

Faculté des Sciences et de la Technologie, Filières :

- Génie civile et Hydraulique
- Mécanique

Série 1 Math 4

Opérations sur les nombres complexes

Exercice 1 : Calculs avec des conjugués

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$1. z_1 = \frac{\bar{z}}{z} \quad 2. z_2 = \frac{iz}{\bar{z}}.$$

Exercice 2 : Formes exponentielles

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1. z_1 = 1 + i\sqrt{3} & 2. z_2 = 9i & 3. z_3 = -3 \\ 4. z_4 = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i} & 5. z_5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5} & 6. z_6 = \sin x + i \cos x. \end{array}$$

Exercice 3 : Équations du premier degré

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} 1. z + 2i = iz - 1 & 2. (3 + 2i)(z - 1) = i \\ 3. (2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i & 4. (4 - 2i)z^2 = (1 + 5i)z. \end{array}$$

On écrira les solutions sous forme algébrique.

Exercice 4 : Équations avec des conjuguées

Résoudre les équations suivantes :

$$1. 2z + i = \bar{z} + 1 \quad 2. 2z + \bar{z} = 2 + 3i \quad 3. 2z + 2\bar{z} = 2 + 3i.$$

Exercice 5 : Équations à deux variables complexes

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

1.

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 &= i \\ -2z_1 + 3iz_2 &= -17 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 &= i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 &= 11i \end{cases}$$

On donnera les résultats sous forme algébrique.

Exercice 6 : Équations d'ordre supérieur à 1

Résoudre les équations suivantes :

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$$

$$(z - 1)^4 = 1$$

Exercice 7 : Manipulation des nombres complexes élevés à des puissances

Donner la forme algébrique aux nombres complexes suivants :

$$(1 - i)^{1000}$$

$$(\sqrt{3} - i)^3 (-1 + i\sqrt{3})^{-5}$$

Exercice 8 : Représentation graphique

Calculer $(i)^{\frac{1}{6}}$ et représenter les résultats dans le plan complexe

Exercice 9 : calcul des sommes à partir des nombres complexes

Calculer les sommes suivantes :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$$