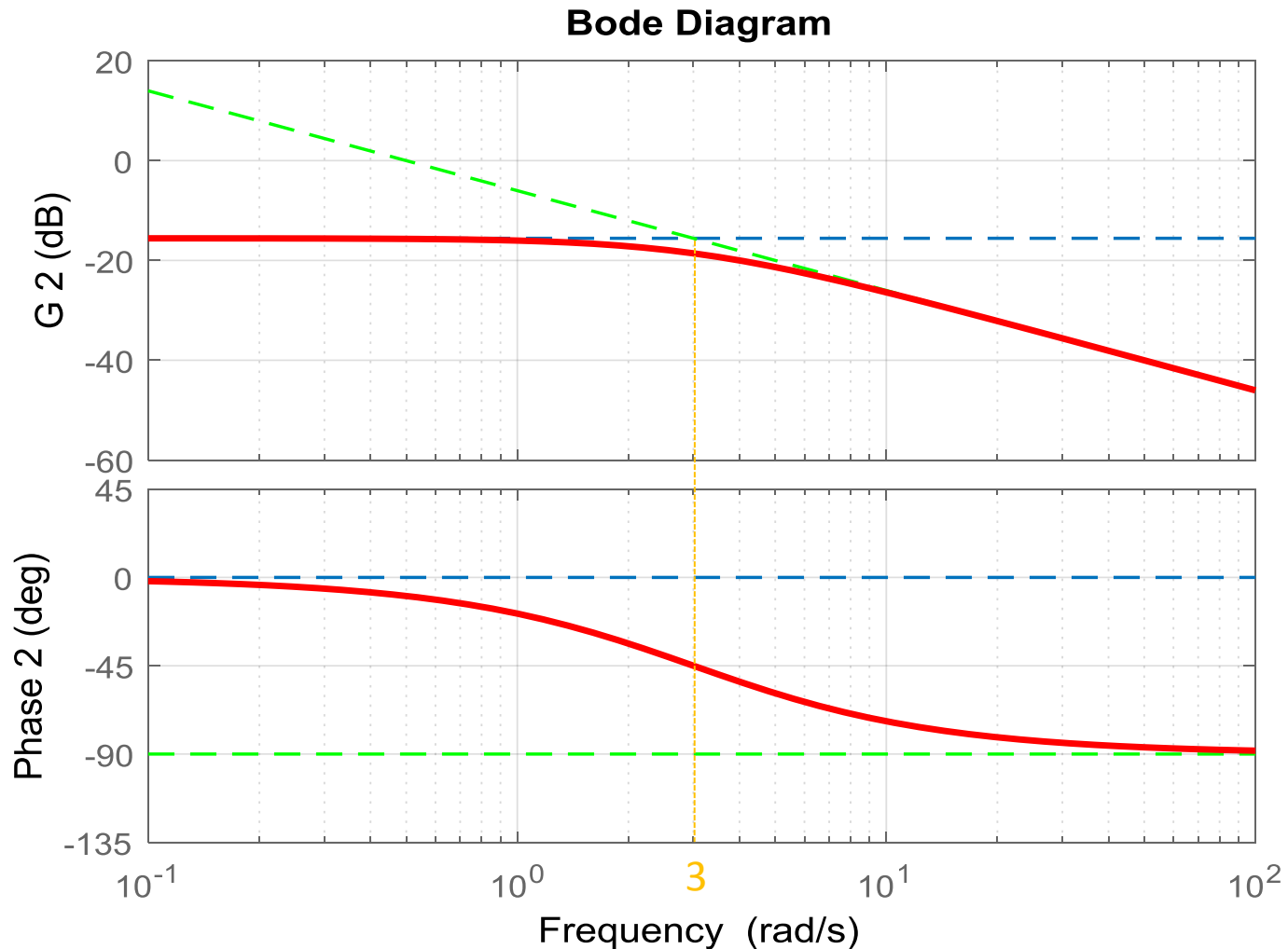


Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 1:

On obtient:

$$G = G1 + G2 = -15.54 - 40\log(\omega)$$

et

$$\varphi = \varphi1 + \varphi2 = -\pi$$

Bode Diagram

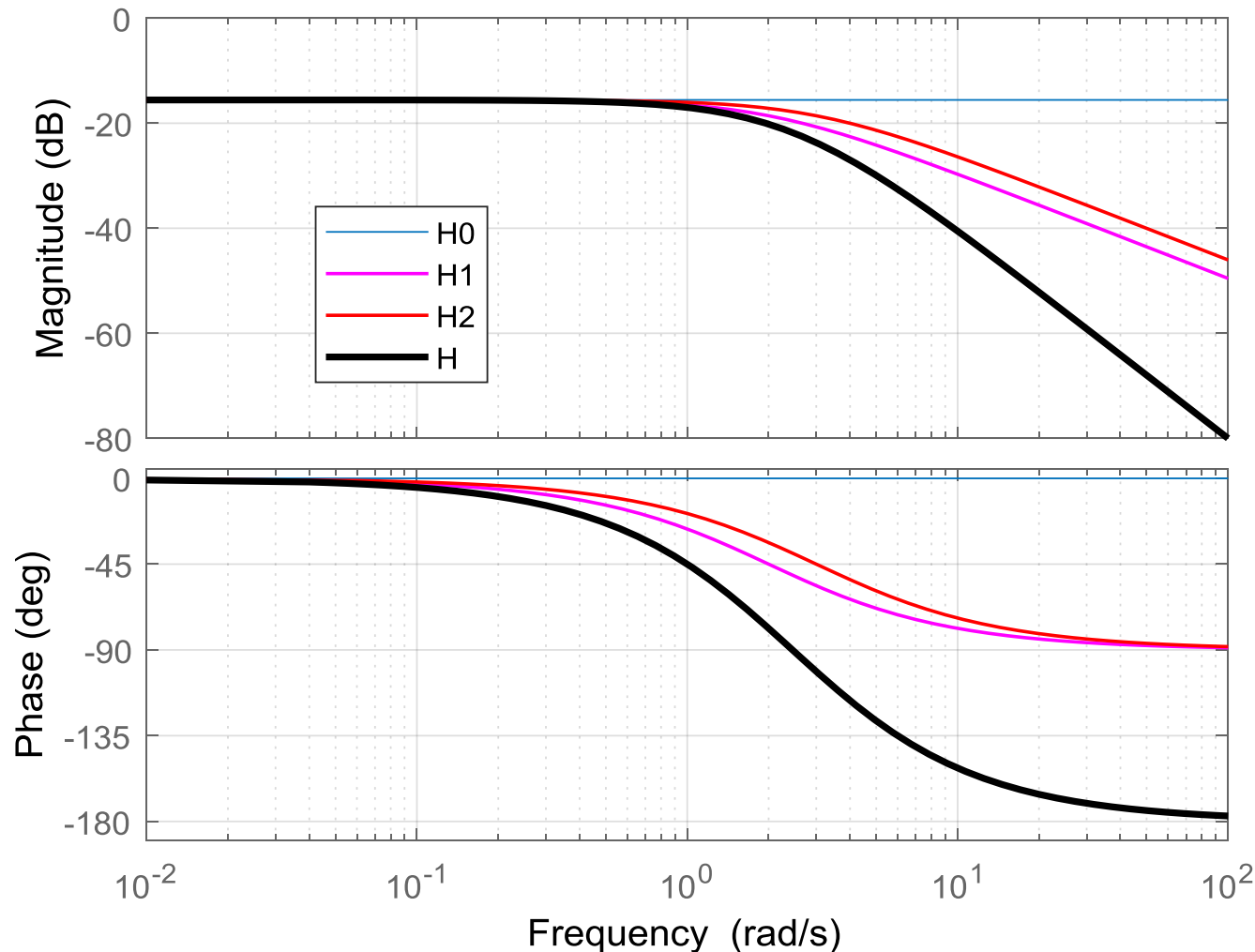


Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 2: On cherche les asymptotes de $H(j\omega) = \frac{1}{6(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$

Si $\omega \ll 2 \rightarrow H_0(j\omega) = \frac{1}{6}$ (ω est négligeable par rapport à ω_1 et ω_2)

$$G_{0dB} = -20\log_{10}(6) = -15.56 \text{ dB}$$

$$\varphi_0 = -\arctg\left(\frac{0}{6}\right) = 0$$

Si $2 < \omega < 3 \rightarrow H_1(j\omega) = \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}j\omega\right)} = \frac{1}{3(j\omega)}$ (car: $1 + j\frac{\omega}{\omega_1} \cong j\frac{\omega}{\omega_1}$)

$$G_{1dB} = -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\omega + 20\log_{10}(2) = -9.54 - 20\log_{10}\omega$$

(ce qui est une asymptote de pente égale à -20dB par décade).

$$\varphi_1 = -\arctg(3\omega) = -\arctg(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

Si $\omega \gg 3 \rightarrow H_2(j\omega) = \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}j\omega\right)\left(\frac{1}{3}j\omega\right)}$ (car: $1 + j\frac{\omega}{\omega_i} \cong j\frac{\omega}{\omega_i}$)

$$G_{2dB} = -20\log_{10}(6) - 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{2}\right) - 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$= -20\log_{10}(6) + 20\log_{10}(3) + 20\log_{10}(2) - 40\log_{10}\omega = -40\log_{10}\omega$$

(ce qui est une asymptote de pente égale à -40dB par décade).

$$\varphi_2 = -2\arctg(\omega) = -2\arctg(+\infty) = -2\frac{\pi}{2} = -\pi$$

Diagramme de Bode (*exemple 1*)

Méthode 2: On obtient la courbe de

$$H(j\omega) = \frac{1}{6(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}$$

Bode Diagram

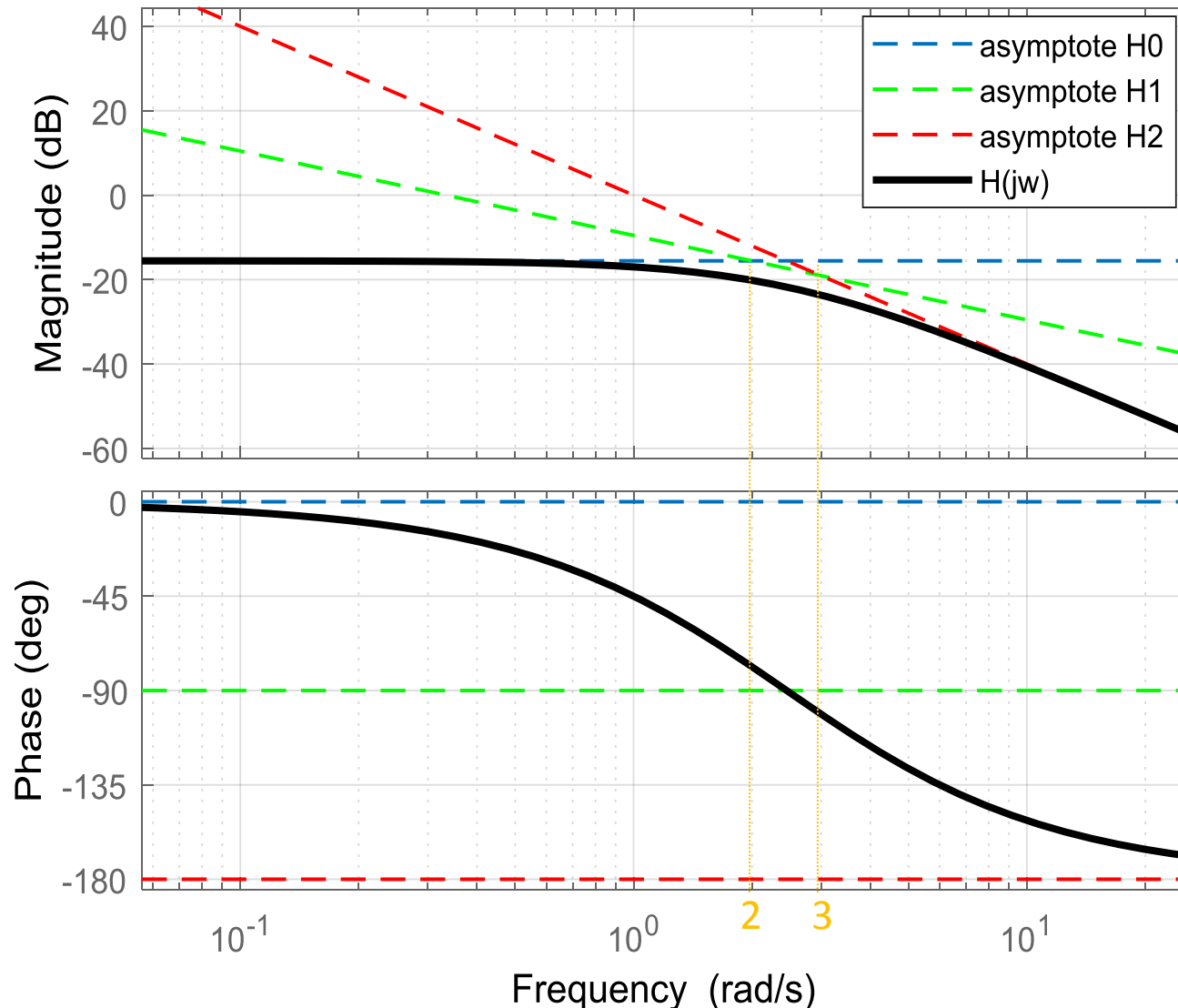


Diagramme de Bode (*exemple 2*)

- Si la fonction de transfert est **système 2^{er} ordre**:

Soit le système :

$$H(p) = \frac{1}{\frac{1}{5}p^2 + \frac{3}{20}p + \frac{1}{5}}$$

On met le système sous forme canonique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{5}{1 + \frac{3}{4}p + p^2}$$

$$\text{On déduit que: } \begin{cases} k = 5 \\ \omega_0 = 1 \\ \xi = \frac{3}{4} \frac{1}{2} = 0.38 \end{cases}$$

Puisque $\xi < 0.7$, le système est sous-amorti et présente une résonance.
La pulsation de résonance ([voir chapitre5.pdf](#)) a pour expression:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\omega_r = 0.85 \text{ rad/s}$$

Diagramme de Bode (*exemple 2*)

Cette fonction de transfert peut s'écrire:

$$H(j\omega) = \frac{5}{1 + \frac{3}{4}j\omega - \omega^2} = \frac{5}{(1 - \omega^2) + \frac{3}{4}j\omega}$$

L'expression du gain est:

$$G_{dB} = 20\log_{10}(5) - 20\log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \left(\frac{3}{4}\omega\right)^2}$$

L'expression de phase est:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{0}{5}\right) - \arctg\left(\frac{\frac{3}{4}\omega}{1 - \omega^2}\right)$$

Diagramme de Bode (*exemple 2*)

Recherche des asymptotes:

$$\text{Si } \omega < 1; \omega^2 \ll 1 \rightarrow H(j\omega) = 5$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(5) = 14 \text{ dB}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{0}{5}\right) = 0$$

$$\text{Si } \omega = 1$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(5) - 20 \log_{10}(3/4) = 16.48 \text{ dB}$$

$$\varphi = \arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \omega > 1; \omega^2 \gg 1 \rightarrow H(j\omega) = \frac{5}{\frac{3}{4}j\omega - \omega^2} = \frac{5}{\omega(j\frac{3}{4} - \omega)}$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10}(5) - 20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10} \sqrt{\frac{9}{16} + \omega^2}$$

$$= 20 \log_{10}(5) - 40 \log_{10} \omega = 14 - 40 \log_{10} \omega$$

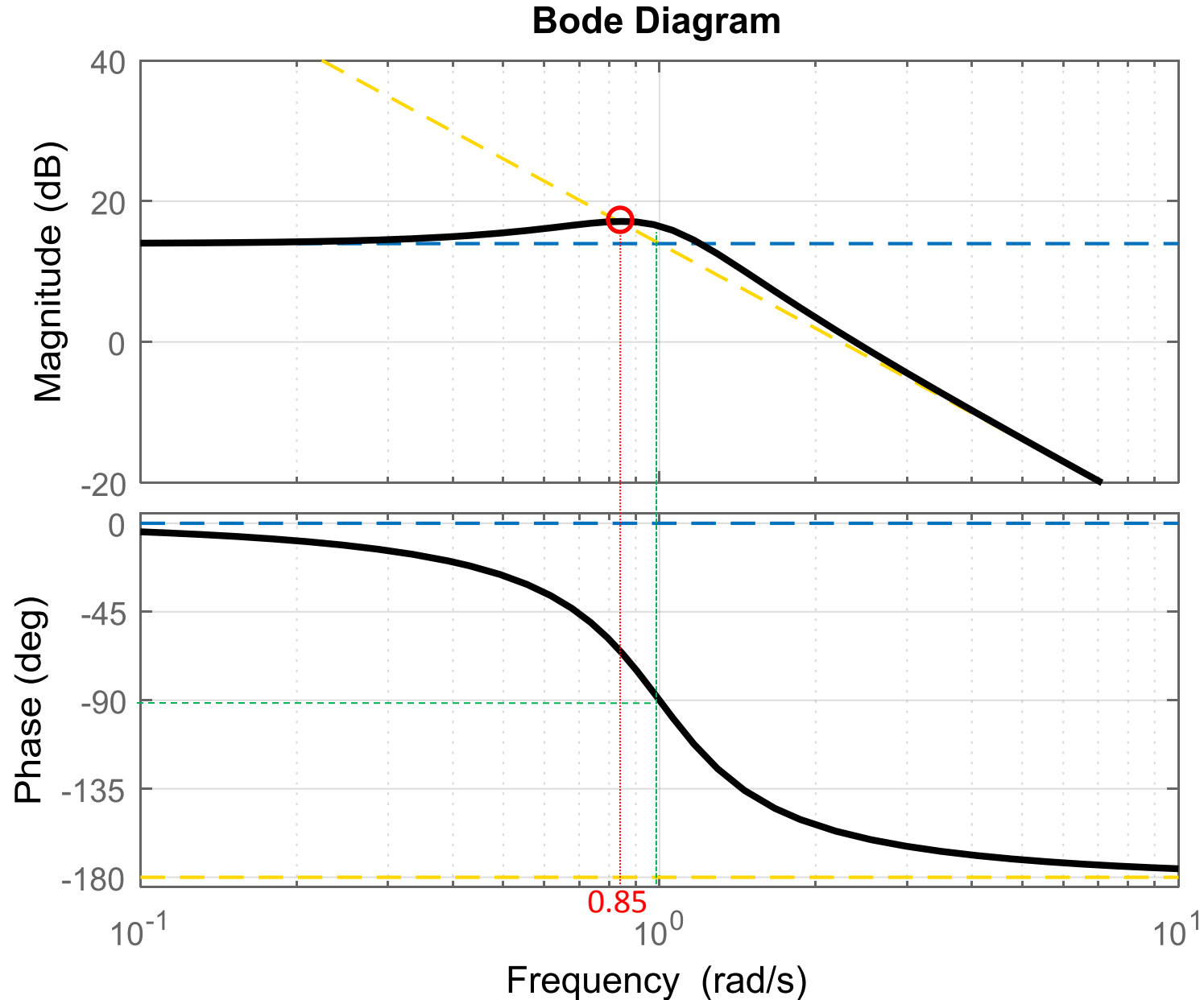
(ce qui est une asymptote de pente égale à -40dB par décade).

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{\frac{3}{4}\omega}{-\omega^2}\right) = -\arctg(0) = -\pi$$

$$\text{Si } \omega = \omega_r = 0.85 \rightarrow G_{dB} = 17.14 \text{ dB}$$

Diagramme de Bode (*exemple 2*)

On obtient la courbe de



Marge de phase

La marge de phase est définie par

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{\text{co}}) + 180^\circ$$

où ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert complexe $G(j\omega)$:

$$20\log_{10}|G(j\omega_{\text{co}})| = 0 \text{ dB} \Rightarrow |G(j\omega_{\text{co}})| = 1$$

Méthode de mesure de la marge de phase sur le lieu de Bode : repérer sur la courbe du gain la fréquence pour laquelle le gain coupe 0 dB. Relever la phase ϕ pour cette pulsation. La marge de phase est $180^\circ - \phi$.

Marge de gain

La marge de gain est définie par

$$M_G = \frac{1}{\left| G(j\omega_{180^\circ}) \right|} \Rightarrow M_G \text{dB} = -20 \log_{10} \left| G(j\omega_{180^\circ}) \right|$$

où ω_{180° est la pulsation pour laquelle la phase de $G(j\omega)$ vaut :

$$\arg \left[G(j\omega_{-180^\circ}) \right] = -180^\circ$$

Méthode de mesure de la marge de gain sur le lieu de Bode : repérer sur la courbe du phase la fréquence pour laquelle la pulsation coupe -180° . Relever la gain G (G_{dB}) pour cette pulsation. La marge de gain est $1/G$ (ou $-G_{\text{dB}}$).

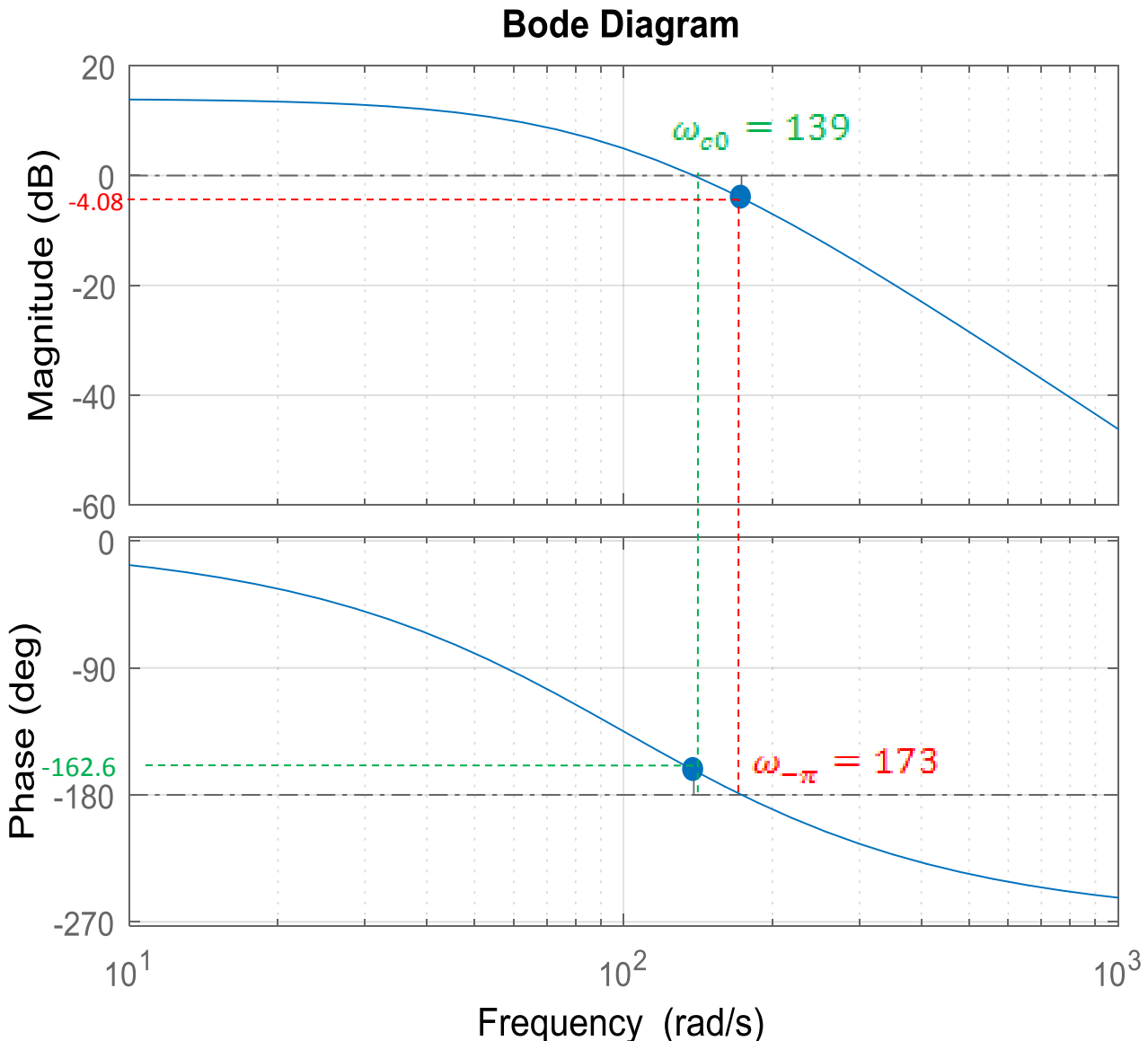
Exercice 1

$$G1(p) = \frac{5}{(0.01p + 1)^3} \quad \longrightarrow \quad G1(j\omega) = \frac{5}{(0.01j\omega + 1)^3}$$

Marge de phase et marge de gain

MG = 4.08dB

Mφ = 17.4°



Exercice 2

$$G2(p) = \frac{10^4}{p(p+10)(p+100)} \quad \Longrightarrow \quad G2(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+j0.1\omega)(1+j0.01\omega)}$$

Lieu de Nyquist

$$G2(j\omega) = \frac{10j(1-j0.1\omega)(1-j0.01\omega)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.0001\omega^2)}$$

$$G2(j\omega) = \frac{-1.1}{(1+0.01\omega^2)(1+0.0001\omega^2)} - j \frac{10(1-0.001\omega^2)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.0001\omega^2)}$$

$$\varphi(j\omega) = \text{arctg} \frac{10(1-0.001\omega^2)}{1.1\omega}$$