INTRODUCTION

L'ensemble $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels est fermé sous l'addition $m + n$ et la multiplication $m\,n$ mais pour pouvoir résoudre pour x toute équation du type

$$x + m = n \ , \ m, n \in \mathbb{N},$$

il faut passer aux entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Et pour être capable de résoudre pour x toute équation de la forme

$$p\,x + q = 0 \ , \ p, q \in \mathbb{Z},$$

il faut aller aux nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Ce dernier système est fermé sous les quatre opérations de l'arithmétique mais on ne peut y résoudre pour x toute équation du type

$$x^2 = a \ , \ a \in \mathbb{Q}.$$

Les nombres réels $\mathbb{R}$ permettent de résoudre certaines de ces équations mais pas toutes. Ils forment un système fermé sous les quatre opérations qui est de plus complet au sens où toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait la condition de Cauchy

$$\lim_{m,n \to +\infty} |x_m - x_n| = 0$$

y est convergente mais on ne peut par exemple y obtenir une solution de l'équation

$$x^2 + 1 = 0.$$

Il faut pour cela construire les nombres complexes $\mathbb{C}$.

I.1 Formes Algébrique d'un nombre complexe

Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + i\,y \ \text{ avec } \ x, y \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ i^2 = -1\}.$$

Le nombre réel x est la **partie réelle** de z, le nombre réel y sa **partie imaginaire**,

$$x = \Re z \ , \ y = \Im z,$$

le nombre complexe

$$\overline{z} = x - i\,y$$

est le **conjugué** de z et le nombre positif

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

I.1.1 Propriétés obtenues facilement sous la forme algébriques

Soient z et w deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ **(2)** $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ **(3)** $\overline{\overline{z}} = z$ **(4)** $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$ **(5)** $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\,i$.

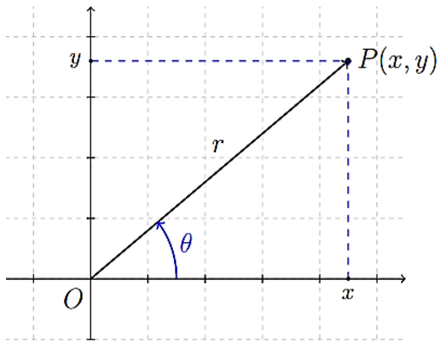
I.2 Formes Polaire d'un nombre complexe

Les nombres complexes, étant des points du plan, admettent une **forme polaire**. Si $z \neq 0$, on peut écrire

$$z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

où le nombre $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est le module de z et l'angle

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x<0\,, y\geq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x=0\,, y>0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} & \text{si } x>0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x=0\,, y<0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi & \text{si } x<0\,, y<0, \end{cases}$$



est son **argument**. Donc, par définition,

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Les formules d'addition pour les fonctions trigonométriques montrent que l'on a

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2))$$

donc que

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

et que

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi.$$

I.2.1 Formule de MOIVRE

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right\}.$$

Nous pourrions maintenant généraliser :

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)\},$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n \{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\},$$

qui est appelée formule de De Moivre.

I.3 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n-ième d'un nombre complexe $a+ib$ si $z^n = a+ib$, et nous écrivons $z = (a+ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a+ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a+ib)^{\frac{1}{n}} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left\{\cos\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\}, \quad k = 0, 1, 2, ...n-1. \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a n racines n-ièmes différentes de $a+ib$ pourvu que $a+ib \neq 0$.

Exemple. Quelques soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'équation $z^n = a$ admet n racines. Si $a \neq 0$, elles sont toutes distinctes :

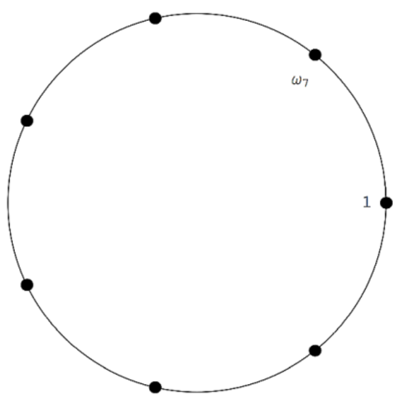
$$z_k = |a|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\ \sin\left(\frac{\arg a}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Lorsque $a = 1$, le nombre

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\ \sin\frac{2\pi}{n}$$

est la **racine primitive** n$^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega_n)(z-\omega_n^2)\cdots(z-\omega_n^{n-1}).$$



Exemple de la 7$^{\text{ème}}$ racine (n=7) où la formation de l'angle $2\pi/7$

Exemple.

Calculer $\sqrt[3]{1-i}$.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-i} = (1-i)^{\frac{1}{3}} &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right\} \\ &= \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right\}, \; k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, $z_0 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right\}$; $k = 1$, $z_1 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right\}$;

$k = 2$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}$. ∎