Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Équations aux dérivées partielles

Cours destiné aux étudiants de troisième année
Licence Mathématiques

Sarra Maarouf

Table des matières

Préface

Ces notes de cours sont une introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles. Elles sont destinées aux étudiants de niveau L3 de filière mathématique.
Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans de très nombreux domaines appliqués, voir industriels, principalement en ingénieurie, en mécanique et en physique, mais aussi en finance, en économie, en chimie, en biologie, en médecine... Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes les EDPs, il faut donc se résoudre à restreindre notre champ d'étude. On réalisera ceci en exigeant que l'équation satisfasse certaines propriétés, par exemple qu'elle soit linéaire.

Ce cours est divisé en quatre chapitre :
Au premier chapitre, nous rassemblons les notions et les propriétés fontamentales des EDPs, telles que, la linéarité, la classifications, condition au bord... Ensuite, on rappelle les séries de Fourier et la transformée de Fourier et son application sur les EDPs.
L'objectif du deuxième chapitre est d'étudier l'équation de Laplace. On commence par résoudre par la méthode de séparation des variables le problème de Dirichlet pour le laplacien dans un disque puis dans une sphère. On déduit par la suite la solution de l'équation de Laplace à l'extérieur de la sphère. Vient ensuite, les fonctions harmoniques et leurs propriétés. Nous établisons les noyaux de Poisson dans le disque et dans le demi-plan supérieur, ces noyaux sont des fonctions harmoniques qui donnent la solution de l'équation de Laplace munie aux conditions aux limites de Dirichlet sous forme d'intégrale.
À la fin de ce chapitre, nous nous intéressons à introduire les fonctions de Green.
Le chapitre qui suit est consacré à l'étude de l'équation des ondes. On donne la solution dans une corde vibrante (en dimension 1) puis dans une membrane vibrante (dimension 2). À La fin du chapitre on présente le principe de Huygens.

L'équation de la chaleur fait l'objet du dernier chapitre. On prèsente la solution de cette équation à l'aide du noyau de la chaleur.

À la fin de chaque chapitre se trouve une selection d'exercices qui a été résolu pendant les séances de travaux dirigés.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Notations

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, on désigne par $\partial\Omega$ la frontière de Ω et on note Γ une partie de $\partial\Omega$. Si $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ un vecteur de Ω ou $\mathbb{R}^d$ on définit le gradient spatial d'une fonction scalaire par : pour tout fonction f définie de Ω dans $\mathbb{R}$,

$$grad(f) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}\right)^t,$$

et la dérivée normale est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = df(\vec{\eta}) = \nabla f \cdot \vec{\eta}.$$

La divergence spatiale d'un champ de vecteur

$$\begin{array}{rcl} p : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \mapsto & p(\boldsymbol{x}) = (p_1(\boldsymbol{x}), \cdots, p_d(\boldsymbol{x})) \end{array}$$

s'écrit

$$div(\vec{p}) = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial p_d}{\partial x_d}.$$

Le laplacien de f est l'opérateur du second ordre défini par

$$\Delta f = div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}.$$

Définition 1.1.1. *Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation fonctionnelle qui met en relation une fonction et ses dérivées partielles. Typiquement, Si u est* *une fonction à valeurs scalaires des variables* $x_1, ..., x_d$*, une EDP est une relation de la forme :*

$$F(x_1, ..., x_d, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ...) = 0. \tag{1.1}$$

Une solution de l'équation (1.1) est une fonction $u = u(x_1, x_2, ..., x_d)$ *des variables indépendantes* $x_1, x_2, ..., x_d$ *dont les dérivées partielles apparaissent dans l'équation existent à tout point de* Ω *et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (1.1), celle-ci est satisfaite.*

Exemple 1.1.2. *1) L'équation*

$$x_1\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big) + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big) - \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) = \sin(x_1^2 + x_2^2) \tag{1.2}$$

est un exemple d'une EDP pour le domaine $\Omega = \mathbb{R}^2$*. Cette équation peut s'écrire sous la forme de l'équation (1.1) ci-dessus*

$$x_1\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big) + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big) - \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big) - \sin(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

2) Similairement, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ *est une autre EDP dans* $\mathbb{R}^2$*,* $u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3$ *et* $u(x_1, x_2) = \sin(x_1 - x_2)$ *sont des solutions de cette solution.*

Définition 1.1.3. ***L'ordre de l'EDP.*** *L'ordre d'une EDP est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.*

Exemple 1.1.4. *L'équation*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} + x_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^4 = e^{x_1}$$

est une EDP d'ordre 3.

1.2 Équations aux dérivées partielles linéaires

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. ***Opérateur différentiel linéaire****. On appelle opérateur différentiel linéaire du second ordre dans un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^d$*, une application linéaire définie sur* *l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω par*

$$Lu(x_1,...,x_d)=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x_1,...x_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b_i(x_1,...,x_d)\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(x_1,...,x_d)u, \quad (1.3)$$

telle que, a_{ij}, $1\leq i,j\leq d$, b_i, $1\leq i\leq d$ et f sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2.2. ***EDP linéaire du second membre.*** *Une EDP linéaire du second membre est une équation de la forme*

$$Lu=g \quad (1.4)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire et g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$.
iii- On dit que l'équation (1.4) est une équation linéaire homogène ou sans second membre si la fonction g est identiquement nulle sur Ω.

Exemple 1.2.3. *Équation de Laplace : $\Delta u=0$, équation de la chaleur ,des ondes....*
En revanche, l'équation (1.2) est non linéaire.

1.2.2 Classification des EDP du second ordre

Étant donné une équation linéaire du second ordre :

$$\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}(x_1,...x_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+H=0,$$

telle que $H=\sum_{i=1}^{d}b_i(x_1,...,x_d)\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(x_1,...,x_d)u-g(x)$ et les a_{ij}, $1\leq i,j\leq d$, sont d^2 fonctions de d variables $x_1,...,x_d$.

Définition 1.2.4. *Une EDP linéaire du second ordre est dite* ***elliptique*** *dans Ω si la matrice $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ n'admet que des valeurs propres non nulle et qui sont toutes de même signe.*

Exemple 1.2.5. *L'équation $\Delta u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$ en dimension n est elliptique. La matrice correspondante est la matrice identité de dimension $n\times n$, toutes les valeurs propres sont donc égales à 1.*

Définition 1.2.6. *Une EDP est dite* ***hyperbolique*** *dans* Ω *si la matrice* $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ *n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé.*

Exemple 1.2.7. *L'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = f(t,\boldsymbol{x}), \quad \textit{pour } t \geq 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

est de type hyperbolique. En effet la matrice A *vaut dans ce cas*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -c^2 & ... & 0 \\ & & & \\ 0 & & ... & -c^2 \end{pmatrix}$$

dont une valeur propre vaut 1 *et toutes les autres* $-c^2$.

Définition 1.2.8. *On dira que l'EDP est* ***parabolique*** *si* $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ *admet une valeur propre nulle.*

Exemple 1.2.9. *L'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t), \quad \textit{pour } t \geq 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

est de type parabolique. En effet, la matrice A *correspondante*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -k & ... & 0 \\ & & & \\ 0 & & ... & -k \end{pmatrix}$$

admet une valeur propre nulle et les autres valent $-k$.

1.2.3 Conditions au bord, conditions aux limites

Le plus souvent on n'étudie un phénomène que dans un domaine et les conditions qu'on impose sont la donnée de la solution et de certaine de ses dérivées sur le bord du domaine, on qualifie donc ces conditions de conditions au bord. Si l'une des variables représente le temps, on réserve le terme condition initiale pour la donnée d'une fonction pour $t = t_0$,

$$u(\boldsymbol{x}, t_0) = g(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

et pour les autres variables, on dit qu'il s'agit de conditions frontières ou aux limites.
Condition de Dirichlet. Cette condition consiste à imposer la valeur de la solution sur la frontière

$$u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

telle que g est une fonction donnée définie sur $\partial\Omega$.
Condition de Neumann. Cette condition impose la valeur de la dérivée normale de la solution

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad sur\ \partial\Omega,$$

telle que g est une fonction donnée définie sur $\partial\Omega$ et η est le vecteur normale à la frontière.
Condition de Fourier-Robin. Il s'agit d'une relation entre l'inconnue et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine, elle est de la forme

$$a\,u + b\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad sur\ \partial\Omega$$

où a, b, g sont des fonctions données définies sur $\partial\Omega$.
Condition mixte ou mêlée. On impose plusieurs types de conditions sur plusieurs parties de la fonction.

1.2.4 Problème bien posé

Un problème est bien posé au sens de Hadamard s'il existe une unique solution qui dépend des données de façon continue.

1.2.5 Principe de superposition

Théorème 1.2.10. *Soit L un opérateur différentiel linéaire, soient $u_1, u_2, ..., u_n$, n solutions de $Lu = 0$.La fonction $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ est aussi solution de $Lu = 0$ pour tout choix de constantes $a_1, a_2, ..., a_n$.*

Preuve. Soient $u_1, ...u_n$, n solutions de $Lu = 0$ i.e.

$$Lu_1 = Lu_2 = \cdots = Lu_n = 0$$

et soient $a_1, ..., a_n$, n constantes, on a

$$L(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) \overset{L\,lin.}{=} a_1Lu_1 + a_2Lu_2 + \cdots + a_nLu_n = 0.$$

D'où le résutat.

Exemple 1.2.11.
1) La fonction $u_n(x,t) = exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi x)$ *est solution de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -n^2\pi^2 u_n(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -n^2\pi^2 u_n(x,t),$$

alors, la fonction

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{p} a_n exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi x),$$

est une solution de cette équation pour tout choix de $a_1, ..., a_p$.
2) Si $Lu_1 = 0$ *et* $Lu_2 = v$ *alors* $u = u_1 + u_2$ *est solution de l'équation* $Lu = v$.

Il ne faut pas oublier que les solutions doivent satisfaire les conditions au bord. Celles-ci peuvent elles-même être linéaires ou non. Ainsi, $u(0,t)$ est une condition au bord linéaire puisqu'elle est de la forme $Au = 0$ où A est un opérateur linéaire.

Théorème 1.2.12. *En superposant des solutions* u_n *d'une équation linéaire* $Lu = 0$ *qui satisfont une condition au bord* $Au = 0$*, on obtient une solution de l'équation qui satisfait la condition au bord.*

Exemple 1.2.13. *On prend l'équation* (1.5) *avec les conditions suivantes*

$$u(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

Ceci donne

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{p} a_n exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi 0) = 0$$

$$\text{et} \quad u(1,t) = \sum_{n=1}^{p} a_n exp(-n^2\pi^2 t)\sin(n\pi) = 0.$$

Le choix de a_n, $n = 1, ..., p$, permet de faire varier la valeur de u,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{p} a_n \sin(n\pi x),$$

si on s'impose $u(x,0) = f(x)$, il n'existe en général pas de suite finie $a_1, ..., a_p$ telle que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{p} a_n \sin(n\pi x)$ mais si f est assez régulier on peut le développer en série de Fourier en sinus et trouver la valeur de a_n telle que $u(x,0) = f(x)$.

1.3 Séries de Fourier

Théorème 1.3.1. *Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, une fonction définie et intégrable sur $[0, 2\pi]$ et sa série de Fourier est*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx \quad \text{et} \quad a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 1 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Si f est continue par morceaux, alors la série de Fourier converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et nous avons

$$\frac{\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

telle que $\tilde{f}$ est le prolongement périodique de f dans $\mathbb{R}$ de période 2π.

Remarque 1.3.2.

i) ***Fonction paire, série de Fourier cosinus.*** *Le développement en série de Fourier d'une fonction paire ne contient que des cosinus, on dit que l'on a une série de Fourier cosinus.*

ii) ***Fonction impaire, série de Fourier sinus.*** *Le développement en série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des sinus, on dit que l'on a une série de Fourier sinus.*

Théorème 1.3.3. ***Série de Fourier multiple.*** *Soit f une fonction de $L^2(]0,2\pi[^2)$ alors*

$$f(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\cos(mx)\cos(ny) + b_{m,n}\cos(mx)\sin(ny) + c_{m,n}\sin(mx)\cos(ny) + d_{m,n}\sin(mx)\sin(ny).$$

avec

$$a_{0,0} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)dxdy,$$

$$a_{0,n} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)cos(ny)dxdy, \quad b_{0,n} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\sin(ny)dxdy$$

$$a_{m,0} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)cos(mx)dxdy, \quad c_{m,0} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\sin(mx)dxdy$$

et pour tout $m \geq 1, n \geq 1$

$$a_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\cos(mx)\cos(ny)dxdy,$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\cos(mx)\sin(ny)dxdy$$

$$c_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\sin(mx)\cos(nx)dxdy,$$

$$d_{m,n} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\sin(mx)\sin(ny)dxdy.$$

Si $f(-x,y) = f(x,y)$ et $f(x,-y) = f(x,y)$ alors

$$f(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{m,n}\cos(mx)\cos(ny),$$

si $f(-x,y) = -f(x,y)$ et $f(x,-y) = -f(x,y)$

$$f(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} d_{m,n}\sin(mx)\sin(ny).$$

1.4 Transformée de Fourier

On rappelle l'espace $L^1(\mathbb{R})$ l'espace de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la valeur absolue est intégrable au sens de Lebesgue.

Si f est une fonction à valeur réelle ou complexe, d'une variable réelle x, sa transformée de Fourier notée $\mathcal{F}(f)$ (notée aussi $\hat{f}$) est la fonction donnée par

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi xy)dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi xy)dx. \end{aligned}$$

Si f est continue par morceaux et appartient à $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier admet elle aussi une transformée de Fourier et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(y)e^{2\pi ixy}dy = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(y)e^{2\pi ixy}dy = f(x).$$

quand f est continue au point x. Cette égalité s'appelle la transformée de Fourier réciproque.

Exemple 1.4.1. *Soit f la fonction créneau donnée par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

On a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy}dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi ixy}dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \cos(2\pi xy)dx - i\int_{-1}^{1} \sin(2\pi xy)dx \\ &= \frac{2}{2\pi y}\sin(2\pi xy)\Big|_0^1 = \frac{\sin(2\pi y)}{\pi y}. \end{aligned}$$

On veut maintenant calculer f à partir de $\mathcal{F}(f)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y)e^{2\pi ixy}dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi y)}{\pi y}e^{2\pi ixy}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi y)}{\pi y}\cos(2\pi xy)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi(1+x)y) + \sin(2\pi(1-x)y)}{2\pi y}dy. \end{aligned}$$

On sait que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(at)}{t} = \pi, \ \forall a > 0.$$

On calcule cette intégrale selon les valeurs de x. On distingue quatre cas :

Si $x = -1$ ou $x = 1$, on a

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(4\pi y)}{2\pi y}dy = \frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}.$$

Si $-1 < x < 1$, on trouve que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi(1+x)y) + \sin(2\pi(1-x)y)}{2\pi y} dy = \frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi} = 1$$

Si $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi(1+x)y) + \sin(2\pi(1-x)y)}{2\pi y} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi(1+x)y) - \sin(2\pi(x-1)y)}{2\pi y} dy \\ &= \frac{\pi}{2\pi} - \frac{\pi}{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Si $x < -1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(2\pi(1+x)y) + \sin(2\pi(1-x)y)}{2\pi y} dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(-2\pi(1+x)y) + \sin(2\pi(x-1)y)}{2\pi y} dy \\ &= -\frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

On déduit que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = -1 \,\text{ou}\, x = 1. \end{cases}$$

1.4.1 Utilisation de la transformée de Fourier

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}, & \forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.6}$$

On introduit la transformée de Fourier de u par rapport à x

$$\mathcal{F}(u)(\nu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} u(x,t) dx, \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

On suppose que $\mathcal{F}(u)$ est une solution qu'on puisse la dériver en dérivant sous le signe d'intégration et que $\forall t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (1.6) par rapport à x, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) dx$$

Soit
$$\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial t}(\nu,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)dx$$
En intégrant par partie quatre fois on trouve
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)dx=(2i\pi\nu)^4\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}u(x,t)dx$$
et donc
$$\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial t}(\nu,t)=-16\pi^4\nu^4\mathcal{F}(u)(\nu,t)$$
est une équation différentielle homogène d'ordre 1, sa solution est
$$\mathcal{F}(u)(\nu,t)=c\,e^{-16\pi^4\nu^4 t},\ c\in\mathbb{R}.$$
Quand $t=0$ on trouve $u(\nu,0)=c$ et donc $\mathcal{F}(u)(\nu,t)=\mathcal{F}(u)(\nu,0)e^{-16\pi^4\nu^4 t}$. Comme
$$\mathcal{F}(u)(\nu,0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}u(x,0)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x}f(x)dx=\mathcal{F}(f)(\nu)$$
d'où
$$\mathcal{F}(u)(\nu,t)=\mathcal{F}(f)(\nu)e^{-16\pi^4\nu^4 t}.$$
Supposons que $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f)\in L^1(\mathbb{R})$, comme $e^{-16\pi^4\nu^4 t}\leq 1$, on trouve que pour tout $t>0, \nu\mapsto \mathcal{F}(f)(\nu)e^{-16\pi^4\nu^4 t}$ est également dans $L^1(\mathbb{R})$, et on peut appliquer la transformée de Fourier réciproque pour trouver $u(x,t)$,
$$\forall t>0,\quad u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\mathcal{F}(u)(\nu,t)d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\mathcal{F}(f)(\nu)e^{-16\pi^4\nu^4 t}d\nu.$$

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1. *Pour chacune des équations aux dérivées partielles ci-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non.*

$$a)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}=y;\quad b)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=1;\quad c)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0;$$
$$d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin(x);\quad e)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sin(u)=e^y.$$

Exercice 1.5.2. *Trouver la solution générale de l'EDP suivante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$$

où l'inconnue u est une fonction de deux variables x et y.

Exercice 1.5.3. *1) Soit*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \tag{1.7}$$

une EDP où l'inconnue u est une fonction de trois variables x, y et z. Trouver la solution générale de l'EDP.

2) On suppose que la solution u de l'équation (1.7) vérifie

$$u(0, y, z) = F(y, z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = G(y, z)$$

où F et G sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la fonction u.

Exercice 1.5.4. *Considérons l'équation de Black-Scholes*

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc,$$

où r et σ^2 sont des constantes, S et τ sont les variables indépendantes et $c = c(S, \tau)$ est la variable dépendante (fonction inconnue).

1) Posons $y = \ln(S)$. Montrer que l'équation de Black-Scholes est transformée dans la nouvelle EDP à coefficients constants

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial c}{\partial y} - rc. \tag{1.8}$$

2) Posons $c(y, \tau) = e^{-r\tau} u(y, \tau)$. Montrer que l'équation (1.8) est transformée dans l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Exercice 1.5.5. *On définit la transformée de Fourier en cosinus ainsi sa formule de réciprocité comme suit : pour toute fonction f définie sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, on a*

$$\hat{f}_c(\nu) = 2 \int_0^\infty f(x) \cos(2\pi\nu x) dx, \quad f(x) = 2 \int_0^\infty \hat{f}_c(\nu) \cos(2\pi\nu x) d\nu,$$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall x > 0, \forall t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f(t), \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad \forall x > 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

tel que f *est une fonction définie pour toute* $t > 0$ *et* g *est une fonction définie pour tout* $x > 0$ *et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, +\infty[$, a *est une constante positive. On suppose que*

$$\lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0$$

1) Montrer que $\hat{u}_c(\nu, t)$ *vérifie l'équation différentielle suivante*

$$\frac{\partial \hat{u}_c}{\partial t}(\nu, t) = -4\pi^2 \nu^2 a^2 \hat{u}_c(\nu, t) - 2a^2 f(t). \tag{1.10}$$

2) Résoudre l'équation (1.10).

3) On suppose que $f(t) = 0$, $\forall t > 0$, *en déduire* $u(x,t)$ *la solution du problème* (1.9).

Chapitre 2

Équation de Laplace

L'équation de Laplace est une EDP du second ordre elliptique donnée par $\Delta u = 0$ tel que Δ est l'opérateur de Laplace défini pour toute fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ par

$$\Delta u = (\mathrm{div} \circ \mathrm{grad})(u) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

2.1 Interprétation physique

L'équation de Laplace intervient très fréquement dans des problèmes de la physique. u représente typiquement la densité d'une quantité (comme par exemple, la concentration chimique d'un produit) en équilibre.

2.2 Problème de Dirichlet pour le laplacien dans un disque

Soit Ω le disque $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R_0$ de centre $M_0(x_0, y_0)$ et de rayon R_0. Pour tout point (x, y) de disque Ω, il existe un unique couple (r, θ) tel que $0 \leq r < R_0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $x = x_0 + r\cos\theta$ et $y = y_0 + r\sin\theta$.

On s'intéresse à résoudre le problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que f est une fonction à valeur réelle de période 2π et de classe $\mathcal{C}^2$.

Lemme 2.2.1. *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on a*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Preuve. Pour l'étudiant.

2.2.1 Solution particulière par séparation des variables

Nous cherchons une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ de deux variables r et θ définies pour $0 \leq r < R_0$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et telle que $u(R_0, \theta) = f(\theta)$ sur la frontière. En utilisant la méthode de séparation des variables, nous posons d'abord $u(r, \theta) = R(r)\phi(\theta)$. On a $\Delta u = 0$ si et seulement si

$$R''(r)\phi(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\phi(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\phi''(\theta) = 0. \tag{2.2}$$

En divisant l'équation (2.2) par $\frac{R(r)\phi(\theta)}{r^2}$, on obtient

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = 0$$

donc

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)}.$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de r et le membre de gauche ne dépend pas de θ, les fonctions $r \mapsto r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}$ et $\theta \mapsto -\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)}$ sont constantes, et donc il existe une constante λ telle que

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = \lambda,$$

et on a

$$\phi''(\theta) + \lambda\phi(\theta) = 0 \tag{2.3}$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \tag{2.4}$$

On s'intéresse à la première de ces équations puisque l'on veut que u soit régulière, on cherche ϕ périodique de période 2π.

Si $\lambda < 0$ les solutions sont des combinaisons exponentielles, de telles fonctions ne sont pas périodiques donc nécessairement, $\lambda \geq 0$ et dans ce cas les solutions de (2.3) sont

$$\phi(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

telles que A et B sont des constantes. Encore une fois la condition $\phi(0) = \phi(2\pi)$ ne peut être satisfaire que lorsque $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. On obtient finalement une famille de solutions

$$\phi_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta).$$

On reprend l'équation (2.4). $R(r)$ est solution de l'équation d'Euler

$$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0.$$

Si $n = 0$, on a

$$r^2R''(r) + rR'(r) = 0 \;\Rightarrow\; rR''(r) + R'(r) = 0 \;\Rightarrow (rR'(r))' = 0.$$

On intègre deux fois par rapport à r, on trouve

$$rR'(r) = c_0 \Rightarrow R'(r) = \frac{c_0}{r} \Rightarrow R(r) = c_0\ln r + d_0.$$

Dans ce cas $\phi(\theta)$ est constante et donc la solution u ne dépend pas de θ

$$u(r,\theta) = c_0 ln(r) + d_0.$$

Si $n \neq 0$, on effectue le changement de variable $z = \ln r$. L'équation (2.4) est équivalente à l'EDO linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2R}{dz^2} - n^2R(z) = 0$$

dont les solutions sont de la forme $R(z) = C_ne^{nz} + D_ne^{-nz}$. Par conséquent, les solutions de (2.4) sont données par $R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Récapitulons toutes les fonctions

$$\begin{cases} u_0(r,\theta) = c_0\ln r + D_0 \\ u_n(r,\theta) = (c_nr^n + D_nr^{-n})(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)), \; n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2.5}$$

Rappelons que l'on cherche des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ dans tout le disque Ω, en particulier au centre du disque. Parmi les fonctions ci-dessus, on élimine donc toutes celles qui n'ont pas de limite quand $r \to 0$. Il reste les fonctions

$$u_n(r,\theta) = (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta))(c_nr^n) = \Big(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta)\Big)r^n, \; n \in \mathbb{N},$$

tel que $\alpha_n = A_n c_n$ et $\beta_n = B_n c_n$. Par superosition, on pose alors

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \Big(\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\Big). \tag{2.6}$$

Cette solution doit vérifier la condition aux limites

$$u(R_0,\theta) = f(\theta). \tag{2.7}$$

Soit le développement en série de Fourier de la fonction f

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

On voit de (2.7) que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} R_0^n \Big(\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\Big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Par identification, il faut que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \\
\alpha_n R_0^n &= a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, \\
\beta_n R_0^n &= b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En remplaçant dans (2.6)

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{R_0^n}\Big(\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi\cos(n\theta) + \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi\sin(n\theta)\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^n\Big(\int_0^{2\pi} f(\varphi)(\cos(n\varphi)\cos(n\theta) + \sin(n\varphi)\sin(n\theta))d\varphi\Big)
\end{aligned}$$

On fait appel à la formule $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$, on trouve

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\Big(1 + 2\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^n\cos(n(\varphi-\theta))\Big)d\varphi.$$

Or,

$$\cos(n(\varphi-\theta)) = \frac{e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}}{2}$$

Ce qui implique que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\Big(1+2\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^n\Big(\frac{e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}}{2}\Big)d\varphi.$$

D'autre part, grâce à la propriété de la série géométrique dont la raison est inférieur à 1

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^n e^{in(\varphi-\theta)} = \frac{re^{i(\varphi-\theta)}}{R_0-re^{i(\varphi-\theta)}}, \qquad \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^n e^{-in(\varphi-\theta)} = \frac{re^{-i(\varphi-\theta)}}{R_0-re^{-i(\varphi-\theta)}}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\Big(1+\frac{re^{i(\varphi-\theta)}}{R_0-re^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{re^{-i(\varphi-\theta)}}{R_0-re^{-i(\varphi-\theta)}}\Big)d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\Big(1+\frac{rR_0e^{i(\varphi-\theta)}-2r^2+rR_0e^{-i(\varphi-\theta)}}{R_0^2+r^2-R_0re^{i(\varphi-\theta)}-R_0re^{-i(\varphi-\theta)}}\Big)d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\Big(1+\frac{2R_0r\cos(\varphi-\theta)-2r^2}{R_0+r^2-2R_0r\cos(\varphi-\theta)}\Big)d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R_0^2-r^2}{R_0^2+r^2-2R_0r\cos(\varphi-\theta)}d\varphi.
\end{aligned}$$

Ou encore pour $x_0=y_0=0$ et $z=x+iy$, la solution du problème (2.1) est donnée par

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_0-(x^2+y^2)}{R_0-2R_0(x\cos\varphi+y\sin\varphi)+x^2+y^2}f(\varphi)d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\Big(\frac{R_0e^{i\varphi}+z}{R_0e^{i\varphi}-z}\Big)f(\varphi)d\varphi
\end{aligned}$$

2.3 Problème de Dirichlet pour le laplacien dans la sphère

On considère la boule Ω de centre O et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$.

2.3.1 Coordonnées sphériques

À un point P de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées cartisiènnes (x,y,z), nous pouvons associer ses coordonées sphériques (r,θ,φ). La coordonnée r est la distance du point P à l'origine

$O = (0,0,0)$. La coordonnée φ est la mesure de l'angle fait par la demi-droite issue de l'origine et passant par la projection orthogonale du point P sur le plan des x, y et la demi-droite de x positifs et finalement la coordonnée θ est la mesure de l'angle fait par la demi-droite issue de l'origine et passant par le point P et la demi droite de z positif. Ces valeurs satisfont les inégalités, $0 \leq r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \pi$, et telles que

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta), \quad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta), \quad z = r\cos(\theta),$$

ou bien

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos\frac{z}{r}.$$

Lemme 2.3.1. *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, on a*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Preuve. Pour l'étudiant.

2.3.2 Résolution par la méthode de séparation des variables

Désormais, on s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = f \quad \text{sur} \quad \partial\Omega = S, \end{cases} \tag{2.9}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(r,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi) \quad r = 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \tag{2.10}$$

tel que f est une fonction continue sur la sphère (frontière de la boule) définie pour $\theta \in [0,\pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Nous cherchons u par la méthode de séparation des variables, on pose

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\psi(\theta)\phi(\varphi).$$

Alors u est la solution de la première équation de (2.10), ceci donne

$$\begin{aligned} R''(r)\psi(\theta)\phi(\varphi) &+ \frac{2}{r}R'(r)\psi(\theta)\phi(\varphi) \\ &+ \frac{1}{r^2}R(r)\psi''(\theta)\phi(\varphi) + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}R(r)\psi'(\theta)\phi(\varphi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(r)\psi(\theta)\phi''(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

En multipliant par $\dfrac{r^2}{R(r)\psi(\theta)\phi(\varphi)}$ on trouve

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+2r\frac{R'(r)}{R(r)}=-\Big(\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}+\frac{\cos(\theta)}{\sin\theta}\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}\Big).$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il faut que chacun des termes soit égal à une constante λ

$$-\Big(r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+2r\frac{R'(r)}{R(r)}\Big)=\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}+\frac{\cos(\theta)}{\sin\theta}\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=\lambda.$$

Ceci est équivalent à

$$r^2R''(r)+2rR'(r)+\lambda R(r)=0 \tag{2.11}$$

$$\sin^2\theta\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}+\sin\theta\cos\theta\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}+\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=\lambda\sin^2\theta. \tag{2.12}$$

L'équation (2.12) est aussi équivalente à

$$\sin^2\theta\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}+\sin\theta\cos\theta\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}-\lambda\sin^2\theta=-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}$$

cette équation est satisfaite si et seulement si il existe une constante μ telle que

$$\sin^2\theta\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)}+\sin\theta\cos\theta\frac{\psi'(\theta)}{\psi(\theta)}-\lambda\sin^2\theta=-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)}=\mu$$

et donc

$$\sin^2\theta\psi''(\theta)+\sin\theta\cos\theta\psi'(\theta)-(\lambda\sin^2\theta+\mu)\psi(\theta)=0 \tag{2.13}$$

$$\phi''(\varphi)+\mu\phi(\varphi)=0 \tag{2.14}$$

Il est nécessaire que R soit bornée sur $[0,1]$, ψ soit bornée sur $[0,\pi]$ et ϕ soit de période 2π et bornée sur $[0,2\pi]$.

• **Résolution de l'équation (2.14).**

On a vu dans la section précédente que cette équation a une solution périodique de période 2π donnée par

$$\phi_m(\varphi)=A_m\cos(m\varphi)+B_m\sin(m\varphi),\quad \mu=m^2,\quad m\in\mathbb{N}.$$

• **Résolution de l'équation (2.13) telle que $\mu=m^2$, $m\in\mathbb{N}$.**

Pour trouver la fonction ψ on pose $\omega=\cos\theta$ ou $\theta=\arccos\omega$. On a

$$\psi'(\theta)=-\sin\theta\frac{d\psi}{d\omega},\quad \psi''(\theta)=\sin^2\theta\frac{d^2\psi}{d\omega^2}-\cos\theta\frac{d\psi}{d\omega}.$$

Il est donc possible de déterminer l'équation différentielle à l'équation

$$\sin^2\theta \frac{d^2\psi}{d\omega^2} - 2\cos\theta \frac{d\psi}{d\omega} - (\lambda + \frac{m^2}{\sin^2\theta})\psi = 0$$

On pose $T(\omega) = \psi(\arccos\omega)$, $\sin^2\theta = 1-\omega^2$ on trouve

$$(1-\omega^2)T''(\omega) - 2\omega T'(\omega) - \Big(\lambda + \frac{m^2}{1-\omega^2}\Big)T(\omega) = 0. \tag{2.15}$$

Il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville.

Théorème 2.3.2. ***Polynômes de Legendre****. On considère le problème suivant : Résoudre sur l'intervalle* $]-1,1[$ *l'équation muni des conditions aux limites*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{df}{dx}\Big) + \lambda f(x) = 0 \\ &\lim_{x\to -1} f(x) \text{ existe et finie} \\ &\lim_{x\to 1} f(x) \text{ existe et finie.} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les solutions de ce problème sont les nombres $\lambda_n = n(n+1), n \in \mathbb{N}$, *et les fonctions*

$$P_n(x) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

appelées polynômes de Legendre. Ainsi $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$

Équation de Legendre : Soit $\nu > 0$ et $x \in]-1,1[$. L'équation

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \nu(\nu+1)f(x) = 0$$

s'appelle équation de Legendre d'indice ν. Il existe deux solutions indépendantes f_1 et f_2 développable en série

$$f_1(x) = 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!}x^2 + \frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!}x^4 + ...$$

$$f_2(x) = x - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!}x^3 + \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+1)(\nu+4)}{4!}x^5 + ...$$

Toute solution est alors de la forme $a_1 f_1 + a_2 f_2$ pour $|x| < 1$.
Si $\nu = 2k$ est pair, f_1 est un polynôme proportionnel à P_{2k}.
Si $\nu = 2k+1$ est impair, f_2 est un polynôme proportionnel à P_{2k+1}.
Ce sont les seules solutions qui restent bornées au voisinage de 1 et -1.

Théorème 2.3.3. ***Fonctions de Legendre associées***. *On considère le problème de Sturm-Liouville suivant*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{df}{dx}\Big) - \frac{m^2}{1-x^2}f(x) + \lambda f(x) = 0 \\ &\lim_{x\to -1} f(x) \text{ existe et finie} \\ &\lim_{x\to -1} f(x) \text{ existe et finie.} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Les solutions de ce problème sont les nombres $\lambda_n = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ *et les fonctions*

$$P_n^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

appelées fonctions de Legendre associées définies pour $m \leq n$. *On peut exprimer directement*

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \Big(n+\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n.$$

Si $m = 0$ *on retrouve les polynômes* P_n.

Les polynômes P_n^m, $n \in \mathbb{N}$, m fixé, forment une base orthogonale de $L^2(-1,1)$ pour normer les éléments de cette base, on calcule $\|P_n^m\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$ et on a $\int_{-1}^{1} P_n^m P_l^m dx = 0$, m fixé, $n \neq l$.

Définition 2.3.4. ***Harmoniques sphériques***. *Les fonctions*

$$C_{m,n}(\theta,\varphi) = \cos(m\varphi)P_n^m(\cos\theta), \quad S_{m,n} = \sin(m\varphi)P_n^m(\sin\theta)$$

s'appelle harmoniques sphériques ou harmoniques de surface.

Théorème 2.3.5. *Toute fonction définie sur la sphère et de carré intégrable f c'est à dire toute fonction de* $L^2([0,\pi]\times[0,2\pi])$ *se développe en série de Fourier par rapport aux harmoniques sphériques*

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\big(A_{m,n}C_{m,n}(\theta,\varphi) + B_{m,n}S_{m,n}(\theta,\varphi)\big),$$

avec

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{(n-m)!}{\pi(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\cos(m\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta d\varphi d\theta \\ B_{m,n} &= \frac{(n-m)!}{\pi(n+m)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)\sin(m\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

La convergence a lieu dans L^2, *elle est uniforme si* f *est continue.*

Pour déterminer la solution de (2.15) on utilise le Théorème 2.3.3. Puisque ψ est borné sur $[0,\pi]$, T a une limite finie quand ω tend vers ± 1. D'après le Théorème 2.3.3, on déduit que $\lambda = -n(n+1), n \in \mathbb{N}$ et $T(\omega) = P_n^m(\omega)$ et donc

$$\psi_{n,m}(\theta) = \gamma_{n,m} T(\cos\theta) = \gamma_{n,m} P_n^m(\cos\theta), \quad \text{tel que } \gamma_{n,m} \text{ est constant.}$$

• **Résolution de l'équation (2.11) tel que $\lambda = -n(n+1)$.**
Pour résoudre l'équation (2.11), ou bien on effectue le changement de variable $z = ln\, r$ de la même façon que dans la résolution de (2.4), ou bien l'étudier de manière systématique : c'est l'objet de la théorie de Fuchs. On cherche $R(r)$ de la forme $Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2}$, on obtient l'équation indicielle

$$\begin{aligned} r^2(\alpha(\alpha-1)r^{(\alpha-2)}) + 2r(\alpha r^{\alpha-1}) - n(n+1)r^\alpha = 0 \;\Rightarrow&\quad \alpha(\alpha-1) + 2\alpha - n(n+1) = 0 \\ \Rightarrow&\quad \alpha(\alpha+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

on trouve $\alpha_1 = n$ et $\alpha_2 = -(n+1)$ donc

$$R(r) = Dr^n + Er^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour que R reste borné, il faut que $\lim\limits_{r\to 0} R(r)$ soit finie alors il faut que E soit nul. on déduit que

$$R_n(r) = D_n r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• **La formule de $u(r,\theta,\varphi)$.** Grâce aux étapes précédentes, on déduit que

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n P_n^m(\cos\theta)(\alpha_{m,n}\cos(m\varphi) + \beta_{m,n}\sin(m\varphi))$$

avec $\alpha_{m,n} = D_n\gamma_{n,m}A_m$ et $\beta_{m,n} = D_n\gamma_{nm}B_m$.
Cette solution vérifie la condition au bord i.e. $u(1,\theta,\varphi) = F(\theta,\varphi)$. On utilise le théorème 2.3.5, on a

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} K_{m,n}C_{m,n}(\theta,\varphi) + L_{m,n}S_{n,m}(\theta,\varphi).$$

On choisit donc $K_{m,n} = \alpha_{m,n}$ et $L_{m,n} = \beta_{m,n}$ où

$$K_{m,n} = \frac{1}{\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)C_{m,n}\sin\theta d\theta d\varphi \tag{2.18}$$

$$L_{m,n} = \frac{1}{\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)S_{m,n}\sin\theta d\theta d\varphi. \tag{2.19}$$

Théorème 2.3.6. *La solution au problème de Dirichlet pour la sphère de rayon R_0 centré à l'origine relatif à la fonction $f(\theta, \varphi)$ est*

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n \big(K_{m,n}C_{m,n}(\theta,\varphi) + L_{m,n}S_{m,n}(\theta,\varphi)\big)$$

avec $C_{m,n}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi)$ et $S_{m,n}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi)$ et $K_{m,n}$, $L_{m,n}$ sont donnés dans (2.18) et (2.19), P_n^m est la fonction de Legendre associée, $C_{m,n}$ et $S_{m,n}$ sont les harmoniques sphériques correspondantes.

Remarque 2.3.7. *Si on suppose que la fonction $f(\theta,\varphi)$ ne dépend pas de φ on cherchera une solution u ne dépendant pas non plus de φ ce qui revient à faire $m = 0$. On obtient alors pour une sphère de rayon R_0 la solution au problème de Dirichlet relatif à f est*

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n+1}{2}\Big(\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx\Big)\Big(\frac{r}{R_0}\Big)^n P_n(cos\theta).$$

2.4 Problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$

On considére le problème de Dirichlet à l'extérieur de la sphère du centre O et de rayon R_0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} = 0 \quad r > R_0,\ 0 \le \theta \le \pi, \\ u(R_0,\theta) = f(\theta),\ 0 \le \theta \le \pi \\ \lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

La méthode de séparation des variables peut être aussi utilisée.

Proposition 2.4.1. *La solution du problème (2.20) est*

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n+1}{2}\Big(\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx\Big)\Big(\frac{R_0}{r}\Big)^{n+1} P_n(\cos\theta).$$

Preuve. Pour $u(r,\theta) = R(r)\psi(\theta)$, R est solution de (2.11) et ψ est solution de (2.13) tel que $\mu = 0$, on obtient

$$\psi_n(\theta) = \gamma_n P_n(\cos\theta), \quad R(r) = Dr^n + Er^{-(n+1)}.$$

De la troisième ligne de (2.20), il faut que la limite de $R(r)$ quand r tend vers ∞ soit nul, pour cela il suffit de prendre D égal à zero. Par conséquent,

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Quand $r = R_0$, on a de la deuxième équation de (2.20)

$$u(R_0,\theta) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n R_0^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) = f(\theta) = \sum_{n\geq 0} K_n P_n(\cos\theta)$$

tel que $K_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$. Il suffit donc de prendre $\alpha_n = R_0^{n+1}K_n$.

2.5 Fonctions harmoniques

Définition 2.5.1. *Une fonction u qui vérifie $\Delta u = 0$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, s'appelle fonction harmonique.*

Théorème 2.5.2. ***Formule de Green***
1) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω, on a

$$\int_\Omega \Delta\varphi(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\sigma.$$

2) Soient φ et ψ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω, on a

$$\int_\Omega \varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx + \int_\Omega \nabla\varphi(x)\cdot\nabla\psi(x) dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} d\sigma$$

Théorème 2.5.3. ***Lemme de Green***
Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$. On suppose que les dérivées de u sont continues sur $\overline{\Omega}$. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de Ω et $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ la distance du point M de coordonnée (x,y,z), alors

$$4\pi u(x_0,y_0,z_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\eta} - u\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma - \int_\Omega \frac{1}{r}\Delta u dx dy dz.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, le résultat analogue est le suivant

$$2\pi u(x_0,y_0) = \int_{\partial\Omega} \left(\ln\left(\frac{1}{r}\right)\frac{du}{d\eta} - u\frac{d}{d\eta}\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma - \int_\Omega \ln\left(\frac{1}{r}\right)\Delta u dx dy.$$

Théorème 2.5.4. ***Théorème de la moyenne***
i) Soit u une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ contenant le disque de rayon R centré au point $M_0 = (x_0, y_0)$ alors $\forall r < R$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) d\theta.$$

ii)Soit u une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ contenant la boule de rayon R centré au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ alors $\forall r < R$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi\sin\theta, y_0 + r\sin\varphi\sin\theta, z_0 + r\cos\theta) d\theta d\varphi.$$

On dit que u a la propréte de la moyenne dans Ω. Plus généralement, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, soit u harmonique de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$, alors pour tout point $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $r > 0$ tel que la boule fermée $B(\boldsymbol{x}, r)$ du centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon r soit inclue dans Ω, on a

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|B(\boldsymbol{x}, r)|} \int_{B(\boldsymbol{x}, r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma(\partial B(\boldsymbol{x}, r))} \int_{\partial B(\boldsymbol{x}, r)} u(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

tel que $|B(\boldsymbol{x}, r)|$ est la mesure de Lebesgue de $B(\boldsymbol{x}, r)$ et $\sigma(\partial B(\boldsymbol{x}, r))$ est la mesure de surface de la sphère du centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon r.

Preuve. Soit u une fonction harmonique i.e. $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et $\Delta u = 0$. Soit M_0 un point de Ω, on considère D le disque du centre M_0 et de rayon $r > 0$. D'après le lemme de Green, on a

$$2\pi u(x_0, y_0) = \int_{\partial D} \Big\{ \ln\Big(\frac{1}{r}\Big) \frac{du}{d\eta} - u \frac{d}{d\eta}\Big(\ln\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big) \Big\} d\sigma - \int_D \ln\Big(\frac{1}{r}\Big) \Delta u d\boldsymbol{x}.$$

On utilise la formule de Green on trouve que

$$\int_D \Delta u d\boldsymbol{x} = \int_{\partial D} \frac{du}{d\eta} d\sigma,$$

comme u est harmonique on obtient

$$\int_D \Delta u d\boldsymbol{x} = \int_{\partial D} \frac{du}{d\eta} d\sigma = 0.$$

Par conséquent,

$$2\pi u(x_0, y_0) = -\int_{\partial D} \Big\{ \ln\Big(\frac{1}{r}\Big) \frac{du}{d\eta} - u \frac{d}{d\eta}\Big(\ln\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big) \Big\} d\sigma$$

On effectue le changement de variable en coordonnée polaire $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$ et $d\boldsymbol{x} = dxdy = rdrd\theta$ tel que $0 \leq r \leq \rho$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pour $(x, y) \in \partial D$ alors

$$2\pi u(x_0, y_0) = \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)d\theta.$$

De la même façon on démontre la propriété de la moyenne dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant les coordonnées sphériques.

Théorème 2.5.5. ***Principe de maximum***
Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$. Soit u une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ harmonique dans Ω et non constante dans Ω. Alors le maximum de u est atteint sur le bord $\partial\Omega$ et seulement sur le bord de Ω. On dit que u vérifie le principe de maximum.

Preuve. Tout d'abord on a Ω borné et u est continue sur $\overline{\Omega}$ donc u admet un maximum M dans $\overline{\Omega}$. On montre par l'absurde que si le maximum de u est atteint dans Ω alors u est constant. Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ tel que $u(\boldsymbol{x}_0) = \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) := M$ et u harmonique. Soit $\overline{B}$ une boule fermée de centre $\boldsymbol{x}_0$ et de rayon r contenant dans Ω. Par définition de maximum,

$$\forall \boldsymbol{y} \in \Omega : u(\boldsymbol{y}) \leq M$$

ce qui implique que

$$\forall \boldsymbol{y} \in \Omega, M - u(\boldsymbol{y}) \geq 0 \tag{2.21}$$

D'autre part, d'après le théorème de la moyenne on a

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{|B|}\int_B u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \Rightarrow \frac{1}{|B|}\int_B (M - u(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y} = 0$$

en combinant avec (2.21) on trouve que $M - u(\boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{y} \in \Omega$ et donc u est constante.

Corollaire 2.5.6. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$. Soit u une fonction harmonique. Alors, pour tout x dans Ω, $|u(x)| \leq \max\limits_{\partial\Omega}|u|$. En particulier, si u est nulle sur $\partial\Omega$ elle est nulle dans Ω.*

Preuve. Puisque u est harmonique, $|u|$ est aussi harmonique et atteint le principe de maximum.
Si $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\max\limits_{\partial\Omega} u = 0$ et donc $|u| \leq \max\limits_{\partial\Omega} u = 0$ dans Ω et donc u est nulle dans Ω.

Corollaire 2.5.7. *Le problème de Dirichlet pour le laplacien a une solution unique.*

Preuve. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad u = g \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Donc la fonction $\bar{u} = u_1 - u_2$ vérifie $\Delta\bar{u} = 0$ dans Ω et $\bar{u} = 0$ sur $\partial\Omega$. D'après le corollaire précédant $\bar{u}$ est nulle dans Ω. D'où l'unicité.

Théorème 2.5.8. *Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$ et u une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ qui a la propriété de la moyenne dans Ω, alors u est harmonique dans Ω, ce qui entraîne qu'elle vérifie le principe de maximum.*

Preuve. Nous ferons la démonstration en dimension 2. Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point de Ω et D le disque de centre $\boldsymbol{x}_0$ entièrement contenu dans Ω, γ la frontière de D. On suppose que $u = f$ sur γ tel que f est une fonction définie sur γ. Soit v la solution du problème de Dirichlet suivant

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } D, \quad v = f \quad \text{sur } \gamma.$$

Comme v est harmonique, v a la propriété de la moyenne donc

$$(u - v)(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} - \frac{1}{2\pi}\int_\gamma v(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

D'autre part, $u = f$ sur γ et $v = f$ sur γ ce qui implique que $(u - v)(\boldsymbol{x}_0) = 0$ et donc $u(\boldsymbol{x}_0) = v(\boldsymbol{x}_0)$ et aussi $u = v$ dans D. Alors u est harmonique dans D, en particulier $\Delta u(\boldsymbol{x}_0) = 0$ et $\boldsymbol{x}_0$ est arbitraire dans Ω, par conséquent, $\Delta u = 0$ dans Ω.

Proposition 2.5.9. *i) Toute fonction harmonique dans un ouvert Ω est de Classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω.*
ii) Les dérivées d'une fonction harmonique dans Ω sont harmoniques dans Ω.

Preuve. 1) Soit (x_0, y_0, z_0) un point de Ω de $\mathbb{R}^3$ et B la boule du centre (x_0, y_0, z_0) toute entière contenue dans Ω et de frontière S. Appliquons le lemme de Green en explicitant r

$$\begin{aligned}4\pi u(x_0, y_0, z_0) = &\int_S \Big(\frac{1}{\Big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\Big)^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{d\eta}d\sigma \\ &- \int_S u\frac{d}{d\eta}\Big(\frac{1}{\Big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\Big)^{\frac{1}{2}}}\Big)\Big)d\sigma \\ &- \int_B \frac{1}{\Big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\Big)^{\frac{1}{2}}}\Delta u\, dxdydz.\end{aligned}$$

Chacune des intégrales est dérivable par rapport à x_0, y_0, z_0 la dérivée s'obtient en dérivant sous le signe d'intégration. On vérifie qu'on peut intégrer une infinité de fois.
2) Soit u fonction harmonique dans Ω, tel que $\Delta u = 0$

$$\Delta\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right) = \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}(\Delta u) = 0.$$

donc $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_i^m}$ est harmonique dans Ω.

Théorème 2.5.10. ***Théorème de Liouville***
i) Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\lim_{\boldsymbol{x}_0\to\infty} u(\boldsymbol{x}_0) = 0$ alors u est identiquement nulle.
ii) Une fonction harmonique bornée dans $\mathbb{R}^d$ est constante.

Preuve. Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point de $\mathbb{R}^d$ et $B(O,R)$ la boule de centre O et de rayon R. tel que $\boldsymbol{x}_0 \in B(O,R)$ i.e. $d(\boldsymbol{x}_0, O) < R$. On a u est harmonique, d'après le principe de maximum

$$|u(\boldsymbol{x}_0)| \leq \max_{\partial B(O,R)} u.$$

Comme $\lim_{\boldsymbol{x}_0\to\infty} u(\boldsymbol{x}_0) = 0$, ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 \textit{ tel que } \forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d \setminus B(O,R), |u(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon.$$

Le principe de maximum est atteint en dehors de $B(O,R)$, sur $\partial B(O,R) \subset \mathbb{R}^d \setminus B(O,R)$ alors $\lim_{R\to\infty} \max_{\partial B(O,R)} u = 0$ et donc $u(\boldsymbol{x}_0) = 0$, $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$.

Théorème 2.5.11. ***Théorème de Harnack***
Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$. Soit $(u_n)_n$ une suite des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et harmoniques dans Ω. On suppose que $(u_n)_n$ converge uniformément sur $\partial\Omega$ lorsque $n \to \infty$ alors $(u_n)_n$ converge uniformément dans Ω vers une fonction harmonique.

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et harmoniques dans Ω i.e. $\Delta u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On suppose que $(u_n)_n$ converge uniformément sur $\partial\Omega$ lorsque $n \to \infty$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \textit{tel que } \; \forall p \leq q \leq n_0 : \; |u_p(x) - u_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Or, pour p et q fixés $u_p - u_q$ est harmonique $\Delta(u_p - u_q) = 0$ dans Ω et $|u_p - u_q|$ atteint son maximum sur $\partial\Omega$ et donc $|u_p - u_q| < \max_{\partial\Omega}|u_p - u_q| < \varepsilon$ dans Ω. Et donc $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans Ω. On note u la limite de $(u_n)_n$ quand $n \to \infty$. Comme u_n vérifie pour tout point n la propriété de la moyenne dans Ω, u vérifie aussi cette propriété. Comme u est continue sur $\overline{\Omega}$ d'après le théorème 2.5.8, u est harmonique.

2.6 Noyau de Poisson dans le disque

Définition 2.6.1. *On appelle noyau de Poisson relatif au disque du centre O et de rayon R la fonction harmonique dans Ω définie par*

$$\mathcal{P}_\theta(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - (x^2+y^2)}{R^2 - 2R(x\cos\theta + y\sin\theta) + x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi}Re\Big(\frac{Re^{i\theta} + (x+iy)}{Re^{i\theta} - (x+iy)}\Big).$$

$\mathcal{P}_\theta$ est harmonique dans Ω et strictement positive pour tout θ et pour tous x, y tels que $x^2 + y^2 < R^2$.

Remarque 2.6.2. *$\mathcal{P}_\theta$ dépend de x et y par l'intermédiaire de $z = x+iy$, on note $\mathcal{P}_\theta(x,y)$ sous la forme $\mathcal{P}_\theta(z)$ et on a*

$$\mathcal{P}_\theta(z) = \frac{1}{2\pi}Re\Big(\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\Big).$$

Théorème 2.6.3. *Soit f une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Soit Ω le disque $x^2 + y^2 < R^2$ et $\partial\Omega$ sa frontière. Il existe une seule fonction u telle que*
1) u est harmonique dans Ω.
2) $\lim\limits_{\substack{z \to R\,e^{i\theta} \\ z\in\Omega}} u(z) = f(\theta)$.

Cette fonction est $u(x,y) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\theta(x,y) f(\theta) d\theta$.

Preuve. 1) Soit $u(x,y) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\theta(x,y) f(\theta) d\theta$, $\mathcal{P}_\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut dériver sous le signe d'intégration

$$\Delta u(x,y) = \int_0^{2\pi} \Delta\mathcal{P}_\theta(x,y) f(\theta) d\theta = 0$$

2) Vérifions d'abord que pour $|z| < R$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}_\theta(x,y) d\theta = 1$. On écrit

$$\frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta} - z} = \frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta}(1 - \frac{z}{R\,e^{i\theta}})} = \frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta}}\frac{1}{1 - zR^{-1}e^{-i\theta}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{R}e^{-i\theta}\right| &= \frac{1}{R}|(x+iy)(\cos\theta - i\sin\theta)| \\
&= \frac{1}{R}|(x\cos\theta + y\sin\theta) + i(y\cos\theta - x\sin\theta)| \\
&= \frac{1}{R}\Big((x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{R} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

La série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\frac{z}{R}e^{-i\theta}\Big)^n$ est de raison inférieur à 1, on voit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\frac{z}{R}e^{-i\theta}\Big)^n = \frac{1}{1 - zR^{-1}e^{-i\theta}}$$

et on aura

$$\begin{aligned}
\frac{R\,e^{i\theta}+z}{R\,e^{i\theta}-z} &= \frac{R\,e^{i\theta}+z}{R\,e^{i\theta}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(\frac{z}{R}e^{-i\theta}\Big)^n \\
&= \frac{R\,e^{i\theta}+z}{R\,e^{i\theta}}\Big(1 + \frac{z}{R}e^{-i\theta} + \frac{z^2}{R^2}e^{-2i\theta} + \cdots\Big) \\
&= 1 + 2\frac{z}{R}e^{-i\theta} + 2\frac{z^2}{R^2}e^{-2i\theta} + \cdots
\end{aligned}$$

Pour $|z| \le \rho < R$ à l'intérieur du disque de convergence on peut intégrer terme à terme. Or, $\forall n > 0$,

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}d\theta = \int_0^{2\pi}\cos(n\theta)d\theta - i\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)d\theta = \frac{1}{n}\sin(n\theta)\Big|_0^{2\pi} + i\frac{1}{n}\cos(n\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Donc,

$$\int_0^{2\pi}\mathcal{P}_\theta(x,y)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta = 1.$$

Vérifions maintenant que $\lim\limits_{\substack{z\to Re^{i\theta_0}\\ |z|<R}} u(z) = f(\theta_0)$. On a $\forall\eta \in]0, 2\pi[$,

$$\begin{aligned}
u(z) - f(\theta_0) &= \int_0^{2\pi}\mathcal{P}_\theta(x,y)f(\theta)d\theta - f(\theta_0) = \int_0^{2\pi}\mathcal{P}_\theta(x,y)\big(f(\theta)-f(\theta_0)\big)d\theta \\
&= \underbrace{\int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta}\mathcal{P}_\theta(x,y)\big(f(\theta)-f(\theta_0)\big)d\theta}_{I_1} + \underbrace{\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}\mathcal{P}_\theta(x,y)\big(f(\theta)-f(\theta_0)\big)d\theta.}_{I_2}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque f est continue il existe η tel que

$$\forall\theta \in [\theta_0-\eta, \theta_0+\eta],\ |f(\theta)-f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

alors
$$\Big|\int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta}\mathcal{P}_\theta(x,y)\big(f(\theta)-f(\theta_0)\big)d\theta\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi}\mathcal{P}_\theta(z)d\theta = \frac{\varepsilon}{2}$$
Ayant fixé η, nous allons montrer qu'en choisissant z assez proche de $R\,e^{i\theta}$, $|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On suppose que $z = r\,e^{i\varphi}$ tel que $\varphi \in [\theta_0 - \frac{\eta}{2}, \theta_0 + \frac{\eta}{2}]$. On a pour $|\theta - \theta_0| > \eta$
$$|\theta - \varphi| > \frac{\eta}{2}$$
$$\begin{aligned}|I_2| &= \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{|\theta-\theta_0|>\eta} Re\Big(\frac{R^2-|z|^2}{R\,e^{i\theta}-z)^2}\Big)(f(\theta)-f(\theta_0))d\theta\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{R^2-|z|^2}{|R\,e^{i\theta}-z|^2}(|f(\theta)|+|f(\theta_0)|)d\theta.\end{aligned}$$
Comme f est continue sur $[0, 2\pi]$, il existe $k > 0$, tel que $|f(\theta)| < k$
$$|I_2| \leq \frac{k}{\pi}(R^2-r^2)\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{1}{|R\,e^{i\theta}-r\,e^{i\varphi}|^2}d\theta$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}|Re^{i\theta}-re^{i\varphi}|^2 &= |e^{i\theta}|^2|R-r\,e^{i(\varphi-\theta)}|^2 \\ &= |(R-r\cos(\varphi-\theta))^2+\big(r\sin(\varphi-\theta)\big)^2| \\ &> r\sin|\varphi-\theta| \\ &> r\sin|\frac{\eta}{2}|.\end{aligned}$$
Ceci donne
$$\frac{1}{|Re^{i\theta}-r\,e^{i\varphi}|} \leq \frac{1}{r\sin|\frac{\eta}{2}|}$$
Par conséquent,
$$|I_2| \leq \frac{k}{\pi}\frac{R^2-r^2}{r\sin\frac{\eta}{2}}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}d\theta = \frac{k(2\pi-2\eta)}{\pi}\frac{R^2-r^2}{r\sin\frac{\eta}{2}}.$$
On passe à la limite quand r tend vers R on trouve $\lim\limits_{r\to R} I_2 = 0$. On peut choisir r tel que $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|z| > r$.

2.7 Noyau de Poisson dans le demi-plan

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$. On cherche une fonction u harmonique définie sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ bornée telle que
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,0)\\ y>0}} u(x,y) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On introduit la transformée de Fourier de u par rapport à x

$$\mathcal{F}(u)(\nu,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} u(x,t)dx, \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

On suppose que $\mathcal{F}(u)$ est une solution qu'on puisse la dériver en dérivant sous le signe d'intégration et que $\forall t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
En prenant la transformée de Fourier des deux membres de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

par rapport à x, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)dx$$

Soit

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}(u)}{\partial y^2}(\nu,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)dx$$

En intégrant par partie deux fois, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dx = (2i\pi\nu)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} u(x,t)dx$$

et donc

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}(u)}{\partial y^2}(\nu,y) = 4\pi^2\nu^2 \mathcal{F}(u)(\nu,y),$$

est une équation différentielle homogène d'ordre 2 sa solution est

$$\mathcal{F}(u)(\nu,y) = A(\nu)\, e^{-2\pi\nu y} + B(\nu)\, e^{2\pi\nu y}, \quad \forall y > 0.$$

On rappelle que la solution doit être bornée, donc

$$\mathcal{F}(u)(\nu,y) = c(\nu)\, e^{-2\pi|\nu|y}, \quad \forall y > 0.$$

Quand $y = 0$ on trouve $u(\nu,0) = c(\nu)$ et donc $\mathcal{F}(u)(\nu,y) = \mathcal{F}(u)(\nu,0)e^{-2\pi|\nu|y}$. Comme

$$\mathcal{F}(u)(\nu,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} u(x,0)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu x} f(x)dx = \mathcal{F}(f)(\nu)$$

d'où

$$\mathcal{F}(u)(\nu,t) = \mathcal{F}(f)(\nu)e^{-2\pi|\nu|y}.$$

Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, comme $e^{-2\pi|\nu|y} \leq 1$, on trouve que pour tout $y > 0, \nu \mapsto \mathcal{F}(f)(\nu)e^{-2\pi|\nu|y}$ est également dans $L^1(\mathbb{R})$, et on peut appliquer la transformée de Fourier réciproque pour trouver $u(x, y)$.

$$\forall y > 0, \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\mathcal{F}(u)(\nu, y)d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\mathcal{F}(f)(\nu)e^{-2\pi|\nu|y}d\nu.$$

On montre que

$$\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-2\pi|\nu|y}\big) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|\nu|y}e^{2\pi ix\nu}d\nu &= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi\nu y+2\pi ix\nu}d\nu + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi\nu y+2\pi ix\nu}d\nu \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(2\pi y+2\pi ix)\nu}d\nu + \int_{0}^{+\infty} e^{(-2\pi y+2\pi ix)\nu}d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi(y+ix)}e^{(2\pi y+2\pi ix)\nu}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi(ix-y)}e^{(-2\pi y+2\pi ix)\nu}\Big|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{1}{y+ix} - \frac{1}{-y+ix}\Big) \\
&= \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\mathcal{F}(f)(\nu)\mathcal{F}\big(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\big)d\nu$$

Grâce au théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu x}\mathcal{F}(f * \frac{y}{\pi(x^2+y^2)})d\nu \\
&= \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(f * \frac{y}{\pi(x^2+y^2)})\Big) \\
&= f * \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}dt.
\end{aligned}$$

Théorème 2.7.1. *Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. La seule fonction harmonique bornée dans le demi-plan $y > 0$ telle que*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(t,0)\\ y>0}} u(x,y) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

est

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

Définition 2.7.2. *La fonction $\mathcal{P}_t(x,y)$ définie dans le demi-plan $y>0$ par*

$$\mathcal{P}_t(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, s'appelle le noyau de Poisson du demi plan supérieur, c'est une fonction harmonique dans le demi plan $y>0$. La solution au problème de Dirichlet est alors

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_t(x,y) f(t)dt.$$

Exemple 2.7.3. *On cherche la solution du problème de Dirichlet dans le demi-plan $y>0$, telle que $f(x) = \cos x$. En effet, on a*

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

On sait que, $\cos t = Re(e^{it})$ et donc

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}Re\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t-x)^2+y^2}dt\Big) = \frac{1}{\pi y}Re\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(\frac{t-x}{y})^2+1}dt\Big).$$

On pose $s = \frac{t-x}{y}$ donc $t = ys+x$ et $dt = yds$, on aura

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}Re\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(ys+x)}}{s^2+1}ds\Big) = \frac{1}{\pi}Re\Big(e^{ix}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iys}}{s^2+1}ds}_{I}\Big).$$

On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{bix}}{a^1+x^2} = \frac{\pi}{a}e^{-ab}, \quad \forall a,b>0$$

et donc,

$$I = \pi e^{-y}$$

Par conséquent,

$$u(x,y) = Re(e^{ix-y}) = \cos x e^{-y}.$$

2.8 Fonctions de Green

On note $\boldsymbol{x}$ le vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{x}_0$ le vecteur (x_0, y_0, z_0) de $\mathbb{R}^3$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. On veut résoudre le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Ce problème a une solution unique $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Théorème 2.8.1. *Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, on suppose qu'il existe une fonction $H \in \mathcal{C}^2(\Omega \times \overline{\Omega})$ telle que*

$$\begin{cases} \Delta H = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ H = \dfrac{1}{r} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

tel que $r = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^3}$. On pose $G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}(H - \frac{1}{r})$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est solution du problème de Dirichlet (2.22) alors

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x}) \frac{\partial G}{\partial \eta}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) d\sigma.$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ et soit H une fonction de $\mathcal{C}^2(\Omega \times \overline{\Omega})$ telle que $\Delta H = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$ et $H = \frac{1}{r} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$. D'après la formule de Green, on a

$$\int_\Omega u \Delta H \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla H d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial H}{\partial \eta} d\sigma$$
$$\int_\Omega H \Delta u \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla H dx = \int_{\partial\Omega} H \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.$$

On retranche ces deux équations, on obtient

$$\int_\Omega (H \Delta u(x) - u \Delta H) \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} H \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial H}{\partial \eta} d\sigma$$

En vertu du lemme de Green (Theorème 2.5.3)

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{1}{r} \frac{du}{d\eta} - u \frac{d}{d\eta} \Big(\frac{1}{r} \Big) \Big) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{1}{r} \Delta u d\boldsymbol{x}$$

Mettant bout à bout les deux dernières équations

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \Big((\frac{1}{r} - H) \frac{du}{d\eta} + u \frac{d}{d\eta} \Big(H - \frac{1}{r} \Big) \Big) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_\Omega (H - \frac{1}{r}) \Delta u d\boldsymbol{x}$$

On pose $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi}(H - \frac{1}{r})$. Comme $H = \frac{1}{r}$ sur $\partial\Omega$, $G = 0$ sur $\partial\Omega$. et on a

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0) &= \int_{\partial\Omega} u \frac{dG}{d\eta} d\sigma + \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \Delta u(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} g \frac{dG}{d\eta} d\sigma + \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Définition 2.8.2. *On appelle fonction de Green de Ω (relatif au laplacien) une fonction définie sur $\Omega \times \Omega$ ayant la propriété suivante : pour tout point $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ la fonction $\boldsymbol{x} \mapsto G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\Omega \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$, nulle sur $\partial\Omega$ et vérifie $\Delta G = \delta(\boldsymbol{x}_0)$, tel qe δ est la distribution de Dirac $\big(\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(\boldsymbol{x}_0)\big)$.*

Théorème 2.8.3. *1) Pour tout ouvert borné Ω, il existe une fonction de Green G (relative à Δ).*
2) G est symétrique au sens où

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})$$

elle vérifie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)} \frac{dG}{d\eta} d\sigma = 1.$$

2.9 Exercices

Exercice 2.9.1. *Trouver la solution du problème de Dirichlet*

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

telle que $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ avec les conditions aux limites,

$$u(1, \theta) = 2 + \cos 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta.$$

et $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$.

Exercice 2.9.2. *En utilisant la méthode de séparation des variables, résoudre l'équation de Laplace suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a \quad \text{et} \quad 0 < y < b,$$

telles que

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ u(x,b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0,y) = f(y), \\ u(a,y) = g(y) \end{cases}$$

avec $f(0) = f(b) = 0$ *et* $g(0) = g(b) = 0$.

Exercice 2.9.3. *Soit la boule* $B \subset \mathbb{R}^3$ *de centre* O *et de rayon* $R_0 > 0$, *de frontière* ∂B. *On cherche* u *une fonction bornée solution du problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 \leq r < R_0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u = f \quad \text{sur } \ \partial B. \end{cases} \tag{2.24}$$

On suppose que f *dépend seulement de la variable* θ.

1) Montrer que si $u(r,\theta) = R(r)\psi(\theta)$, *il existe une constante* λ *telle que* $R(r)$ *et* $\psi(\theta)$ *vérifient*

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \tag{2.25}$$

$$\psi''(\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\psi'(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0. \tag{2.26}$$

2) On effectue le changement de variable $z = \ln r$, *résoudre l'équation* (2.25).

3) Soit P_n, $n \in \mathbb{N}$ *les polynômes de Legendre définie sur* $]-1,1[$ *vérifiant l'équation*

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2x\ P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Trouver la solution de (2.26).

4) Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si} \quad m = n. \end{cases}$$

En déduire la solution $u(r,\theta)$ *de* (2.24).

Exercice 2.9.4.

1) Montrer que la fonction $u(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$ *est harmonique dans le disque*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+y^2 < 1\}.$$

2) Le principe du maximum est-il vérifié dans D

Exercice 2.9.5. *Énoncer et démontrer un principe de minimum pour l'équation de Laplace.*

Chapitre 3

Équation des ondes

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'équation des ondes homogène dont sa forme est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_{\boldsymbol{x}} u = 0,$$

muni à des conditions initiales et des conditions aux limites convenables. t désigne le temps, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et u est une fonction définie sur $\overline{\Omega} \times [0, +\infty[$, $u = u(x,t)$ et le laplacien $\Delta_{\boldsymbol{x}}$ désigne le laplacien par rapport à la variable d'espace $\boldsymbol{x}$.

3.1 Interprétation physique

L'équation des ondes est une modélisation simplifiés d'une corde vibrante ($d = 1$), membrane vibrante ($d = 2$) ou d'un solide élastique ($d = 3$). Dans cette représentation physique, $u(\boldsymbol{x}, t)$ représente le déplacement dans une certaine direction du point $\boldsymbol{x}$ à l'instant $t > 0$.

3.2 Ondes en dimension 1 : Corde vibrante

On considère une corde vibrante de longueur L, de densité constante, élastique, tendue entre deux point A et B. On s'intéresse aux petites vibrations transversales de la corde (penser par exemple aux vibrations d'une corde de guitare). On supposera que les effets de gravité des autres forces extérieures peuvent être négligeables, l'équation des cordes vibrantes est décrite par l'équation des ondes en une dimension

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Si l'on se fixe la position de la vitesse initiale de chaque point de la corde et le mouvement de n'importe quel point de la corde doit être déterminer d'où pour $t = 0$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad \text{dans }]0, L[\tag{3.2}$$

tel que f et g sont deux fonctions données définies pour $0 \leq x \leq L$. Nous supposons que la corde est fixée aux deux extrimités

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.3}$$

On cherche la solution de l'équation (3.1), (3.2), (3.3) qui soit de la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

on voit qu'il existe une constante λ telle que

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \quad 0 < x < L, \\ T''(t) = \lambda c^2 T(t) \quad t > 0. \end{cases}$$

Et on a de (3.3), $X(0) = X(L) = 0$.
Si $\lambda \geq 0$ on trouve $X(x) = 0$ donc on rejette ce cas.
Si $\lambda < 0$ on trouve les solutions suivantes

$$X_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

λ_n étant connu, $T_n(t)$ est solution de $T_n''(t) = -\frac{n^2c^2\pi^2}{L^2}T_n(t)$ et donc

$$T_n(t) = C_n \cos(\frac{nc\pi}{L}t) + D_n \sin(\frac{nc\pi}{L}t).$$

Par superposition,

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\Big(\alpha_n \cos(\frac{nc\pi}{L}t) + \beta_n \sin(\frac{nc\pi}{L}t)\Big).$$

C'est la série de Fourier de période $2L$ par rapport à x et $\frac{2L}{c}$ par rapport à t

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x).$$

Les α_n sont les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2L$ égales à $X(x)$, $0 \leq x \leq L$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

D'autre part,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\geq 1}\frac{n\pi c}{L}\beta_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = g(x)$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n\geq 1} n\beta_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{L}{\pi c}g(x)$$

les $(n\beta_n)$ sont les coefficientts du développement en série de Fourier de la fonction impaire de période $2L$ égale à $\frac{L}{c\pi}g(x)$, $0 \leq x \leq L$ donc

$$\beta_n = \frac{2}{nc\pi}\int_0^L g(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx.$$

Il convient d'examiner que cette série converge pour tout t et deux fois dérivables en x et en t. On pose

$$F(y) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\Big(\alpha_n \sin(\frac{n\pi y}{L}) - \beta_n \cos(\frac{n\pi y}{L})\Big)$$

$$G(y) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\Big(\alpha_n \sin(\frac{n\pi y}{L}) + \beta_n \cos(\frac{n\pi y}{L})\Big)$$

et donc

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

On a des conditions initiales

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c}g(x) \end{cases}$$

On combine ces deux équations on obtient

$$F'(x) = \frac{cf'(x) + g(x)}{2c}, \quad G'(x) = \frac{cf'(x) - g(x)}{2c}.$$

On intègre ces deux quantités sur x on aura

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy + c_1, \quad G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)dy + c_2.$$

Par conséquent,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + (c_1 + c_2). \tag{3.4}$$

Finalement, de (3.3) on trouve que $c_1 + c_2 = 0$.

Remarque 3.2.1. *La formule (3.4) s'appelle la formule de D'Alembert.*

3.3 Ondes en dimension 2 : membrane vibrante

L'équation d'une membrane vibrante s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Elle représente les petits mouvements d'une membrane tendue au voisinage de sa position d'équilibre. u est l'écart d'un point (x, y). On suppose que Ω est le carré $]0, L[^2$, on cherche par séparation des variables la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0, & \forall y \in]0,L[,\ \forall t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0, & \forall x \in]0,L[,\ \forall t > 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in]0,L[^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) \forall (x,y) \in]0,L[^2 \end{cases} \tag{3.7}$$

On suppose que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, alors

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

Il existe une constante λ telle que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \text{et} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

Ainsi, il existe une constante k telle que

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = k.$$

On arrive à résoudre les EDOs

$$X''(x) + kX(x) = 0, \quad 0 < x < L \tag{3.8}$$

$$Y''(y) + (-\lambda - k)Y(y) = 0 \quad 0 < y < L \tag{3.9}$$

$$T''(t) - c^2\lambda T(t) = 0, \quad t > 0 \tag{3.10}$$

On remarque des conditions aux limites que

$$X(0) = X(L) = 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = Y(L) = 0.$$

On a vu dans la section précédante (la corde vibrante) que les deux problèmes

$$\left\{\begin{array}{r} X''(x) + kX(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array}\right., \left\{\begin{array}{r} Y''(y) + (-\lambda - k)Y(y) = 0 \\ Y(0) = Y(L) = 0 \end{array}\right. \tag{3.11}$$

ont des solutions lorsque $k > 0$ et $-\lambda - k > 0$, i.e. $0 < k < -\lambda$. On pose $\lambda = -\gamma^2$ les solutions sont données par

$$X(x) = A_1 \cos(\sqrt{k}x + B_1 \sin \sqrt{k}x)$$
$$Y(y) = A_2 \cos(\sqrt{\gamma^2 - k}x + C_2 \sin \sqrt{\gamma^2 - k}y)$$
$$T(t) = E\cos(c\gamma t) + D\sin(c\gamma t)$$

Pour $x = 0$ on trouve que $A_1 = 0$ et pour $x = L$ on trouve que $k = \frac{m^2\pi^2}{L^2}, m \geq 1$ et donc

$$X_m(x) = B_m \sin(\frac{m\pi}{L}x).$$

Maintenant on détermine les constantes A_2 et C_2, on prend $y = 0$ on trouve $A_2 = 0$ puis $y = L$ on trouve

$$\gamma = \frac{\pi\sqrt{m^2 + n^2}}{L} \Rightarrow \lambda = -\frac{\pi^2(m^2 + n^2)}{L^2}.$$

Par conséquent,

$$Y_m(y) = C_n \sin(\frac{n\pi}{L}y)$$

et enfin

$$T_{mn}(t) = E_{mn}\cos(c\sqrt{m^2 + n^2}\frac{\pi}{L}t) + D_{mn}\sin(c\sqrt{m^2 + n^2}\frac{\pi}{L}t)$$

Par superposition, on trouve la solution

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n\geq 1} \left(\alpha_{mn}\cos(c\sqrt{m^2 + n^2}\frac{\pi}{L}t) + \beta_{mn}\sin(c\sqrt{m^2 + n^2}\frac{\pi}{L}t)\right)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi}{L}y).$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer α_{mn} et β_{mn}. Quand $t = 0$, $u(x, y, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0)$ sont des séries de Fourier multiple de période $2L$ qui convergent vers $f(x, y)$ et $\frac{L}{c\pi} g(x, y)$ respectivement.

$$\alpha_{mn} = \frac{4}{L^2} \int_0^L \int_0^L f(x, y) \sin(\frac{m\pi}{L} x) \sin(\frac{n\pi}{L} y) dxdy$$

$$\beta_{mn} = \frac{4}{Lc\pi\sqrt{m^2 + n^2}} \int_0^L \int_0^L g(x, y) \sin(\frac{m\pi}{L} x) \sin(\frac{n\pi}{L} y) dxdy$$

3.4 Équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$, principe de Huygens

Définition 3.4.1. *Soit Φ une fonction continue dans une boule $B(\boldsymbol{x}_0, r)$, soit $r < R$. On appelle moyenne de Φ sur $S(\boldsymbol{x}_0, r)$ la quantité*

$$M_\Phi(\boldsymbol{x}_0, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\int_{S(\boldsymbol{x}_0, r)} \Phi(x, y, z) d\sigma.$$

On peut exprimer de façon simple

$$M_\Phi(\boldsymbol{x}_0, r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(x_0 + r\sin\theta\cos\varphi, y_0 + r\sin\theta\sin\varphi, z_0 + r\cos\theta) \sin\theta d\varphi d\theta.$$

Théorème 3.4.2. ***Formule de Kirchhoff*** *Soit l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big) \tag{3.12}$$

(i) Pour toute fonction g de Classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, il existe une seule solution de (3.12) telle que

$$u(x, y, z, 0) = 0 \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = g(x, y, z).$$

cette solution est

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int\int_{S(\boldsymbol{x}_0, ct)} g(\boldsymbol{x}) d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (ct)^2 g(x_0 + ct\sin\theta\cos\varphi, y_0 + ct\sin\theta\sin\varphi, z_0 + ct\cos\theta) \sin\theta d\varphi d\theta \\ &= tM_g(\boldsymbol{x}_0, ct). \end{aligned}$$

(ii) Pour toute fonction g de Classe $\mathcal{C}^2$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ il existe une seule solution u de (3.12) telle que

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x}) \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x})$$

cette solution est donnée par la formule de Kirchhoff

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0,t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\int_{S(\boldsymbol{x}_0,ct)} g(\boldsymbol{x})d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\int_{S(\boldsymbol{x}_0,ct)} f(\boldsymbol{x})d\sigma\Big) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\int\int_{S(\boldsymbol{x}_0,ct)} \Big(tg(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})) + ct(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z})d\sigma \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$u(\boldsymbol{x}_0,t) = tM_g(\boldsymbol{x}_0,ct) + \frac{d}{dt}(tM_f(\boldsymbol{x}_0,ct))$$

et en posant $h = tg - f + ct(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z})$*, on obtient*

$$u(\boldsymbol{x}_0,t) = M_h(\boldsymbol{x}_0,ct).$$

Principe d'Huygens

Supposons que les valeurs initiales f et g sont nulles dans $\mathbb{R}^3 \setminus D$ telles que D est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de frontière ∂D. La fonction

$$h = tg - f + ct(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z})$$

est nulle sur $\mathbb{R}^3$ privé D. On veut savoir quand $u(\boldsymbol{x},t)$ n'est pas nul.

Soit $\boldsymbol{x}_0$ un point extérieur de D. On note $d_1 = \min_{\boldsymbol{x}\in D}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$ et $d_2 = \max_{\boldsymbol{x}\in D}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$.

a) Si $ct < d_1$: pour tout point $\boldsymbol{x} \in S(\boldsymbol{x}_0,ct)$ on a $h(\boldsymbol{x}) = 0$ car $\boldsymbol{x} \notin D$ et $S(\boldsymbol{x}_0,ct) \cap D = \emptyset$. Et donc

$$u(\boldsymbol{x}_0,t) = 0.$$

b) Si $d_1 < ct < d_2$ on a $S(\boldsymbol{x}_0,ct) \cap D \neq \emptyset$ alors $h(\boldsymbol{x}) \neq 0$ et

$$u(x_0,t) \neq 0$$

c) Si $d_2 < ct$ on a $S(\boldsymbol{x}_0,ct) \cap D = \emptyset$ alors pour tout $x \in S(\boldsymbol{x}_0,ct)$, $h(\boldsymbol{x}) = 0$ et donc

$$u(\boldsymbol{x}_0,t) = 0.$$

On exprime cela de la façon suivante

Théorème 3.4.3. ***Principe d'Huygens***

Tout se passe comme-ci chaque point de ∂D émettait une onde qui se propage à la vitesse ct, tant qu'aucune de ces ondes n'a atteint $\boldsymbol{x}_0$, $u(\boldsymbol{x}_0)$ est nul, puis lorsque toutes les ondes ont dépassé $\boldsymbol{x}_0$, $u(\boldsymbol{x}_0)$ est de nouveau nul. Il y a ainsi deux fronts d'onde : un front avant et un front arrière.

3.5 Représentation de la solution de l'équation des ondes homogène dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$

Définition 3.5.1. *Si Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, nous définissons la moyenne sphérique $M_\Phi(\boldsymbol{x}, r)$ comme étant la valeur de moyenne de Φ sur la sphère $S(\boldsymbol{x}, r)$*

$$M_\Phi(\boldsymbol{x}, r) = \frac{1}{r^{d-1} w_d} \int_{S(\boldsymbol{x},r)} \Phi(\boldsymbol{z}) d\sigma(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{w_d} \int_{S_d} \Phi(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y}) d\sigma(\boldsymbol{y}).$$

$S(\boldsymbol{x}, r)$ la sphère de centre $\boldsymbol{x}$ de rayon r dans $\mathbb{R}^d$. S_d sphère unité de $\mathbb{R}^d$ et w_d la mesure de surface de la sphère de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon r.

Théorème 3.5.2. *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{\boldsymbol{x}} u &= 0 \quad dans\ \mathbb{R}^d \times]0, +\infty[\\ u(\boldsymbol{x}, 0) &= f(\boldsymbol{x}) \quad pour\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) &= g(\boldsymbol{x}), \quad pour\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

i) On suppose $d \geq 3$ impair, si $f \in \mathcal{C}^{\frac{d+3}{2}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}^{\frac{d+1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors la solution u est donnée par

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-2) w_d} \Big\{ \partial_t (t^{-1}\partial_t)^{\frac{d-3}{2}} (t^{d-2} \int_{\|\boldsymbol{y}\|=1} f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) d\sigma(\boldsymbol{y})) + (t^{-1}\partial_t)^{\frac{d-3}{2}} \big(t^{d-2} \int_{\|\boldsymbol{y}\|=1} g(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) d\sigma(\boldsymbol{y})\big) \Big\}$$

ii) On suppose $d \geq 2$ pair, si $f \in \mathcal{C}^{\frac{d+4}{2}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}^{\frac{d+2}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors la solution u est donnée par

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (d-1) w_{d+1}} \Big\{ \partial_t (t^{-1}\partial_t)^{\frac{d-2}{2}} (t^{d-1} \int_{\|\boldsymbol{y}\| \leq 1} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})}{\sqrt{1 - \|\boldsymbol{y}\|^2}} d\boldsymbol{y})) + (t^{-1}\partial_t)^{\frac{d-2}{2}} \big(t^{d-1} \int_{\|\boldsymbol{y}\| \leq 1} \frac{g(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} d\boldsymbol{y}\big) \Big\}.$$

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. *En utilisant la méthode de séparation des variables, résoudre l'équation des ondes suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad t > 0$$

avec

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & \text{pour} \quad t > 0 \\ u(1,t) = 0, & \text{pour} \quad t > 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x), & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 3.6.2. *Résoudre l'équation des ondes suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad \text{et} \quad t > 0$$

avec

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & \text{pour} \quad t > 0 \\ u(L,t) = 0, & \text{pour} \quad t > 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

et tel que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2ax}{L}, & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \dfrac{2a}{L}(L-x), & \text{pour} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.6.3. *Vibration d'une membrane dans un rectangle.*
En utilisant la méthode de séparation des variables, résoudre l'équation des ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big), \quad 0 < x < a \quad \text{et} \quad 0 < y < b, \quad t > 0$$

avec

$$\begin{cases} u(0,y,t) = 0, & \text{pour} \quad 0 < y < b, \quad t > 0 \\ u(a,y,t) = 0, & \text{pour} \quad 0 < y < b, \quad t > 0 \\ u(x,0,t) = 0, & \text{pour} \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \\ u(x,b,t) = 0, & \text{pour} \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \varphi(x,y), & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y), & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Exercice 3.6.4. *Soit l'équation des ondes dans* $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

muni aux conditions initiales

$$\begin{cases} u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & \text{pour} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = \psi(x,y,z), & \text{pour} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Déterminer la solution $u(x,y,z,t)$ *dans les deux cas suivants :*

1) $\varphi \equiv 0$ *et* $\psi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,

2) $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *et* $\psi \equiv 0$.

Exercice 3.6.5. *On considère l'équation des ondes amorties :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.13}$$

où r *est un réel positif ou nul (qui mesure la résistance de l'air). On suppose que* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *qui vérifie l'équation* (3.13)*, et l'on pose*

$$\begin{cases} e(x,t) &= \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)^2 + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)^2 \\ p(x,t) &= \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t). \end{cases}$$

I. ***On suppose dans cette partie que*** $r = 0$.

1) Montrer que

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) \quad \text{et que} \quad \frac{\partial e}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial p}{\partial t}(x,t).$$

En déduire que e *et* p *sont également solution de* (3.13)*(toujours avec* $r = 0$*).*

2) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $u(x,t)$ *et* $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ *sont nulles pour tout* $x \notin [-R, R]$.

2.a. Rappelez pourquoi, pour chaque t*, il existe un réel* $R(t)$ *telle que* $u(x,t)$ *pour tout* $x \notin [-R(t), R(t)]$.

2.b. Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial e}{\partial t}(x,t)dx = 0.$$

II. ***On suppose maintenant que*** $r > 0$.

Montrer que

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x,t) = -r(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t))^2 + \frac{\partial p}{\partial t}(x,t).$$

Exercice 3.6.6. *Il est possible de montrer que le déplacement vertical $u(x,t)$ d'une poutre homogène est gouverné par équation d'ordre 4 de la forme suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad t.q.\ u = u(x,t).$$

Supposons que la poutre est de longueur l, que sa vitesse initiale est nulle, i.e.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \forall x \in [0,l],$$

que les extrémités de la poutre sont supportées, i.e. $u(0,t) = 0$ et $u(l,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, que les moments sont nuls, i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l,t) = 0,$$

et finalement que le déplacement initial est connu, i.e. $u(x,0) = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction donnée.

a) En utilisant la méthode de séparation des variables et les conditions ci-dessus, montrer que la solution formelle est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \cos(\frac{cn^2\pi^2 t}{l^2})$$

où $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$ est la série de Fourier impaire de $f(x)$.

b) Trouver la solution formelle si le déplacement initial est $u(x,0) = f(x) = \dfrac{x(l-x)}{l^2}$.

Chapitre 4

Équation de la chaleur

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de la chaleur homogène suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta_{\boldsymbol{x}} u = 0, \quad t > 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

muni aux conditions aux limites et conditions initiales convenables.

4.1 Interprétation physique

L'équation de la chaleur ainsi appelé équation de diffusion, décrit dans des applications typiques l'évolution dans le temps de la densité u d'une certaine quantité telle que la chaleur, la concentration chimique...

4.2 Séparation des variables

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert régulier, on veut résoudre l'équation de la chaleur sur Ω avec les conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta_{\boldsymbol{x}} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[\\ u(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x}) \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

On suppose que $u(\boldsymbol{x}, t) = T(t)e(\boldsymbol{x})$ avec $T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et $e \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Alors

$$T'(t)e(\boldsymbol{x}) - T(t)\Delta e(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta e(\boldsymbol{x})}{e(\boldsymbol{x})}.$$

On notera que le côté de gauche ne dépend que de t alors que le côté de droite ne dépend que de $\boldsymbol{x}$, il existe une constante λ telle que

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t), & t \geq 0 \\ \lambda e(\boldsymbol{x}) - \Delta e(\boldsymbol{x}) = 0, & x \in \Omega \quad et\ e|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

L'équation de t est une simple EDO dont la solution est $T(t) = T(0)e^{\lambda t}$. la deuxième équation de $\boldsymbol{x}$ a l'avantage qu'elle ne dépend pas de t. Si $\Omega \subset \mathbb{R}$, alors c'est une EDO qu'on sait résoudre. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ possède de symétrie (Exemple rectangle, boule), alors on peu essayer de séparer les variables.

Définition 4.2.1. *Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, on définit le spectre de l'opérateur de Laplace avec les conditions aux limites de Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Lambda(\Omega) := \{\lambda \in \mathbb{R}, \quad & \exists e \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}); e \neq 0 \text{ solution de} \\ & \lambda e - \Delta e = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } e = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Exemple 4.2.2. *Soit $\Omega :=]0, L[$. On essaye de calculer $\Lambda(]0, L[)$ pour $L > 0$, il faut donc trouver des solutions de*

$$\lambda e(x) - e''(x) = 0, \quad x \in]0, L[, \quad e(0) = e(L) = 0.$$

- *Si $\lambda = w^2 > 0$ alors la solution générale de l'équation $e''(x) = \lambda e(x)$ est donnée par*

$$e(x) = c\cosh(wx) + d\sinh(wx),\ c, d \in \mathbb{R}.$$

Mais seule la solution $e = 0$ vérifie $e(0) = e(L) = 0$, donc $\lambda \in]-\infty, 0]$. De la même façon on exclut $\lambda = 0$.

- *Si $\lambda = -w^2 < 0$ alors la solution générale de $e'' = -w^2 e$ est donnée par*

$$e(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx).$$

Pour que $e(0) = e(L) = 0$ et $e \neq 0$ il faut que $a = 0$ et $b \neq 0$ et $wL = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Donc

$$\Lambda(]0, L[) = \{-\Big(\frac{k\pi}{L}\Big)^2, \quad k \in \mathbb{N}^*\}.$$

et les fonctions propres asociées aux valeurs propres $\lambda = -w^2 \in \Lambda(]0, L[)$ sont les fonctions $e(x) = b\sin(wx), \quad b \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Soient $e \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $\lambda \geq 0$ telle que $\lambda e - \Delta e \leq 0$. Alors*

$$\max_{\overline{\Omega}} e = \max_{\partial\Omega} e.$$

Corollaire 4.2.4. *Pour Ω de $\mathbb{R}^d$ ouvert, borné régulier, on a*

$$\Lambda(\Omega) \subset]-\infty, 0[.$$

Preuve. On montre que si $\Lambda \geq 0$ alors $\lambda \notin \Lambda(\Omega)$. Soit $\lambda \geq 0$, soit $e \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}); e \neq 0$ solution de $\lambda e - \Delta e = 0$ dans Ω et $e = 0$ sur $\partial\Omega$. D'après le théorème précédent

$$e(\boldsymbol{x}) \leq \max_{\partial\Omega} e = 0; \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

Comme $-e$ est aussi solution du problème alors $e \geq 0$ ce qui implique que e est identiquement nul dans Ω, donc ce problème n'a pas de solution non triviales et par conséquent $\Lambda(\Omega) \subset]-\infty, 0[$.

4.3 Équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$

Soit l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$ muni à la condition initiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\boldsymbol{x}} u & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \times]0, +\infty[\\ u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}) & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4.3}$$

Définition 4.3.1. ***Noyau de la chaleur.*** *On définit le noyau de la chaleur*

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-\|\boldsymbol{x}\|^2_{\mathbb{R}^d}}{4t}}, \quad t > 0, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition 4.3.2. *Soit ϕ le noyau de la chaleur alors*
i) pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > 0$, $\phi(\boldsymbol{x}, t) > 0$,
ii) pour tout $t > 0$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = 1$
iii) ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[)$ et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta_{\boldsymbol{x}} \phi \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$$

Preuve. Il est clair que $\phi(\boldsymbol{x},t) > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\forall t > 0$ et que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[)$. On montre (ii), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{-\|\boldsymbol{x}\|^2_{\mathbb{R}^d}}{4t}} d\boldsymbol{x} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{4t}}dx\Big)^d.$$

On pose $y = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ on obtient l'intégrale de Gauss qui égale à $\sqrt{\pi}$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}(2\sqrt{\pi t})^d = 1.$$

Théorème 4.3.3. *Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^d), (1 \leq p \leq \infty)$ et soit*

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)g(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

où ϕ est le noyau de la chaleur, alors

i) si $g \geq 0$ et g n'est pas nul alors $u(\boldsymbol{x},t) > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\forall t > 0$.

ii) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[)$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\boldsymbol{x}} u \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0,+\infty[$$

iii) Si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si g est continue en $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ alors

$$\lim_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}_0,0)} u(\boldsymbol{x},t) = g(\boldsymbol{x}_0).$$

En particulier, si g est continue et bornée alors u est continue sur $\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[$, et $u(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x})$.

iv) Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.4}$$

Preuve. les deux premières propriétés résultent de la Proposition 4.3.2-i-ii

iii) Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ continue en $\boldsymbol{x}_0$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d, \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^d} < \delta \Rightarrow |g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon.$$

Grâce à la propriété ii) du lemme 4.3.2 on voit que

$$\begin{aligned}
|u(\boldsymbol{x},t) - g(\boldsymbol{x}_0)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)g(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} - g(\boldsymbol{x}_0)\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\big(g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}_0)\big)d\boldsymbol{y}\Big| \\
&\leq \int_{B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\big|g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}_0)\big|d\boldsymbol{y} \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\big|g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}_0)\big|d\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

La continuité de g en $\boldsymbol{x}_0$ implique que

$$\int_{B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\big|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x}_0)\big|d\boldsymbol{y} \leq \varepsilon \int_{B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} = \varepsilon.$$

Évaluons la deuxième intégrale. On a $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\big|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x}_0)\big|d\boldsymbol{y} &\leq 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} \\
&= \frac{2\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \exp\left(\frac{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4t}\right) d\boldsymbol{y} \\
&= \frac{2\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|\geq\delta} \exp\left(\frac{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4t}\right) d\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

On a $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ donc $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \leq \frac{\delta}{2}$

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leq \frac{\delta}{2} + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|. \tag{4.5}$$

Comme on intègre sur l'ensemble $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\| \geq \delta$ on voit que

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| &\leq \frac{\delta}{2} + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \\
\Rightarrow \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &\Rightarrow \frac{-1}{16t}\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\|^2 \geq \frac{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4t}
\end{aligned}$$

et donc on a

$$\exp\left(\frac{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4t}\right) \leq \exp\left(\frac{-\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\|^2}{16t}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{2\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|\geq\delta} \exp\left(\frac{-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}{4t}\right) d\boldsymbol{y} \leq \frac{2\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0\|\geq\delta} \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}\|^2}{16t}\right) d\boldsymbol{y}.$$

On effectue le changement de variables $\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0}{4\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(\boldsymbol{x}_0,\delta)} \phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)\big|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{x}_0)\big|d\boldsymbol{y} &\leq \frac{2\|g\|_\infty}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}(4\sqrt{t})^d \int_{\|\boldsymbol{z}\|\geq\frac{\delta}{4\sqrt{t}}} \exp\left(-\|\boldsymbol{z}\|^2\right) d\boldsymbol{z} \\
&= \frac{2\cdot 4^{\frac{d}{2}}\|g\|_\infty}{(\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\|\boldsymbol{z}\|\geq\frac{\delta}{4\sqrt{t}}} \exp\left(-\|\boldsymbol{z}\|^2\right) d\boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

Puis on passe à la limite quand t tend vers 0.

iv) Pour montrer l'inégalité (4.4) on utilise l'inégalité de Young, on a

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\phi(\cdot,t) * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\phi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

On conclut en utilisant la propriété ii) du lemme 4.3.2.

4.4 Équations particulères (Bernoulli, Riccati, Clairaut)

4.4.1 Équations de Bernoulli

Ce sont des équations différentielles scalaires de la forme

$$u'(t) + P(t)u(t) + Q(t)u^{\alpha}(t) = 0$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, P et Q sont deux fonctions définies continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$. On peut faire le changement de fonction inconnue $v = u^{1-\alpha}$ qui ramène à une équation linéaire.

4.4.2 Équations de Riccati

Ce sont des équations différentielles scalaires de la forme

$$u'(t) + P(t)u(t) + Q(t)u^{2}(t) = c(t)$$

où P, Q et c sont des fonctions définies continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$. On sait résoudre cette équation dès que l'on connaît une solution pariculière v. On pose alors $u = v + w$, cela conduit à une équation de Bernoulli pour w avec $\alpha = 2$. Comme indiqué ci-dessus on peut faire le changement d'inconnue $z = w^{-1}$ qui conduit à une équation linéaire pour z.

4.4.3 Équation de Clairaut

On appelle équation de Clairaut toute équation du premier ordre scalaire de la forme

$$u(t) = tu'(t) + g(u')$$

où g est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$.

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1. *Déterminer dans chacun des cas suivants la température $u(x,t)$ dans une barre d'argent de $10cm$ de longueur, de densité $\rho = 10.6g/cm3$, , de conductivité thermale $K = 1.04cal/cm$ deg sec et de chaleur spécifique $\sigma = 0.056cal/g$ deg. La barre est parfaitement isolée latéralement, les extrémités de la barre sont maintenues à température* *constante* $0°C$ *et la température initiale (en C) est* $f(x)$. *(Rappelons que la constante* c *apparaissant dans l'équation de la chaleur est* $c^2 = K\sigma/\rho$.*)*

a) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 10 - x & si \quad 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

b) $f(x) = x(100 - x^2)$,

c) $f(x) = x(10 - x)$.

Exercice 4.5.2. *Déterminer la température* $u_I(x)$ *après un très long intervalle de temps* $(t \to \infty)$ *dans une tige de longueur* l *suffisamment mince pour que la chaleur soit distribuée également pour toute section transversale orienté selon l'axe des* x *avec des extrémités à* $x = 0$ *et* $x = l$, *d'un matériel homogène parfaitement isolé latéralement et dont les températures aux extrémités sont des températures constantes différentes :* $u(0,t) = U_1$ *et* $u(l,t) = U_2$ *pour tout* $t \geq 0$.

Exercice 4.5.3. *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad \forall x \in]0,\pi[, \quad \forall t \in]0,+\infty[, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = c \quad \forall t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin x \quad \forall x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{4.6}$$

telles que c *est une constante.*

En posant $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, *résoudre le problème (4.6).*

Bibliographie

[1] J. Bass. Cours de mathématiques Tome 2. Masson, 1961.

[2] C. David, P. Gosselet. Équation aux dérivées partielles : Cours et exercices corrigés. Dunod, 2015.

[3] H. Reinhard. Equations aux dérivées partielles. Dunod, 1987.