

# COURS DE MÉCANIQUE DES FLUIDES (MDF2)

3<sup>ème</sup> Année Licence  
Energétique

Département de Génie Mécanique, Université de Jijel



## Plan du cours

- **Rappels**
- **Cinématique des fluides**
- **Analyse basée sur le concept du volume de contrôle**
- **Analyse dimensionnelle et similitude**



# Chapitre 1

- Cinématique des fluides
  - Description d'un fluide en écoulement
    - Notion de trajectoire : Variables de Lagrange
    - Notion de ligne de courant : Variables d'Euler
    - Champ des vitesses
    - Dérivée particulaire d'un scalaire : Accélération d'une particule
  - Conservation de la masse
    - Dérivée particulaire d'une intégrale de volume
    - Equation de continuité
  - Caractéristiques d'un écoulement
    - Divergence du champ de vitesse : Ecoulement incompressible
    - Rotationnel du champ de vitesse : Ecoulement potentiel
    - Fonction de courant : Débit volumique et massique
  - Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels
    - Les écoulements potentiels élémentaires
    - Superposition d'écoulements simples
    - Les écoulements potentiels composés
- Analyse basée sur le concept du volume de contrôle
- Analyse dimensionnelle et similitude



## Description d'un fluide en écoulement

La cinématique des fluides est la description analytique d'un système de particules fluide en mouvement indépendamment des forces provoquant ou modifiant l'écoulement. Deux méthodes, qui diffèrent par le choix des variables adoptées, peuvent être utilisées.

### **Notion de trajectoire : Variables de Lagrange**

La description de **Lagrange** consiste à étudier chaque particule séparément en suivant son **m<sup>vt</sup>** au cours du temps dans le référentiel (*R*). Les coordonnées de la particule fluide à l'instant *t*=0, par rapport à (*R*), *x*<sub>0</sub>, *y*<sub>0</sub>, *z*<sub>0</sub> sont prise comme paramètres.

Le mouvement de la particule fluide est déterminé si on connaît *x*, *y*, *z* en fonction des paramètres *x*<sub>0</sub>, *y*<sub>0</sub>, *z*<sub>0</sub> et *t* appelées «variables de Lagrange»

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t) \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t) \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

Ces coordonnées *x*, *y*, *z* représentent «inconnues de Lagrange»

La trajectoire d'une particule de fluide est l'ensemble des positions successives qu'elle occupe au cours du temps.

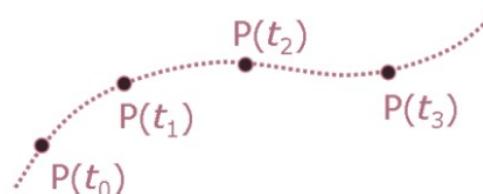


Figure 1 : Trajectoire d'une particule Fluide



# Description d'un fluide en écoulement

## Notion de ligne de courant : Variables d'Euler

La description eulérienne consiste à déterminer, à des positions  $M$  fixes de l'espace, l'évolution temporelle de la vitesse  $\vec{v}$  du mouvement de fluide.

L'écoulement est établi, à un instant  $t$ , par l'ensemble des vecteurs de vitesse associés aux particules fluides. Il est ainsi décrit par un «champ des vecteurs vitesse» dépendant des variables indépendantes de l'espace et du temps, où chaque vecteur représente la vitesse de la particule qui occupe la position à l'instant  $t$ .

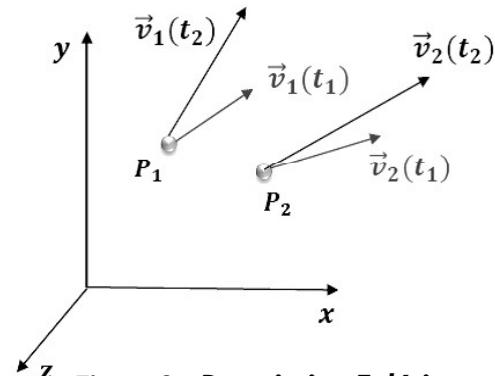


Figure 2 : Description Eulérienne

Les projections  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du vecteur de vitesse sur les axes ( $Ox$ ), ( $Oy$ ), ( $Oz$ ) du référentiel ( $R$ ) représentent les «inconnues d'Euler» définies comme suit :

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(x, y, z, t) \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = f_2(x, y, z, t) \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} = f_3(x, y, z, t)$$

où  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  sont appelées les «variables d'Euler».

La courbe tangente en chacun de ses points au champ vectoriel des vitesses des particules fluides est appelée ligne de courant



# Description d'un fluide en écoulement

## Champ de vitesse

On présente dans cette partie les principales propriétés des champs vectoriels.

### Lignes de courant

La ligne de courant est la courbe tangente en chacun de ses points au champ vectoriel des vitesses des particules fluide. Le long d'une telle ligne, à un instant fixe  $t_1$  on a :

$$d\vec{OM} // \vec{v} \Leftrightarrow \frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_1)}$$

où  $u, v, w$  les composantes du vecteur vitesse sont des fonction du temps. De ce fait, les lignes de courant se déforme avec le temps.

### Remarque

Les lignes de courant et les trajectoires coïncident à l'état stationnaire lorsque le champ des vecteurs vitesse est constant dans le temps.

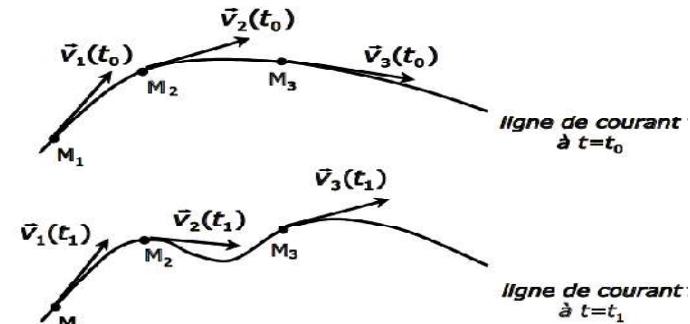


Figure 3 : Lignes de courant

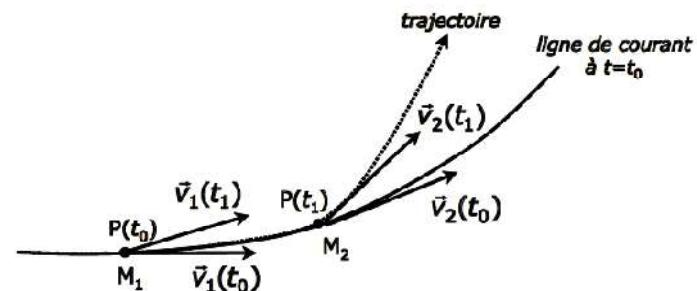


Figure 4 : Lignes de courant et trajectoire



# Description d'un fluide en écoulement

## **Tube de courant**

L'ensemble des lignes de courant, s'appuyant sur un contour fermé forme un tube de courant. Le flux du champ de vitesse à travers la surface latérale de ce tube est nul.

## **Débit massique et volumique**

On appelle débit massique d'un écoulement à travers une surface  $S$  la quantité :

$$q_m = \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \rho \cdot V_n \, dS$$

où  $V_n$  est la projection du vecteur vitesse sur la normale de l'élément  $dS$ .

On appelle débit en volume à travers la surface  $S$  la quantité :

$$Q_v = \iint_S \rho \cdot V_n \, dS$$

## **Circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe**

Soient deux points  $A$  et  $B$  du fluide et une courbe quelconque  $\overline{AB}$  joignant ces deux points. On appelle circulation du vecteur vitesse entre ces deux points l'expression

$$\Gamma_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{\overline{AB}} (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz)$$

Dans le cas général la circulation dépend des points  $A$  et  $B$  et de la forme du trajet.



# Description d'un fluide en écoulement

## Potentiel des vitesses

Si la circulation du vecteur vitesse ne dépend que de la position initiale  $A$  et finale  $B$  de la particule fluide et non du chemin suivi, on dit que le champ des vitesses dérive d'un potentiel. On peut alors écrire

$$\Gamma_{\bar{A}\bar{B}} = \varphi_B - \varphi_A = \int_{\bar{A}\bar{B}} d\varphi$$

$$d\varphi = u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w$$

Ce qui est équivalent à l'expression vectorielle :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

En coordonnées cylindrique, on aurait

$$d\varphi = u_r \cdot dr + u_\theta \cdot r d\theta + w \cdot dz = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} r d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_r, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = u_\theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w$$

Il résulte que la circulation sur un contour fermée est nulle.



# Description d'un fluide en écoulement

## Dérivée particulière d'un scalaire : Accélération d'une particule

Considérons une grandeur locale  $f$  décrivant l'écoulement (exp: pression, densité température etc...) définie en tant qu'une fonction des variables indépendantes qui sont la position observée  $x_i$  et l'instant  $t$  d'observation. La dérivée particulière de cette grandeur est son taux de variation vu par un observateur qui se déplace avec l'écoulement.

Comme l'observateur reste sur un point fixe en description eulérienne, on doit ajouter à la variation temporelle de  $f$  en ce point fixe une autre variation appelée dérivée convective qui est due au déplacement de l'observateur avec l'écoulement.

On a donc :

$$\frac{Df(x_i, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{la forme tensorielle} \rightarrow \frac{Df(x_p, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f$$

### Remarque

En régime permanent la dérivée locale est nulle  $\partial/\partial t=0$ , mais la dérivée particulière n'est pas nulle  $D/Dt \neq 0$ .



## Description d'un fluide en écoulement

L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse senti par une particule fluide en son mouvement. Afin de déterminer l'accélération du fluide à partir du champ de vitesse eulérien, on utilise la dérivée particulaire. En appliquant la relation de dérivée particulaire d'un scalaire sur les composantes  $V_i$  du vecteur vitesse, on peut écrire :

$$\gamma_x(x, y, z, t) = \frac{Du(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) u$$

$$\vec{\gamma}(x, y, z, t) = \frac{Du}{Dt} \vec{i} + \frac{Dv}{Dt} \vec{j} + \frac{Dw}{Dt} \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \gamma_y(x, y, z, t) = \frac{Dv(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) v$$

$$\gamma_z(x, y, z, t) = \frac{Dw(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) w$$

On obtient finalement l'expression tensorielle du champ d'accélération :

$$\vec{\gamma}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

$$\vec{V}(x, y, z, t)$$



## Conservation de la masse

### Dérivée particulière d'une intégrale de volume : Théorème de transport

Soit un fluide occupant à l'instant  $t$  un domaine fini  $D$  de volume  $V$  délimité par une surface  $S$ . Considérons l'intégrale de volume  $I$  sur ce domaine  $D$  :

$$I = \iiint_V G(x_i, t) \cdot dV$$

où  $G(x_i, t)$  est une grandeur locale (fonction du temps et de la position  $x_i$  de la particule fluide) liée à l'unité de volume du fluide.

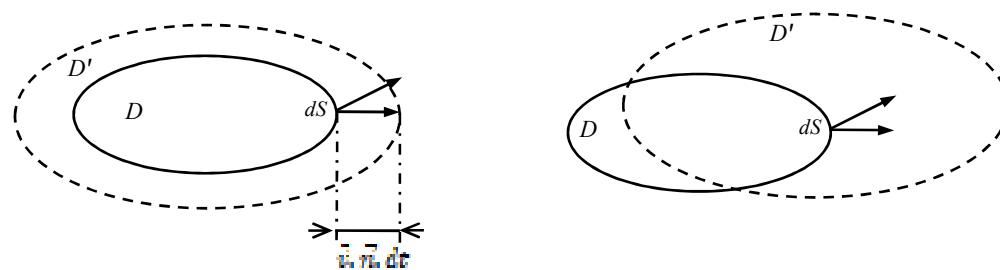


Figure 5 : Variation d'une grandeur extensive avec le temps

La dérivée particulière de l'intégrale  $I$  est la variation élémentaire de  $I$  en suivant le fluide dans son mouvement entre  $D$  et  $D'$  (figure 5), lorsque le temps s'accroît de  $dt$ . Elle est composée de deux termes :



## Conservation de la masse

- ▶ La variation  $dI_1$ , locale représentée par :

$$dI_1 = \iiint_V \frac{\partial G(x_i, t)}{\partial t} \cdot dt \cdot dV$$

- ▶ Une variation  $dI_2$  due à l'échange convectif de  $I$  avec le milieu extérieur à travers la surface  $S$ . Le volume du fluide transportant cette quantité est :

$$dV = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt \cdot dS$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire perpendiculaire à  $dS$  orienté vers l'extérieur de  $D$ . Cette évolution de volume provoque un changement de grandeur  $I$  égal à

$$dI_2 = \iint_S G(x_i, t) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt \cdot dS$$



## Conservation de la masse

Ainsi, la variation totale est

$$dI = \iiint_V \frac{\partial G(x_i, t)}{\partial t} \cdot dt \cdot dV + \iint_S G(x_i, t) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt \cdot dS$$

Par conséquent,

$$\frac{DI}{Dt} = \underbrace{\iiint_V \frac{\partial G(x_i, t)}{\partial t} \cdot dV}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{\iint_S G(x_i, t) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{dérivée convective}}$$

### Équation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse dans un écoulement de fluide : la masse d'un volume élémentaire de fluide que l'on suit dans son mouvement reste constante. D'après le théorème de transport on a :

$$m = \iiint_V \rho \, dV \quad \begin{matrix} G = \rho \\ I = m \end{matrix} \rightarrow \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \, dV - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \iint_S \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$



## Conservation de la masse

D'après le théorème de flux-divergence (d'Ostrogradsky)

$$\iint_S \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) dV$$

L'équation de conservation de la masse devient donc

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{V}) \right) dV = 0$$

Elle s'écrit encore sous cette forme équivalente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Elle s'écrit encore sous cette forme équivalente

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\vec{V} = 0$$



# Caractéristiques d'un écoulement

## Rotationnel du champ de vitesse : Ecoulement Potentiel

Le fait qu'un écoulement est rotationnel ou tourbillonnaire se traduit par l'existence d'un mouvement de rotation des particules lors de l'écoulement. Pour cela, on définit le vecteur tourbillon par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t)$$

où

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t) = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ces particules de fluides tournent à une vitesse angulaire  $\Omega$  égal à la moitié du module du vecteur rotationnel.

### Remarque

L'annulation du vecteur tourbillon signifie que le champ de vitesse est nécessairement un gradient.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M, t) = \vec{\nabla} \cdot \varphi(M, t)$$

où  $\varphi$  est le potentiel de vitesse. L'écoulement est dit alors **irrotationnel** ou potentiel.



# Caractéristiques d'un écoulement

## Fonction de courant : Débit volumique et massique

Soient deux points A et B appartenant respectivement aux lignes de courant  $C_1, C_2$ . Joignons les points A et B par une courbe  $\widehat{AMB}$  quelconque d'abscisse curviligne S.

Soit  $\vec{V}(M,t)$  la vitesse du fluide en M. Le débit volumique à l'intérieur le tube limité par  $C_1, C_2$  est :

$$\iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int dz \int_{AMB} (udy - vdx)$$

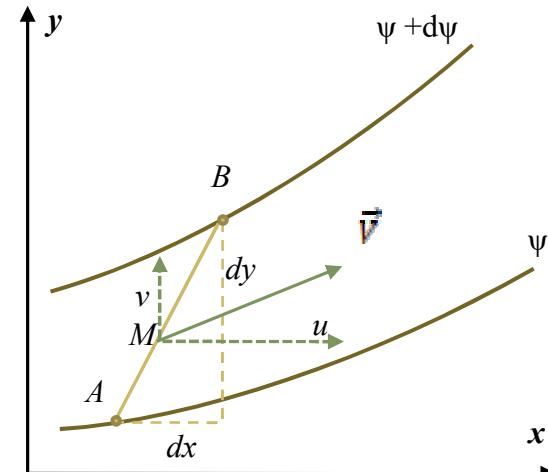


Figure 6 : Le débit volumique dans le tube de courant

Le débit  $q_v$  est constant et indépendant de  $\widehat{AMB}$  et on peut écrire :

$$dq_v = udy - vdx = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

d'où

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La fonction  $\psi$  est appelée « fonction de courant ».



## Caractéristiques d'un écoulement

En coordonnées polaires le débit élémentaire  $dq_v$  est de la forme suivante :

$$dq_v = v_r r d\theta - v_\theta dr = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} r d\theta$$

d'où

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

### Lignes de courant

D'après la description Eulérienne d'un écoulement bidimensionnel à un instant fixe  $t_1$ , une ligne de courant est définie par la relation suivante :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)}$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous une autre forme équivalente :

$$-v dx + u dy = 0 = \frac{\partial \psi}{dx} dx + \frac{\partial \psi}{dy} dy = d\psi$$

Ainsi une ligne de courant est une ligne le long de laquelle le débit est constant :  $\psi = C^{\text{te}}$ .

### Equipotentielles

Si l'écoulement est de plus irrotationnel, l'équation  $\varphi = C^{\text{te}}$  définit une courbe nommée «équipotentielle».



# Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels

## Les écoulements potentiels élémentaires

Dans ce qui suit, on présente les principaux écoulements plans (2dim) élémentaires :

### Ecoulement uniforme

Soit un écoulement rectiligne uniforme de vitesse égale en module à  $V_\infty$  inclinée d'un angle  $\alpha$  sur l'axe des  $x$ . Le champ des vecteurs vitesses s'écrit comme suit

$$\text{En fonction de } \psi : \begin{cases} u = V_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = V_\infty \sin \alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{En fonction de } \varphi : \begin{cases} u = V_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = V_\infty \sin \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme :  $\psi(x, y) = -vx + uy$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit :  $\varphi(x, y) = ux + vy$

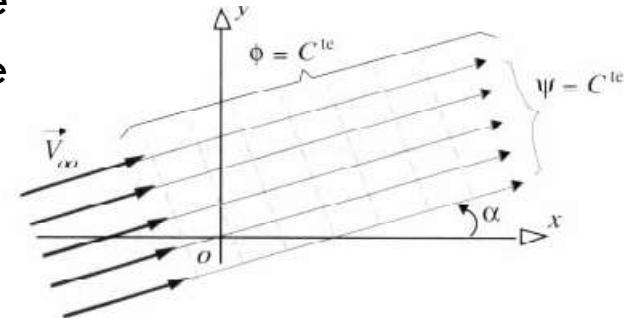


Figure 7 : Ecoulement uniforme



# Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels

## Source/puits à l'origine

Cet écoulement potentiel est caractérisé par un débit volumique  $q_v$ . Son champ de vitesse  $v_r$  est radiale, symétrique/(Oz) et tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini. Son profil de vitesse est :  $\vec{V}(r) = \frac{q_v}{2\pi r} \vec{e}_r$

On détermine  $\psi$  et  $\varphi$  en écrivant le champ de vitesse

$$\text{en fonction de } \psi : \begin{cases} v_r = \frac{q_v}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

en fonction de  $\varphi$  :

$$\begin{cases} v_r = \frac{q_v}{2\pi r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ v_\theta = 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme :  $\psi(\theta) = \frac{q_v \theta}{2\pi}$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit :  $\varphi = \frac{q_v}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} = C^*$

### Remarque

Cet écoulement possède un point singulier  $r=0$  qui est l'origine O. Selon la valeur de  $q_v (>0)$  ou ( $<0$ ), cette origine est qualifiée de source ou puits.

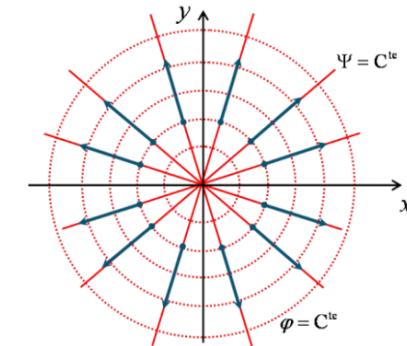


Figure 8 : Source placée à l'origine



# Les écoulements bidimensionnels et irrotationnels

## Vortex simple

C'est un écoulement à symétrie cylindrique engendré par un fil tourbillonnaire lié à l'axe de symétrie (Oz).

Son champ de vitesse, bidimensionnel dans le plan ( $xOy$ ), est orthoradiale :  $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\theta$

La vorticité ou «rotation locale» est nulle en tout point de l'écoulement sauf au centre O qui est un point singulier :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial v_t} = - \frac{\partial r}{r} \quad \rightarrow \quad v_\theta = \frac{k}{r}$$

La circulation  $\Gamma$  du vecteur de vitesse le long d'un cercle, de rayon  $r$  et de centre O, est constante et non nulle :  $\Gamma = \oint_{\text{Cercle}} \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi k = C^{\text{te}} \quad \rightarrow \quad \vec{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

On détermine  $\psi$  et  $\varphi$  à partir du champ de vitesse

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$$

Après intégration

$$\psi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

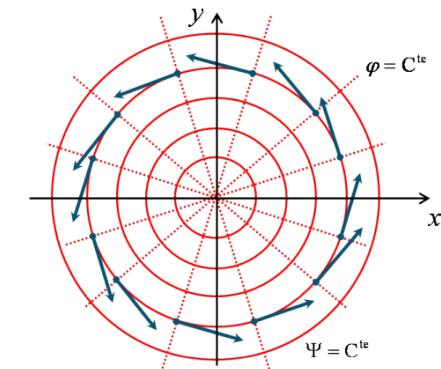


Figure 9 : Vortex simple  $\Gamma > 0$



# Superposition d'écoulements simples

## Conditions d'existence d'un écoulement irrotationnel et incompressible

Pour qu'un écoulement permanent et plan d'un fluide incompressible soit irrotationnel deux conditions doivent être satisfaites :

► masse conservée  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$  :  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$   $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$   $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$

► vorticité nulle  $\overline{\operatorname{rot}} \vec{V} = 0$  :  $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$   $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$   $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

Etude des écoulements **irrotationnels** et **incompressibles** ➔ Etude des fcts **harmoniques**.

## Principe de superposition

A l'aide de ce principe, des écoulements plus complexes peuvent être construite par combinaison des écoulements élémentaires. Considérons deux écoulements plans irrotationnels et incompressibles définies par les fonctions de courants  $\psi_1, \psi_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \alpha \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \beta \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2)}{\psi_{\text{tot}}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{(\alpha \psi_1 + \beta \psi_2)}{\psi_{\text{tot}}} = 0$$



## Les écoulements potentiels composés

### Le doublet

Cet écoulement est obtenu par la superposition d'une source ( $q_v$ ) et d'un puits ( $-q_v$ ), symétriquement disposés aux points  $S(-a, 0)$ ,  $P(0, a)$  de l'axe des  $x$ . Au point  $M$ , les vecteurs de vitesse générés par la source et le puits sont :

$$\vec{V}_1 = \frac{q_v}{2\pi r_1} \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \quad \vec{V}_2 = -\frac{q_v}{2\pi r_2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

La fonction de courant  $\psi_1 + \psi_2$  de l'écoulement résultant est :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{q_v \alpha}{2\pi} \\ \psi_2 &= -\frac{q_v \beta}{2\pi} \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{q_v}{2\pi} (\alpha - \beta) \quad \tan(\alpha - \beta) = \left( \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right)$$

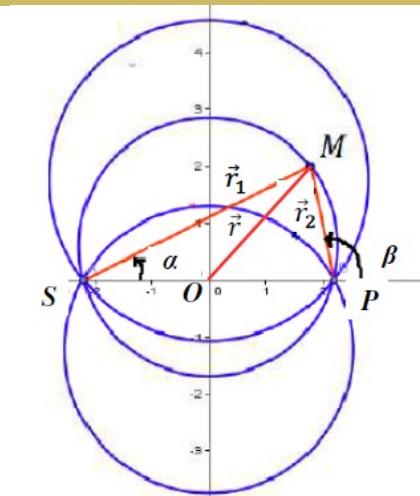


Figure 10 : Lignes de courant du doublet

$$\psi = \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \right)$$

En fonction des coordonnées cartésiennes, la fonction de courant se réécrit comme suit :

$$\tan \alpha = \frac{y}{x+a}, \quad \tan \beta = \frac{y}{x-a}$$

$$\psi = \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

Les lignes de courant sont des cercles, passant par  $A_1$  et  $A_2$ , de centre  $C \in (yy')$ .

$$x^2 + \left( y - \frac{a}{k} \right)^2 = a^2 \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right), \quad k = \tan \left( -\text{cte} \frac{2\pi}{q_v} \right)$$



## Les écoulements potentiels composés

### Le dipôle

On fait tendre vers zéro la distance  $2a \rightarrow 0$  et vers l'infini le débit  $q_v \rightarrow \infty$  de façon à garder le produit  $2aq_v$  constant. Dans ces conditions, on superpose le puits et la source à l'origine, en créant ainsi un « **dipôle hydrodynamique** » d'intensité  $\mu = 2aq_v$ .

En appliquant ces limites sur la fonction  $\psi$  du doublet, on obtient le résultat :

$$\psi = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ q_v \rightarrow \infty}} \left[ \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) \right] \Bigg|_{2aq_v = \mu} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} x = x \Rightarrow \psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}$$

### Lignes de courant

La ligne de courant vérifiant l'équation  $\psi = \text{cte}$  se formule comme suit :

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{2\pi cte}{\mu} \Leftrightarrow x^2 + \left( y + \frac{k}{2} \right)^2 = \frac{k^2}{4}, k = \frac{\mu}{2\pi cte}$$

Les lignes de courant sont des cercles, passant par O, de centre C  $\in (yy')$ .

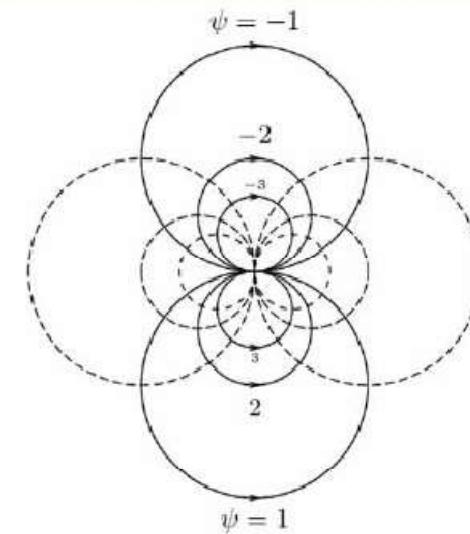


Figure 11: Lignes de courant du dipôle



# Les écoulements potentiels composés

## Ecoulement autour d'un corps fictif immobile « solide de Rankine »

Cet écoulement est obtenu par la superposition d'une source ( $q_v$ ) placée à l'origine et d'un écoulement uniforme de vitesse  $U_0 > 0$  à l'infini et parallèle à ( $Ox$ ).

### La fonction de courant totale

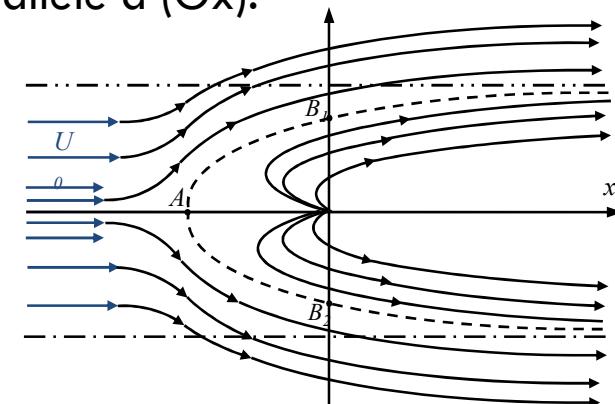
$$\psi(r, \theta) = U_0 r \sin \theta + \frac{q_v}{2\pi} \theta$$

### Champ de vitesse

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_0 \cos \theta + \frac{q_v}{2\pi r} \\ u_\theta(r, \theta) = -U_0 \sin \theta \end{cases}$$

### Point d'arrêt

$$v_\theta = U_0 \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_A = 0, & u_r = 0 = U_0 + \frac{q_v}{2\pi r_A} \Rightarrow r_A = -\frac{q_v}{2\pi U_0} \\ \theta_A = \pi, & u_r = 0 = -U_0 + \frac{q_v}{2\pi r_A} \Rightarrow r_A = \frac{q_v}{2\pi U_0} \end{cases} \text{ solution acceptée}$$



Lignes de courant autour du solide de Rankine

En matérialisant une surface  $\Sigma$  d'envergure unité s'appuyant, dans le plan ( $xOy$ ), sur la ligne de courant  $B_1AB_2$  passant par le point d'arrêt on génère un solide dit "solide de Rankine".



# Les écoulements potentiels composés

## Ecoulement autour d'un corps fictif immobile « l'ovale de Rankine »

Cet écoulement est obtenu par la superposition d'une source ( $q_v$ ) et d'un puits ( $-q_v$ ), symétriquement disposés aux points  $S(-a,0)$ ,  $P(0,a)$  de l'axe des  $x$  et d'un écoulement uniforme de vitesse  $U_0 > 0$  à l'infini et parallèle à  $(Ox)$ .

### Fonction de courant totale

$$\psi(x,y) = U_0y - \frac{q_v}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$$

### Champ de vitesse

$$u = U_0 - \frac{q_v}{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)}{1 + \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2} = U_0 - \frac{q_v}{2\pi} \frac{2a(x^2 - y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2}$$

$$v = \frac{q_v}{2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)}{1 + \left( \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)^2} = \frac{q_v}{2\pi} \frac{-4axy}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2}$$

### Point d'arrêt

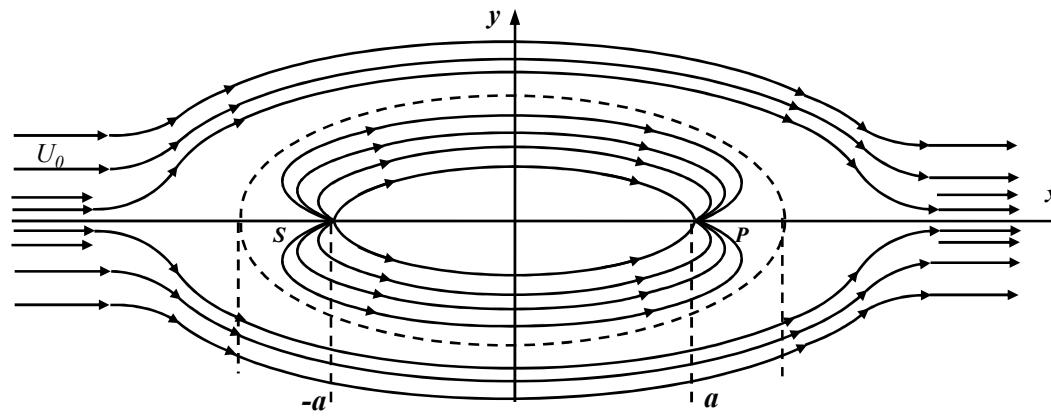
On remarque que la composante  $v$  du vecteur de vitesse en tous points de l'axe  $(Ox)$  est nulle et de ce fait l'apparition des points d'arrêts sur cet axe est conditionné par l'annulation de la composante  $u$ . Ainsi on détermine la coordonnée  $x_A$  du point d'arrêt de l'équation suivante

$$(x^2 - a^2) \left[ U_0(x^2 - a^2) - \frac{q_v}{2\pi} 2a \right] = 0 \Rightarrow x = \pm a \left( \frac{q_v}{\pi a U_0} + 1 \right)^{1/2}$$



## Les écoulements potentiels composés

La solution  $x=\pm a$  est refusée car c'est les positions des origines de la source et le puits (points singuliers). De ce fait, il existe deux points d'arrêt  $A\left(-a \sqrt{\frac{q_v}{\pi a U_0}} + 1,0\right)$  et  $A'\left(a \sqrt{\frac{q_v}{\pi a U_0}} + 1,0\right)$  symétriques par rapport à l'axe des  $y$ . Comme montré par la figure ci-dessous les deux points d'arrêts appartiennent à la ligne de courant dite "l'ovale de Rankine"



Lignes de courant de l'ovale de Rankine

### Ecoulement autour d'un cylindre fixe

Cet écoulement est résultant de la superposition d'un écoulement uniforme de vitesse  $U_0$  à l'infini et parallèle à l'axe des  $x$  et d'un dipôle d'intensité positive  $\mu = U_0 a^2$  placée à l'origine du repère.

**Fonction de courant totale**  $\psi(r, \theta) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2}\right)$



# Les écoulements potentiels composés

## Champ de vitesse

$$\begin{cases} u_r(r, \theta) = U_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2} \right) \\ u_\theta(r, \theta) = -U_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2} \right) \end{cases}$$

## Point d'arrêt

Les points d'arrêt sont obtenus pour  $v_r=0$  et  $v_\theta=0$ . De ces conditions on en déduit aisément deux points d'arrêt  $A$  et  $A'$  dont les coordonnées sont respectivement  $(r_A = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}}, \theta_A = \pi)$  et  $(r_{A'} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi U_0}}, \theta_{A'} = 0)$ . Ces points appartenant à ( $Ox$ ) sont symétriques par rapport à  $O$ .

## Lignes de courant

Les équations des lignes de courant sont de la forme suivante :  $U_0 r \sin \theta \left( 1 - \frac{\mu}{2\pi U_0 r^2} \right) = C$

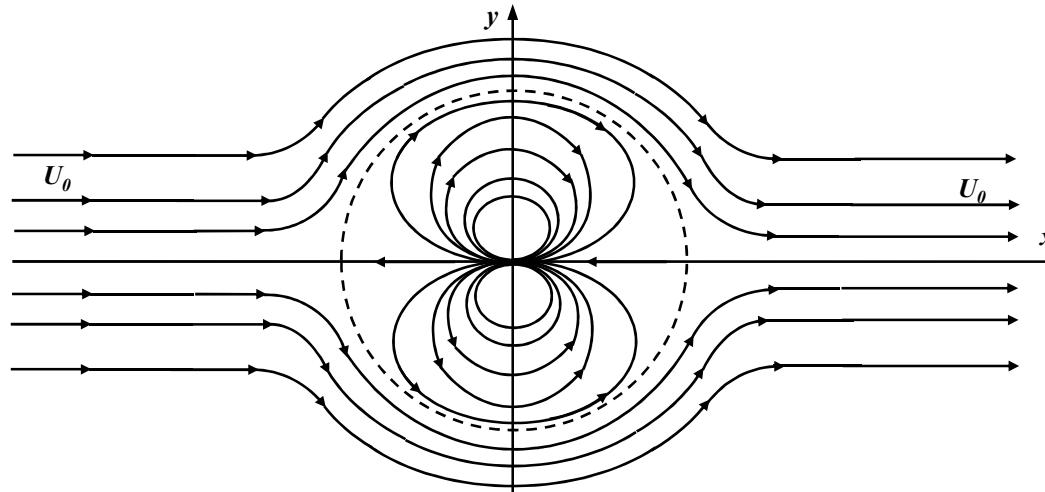
L'équation de la ligne de courant passant par les points d'arrêt est vérifiée par leurs coordonnées  $\psi(r_A, \theta_A) = \psi(r_{A'}, \theta_{A'}) = C$ .

D'où on tire la valeur de la constante  $\sin \theta_A \left( U_0 r_A - \frac{\mu}{2\pi r_A} \right) = C = 0 \Rightarrow \psi(r_A, \theta_A) = 0$

La courbe correspondante ( se décompose en deux parties : l'axe des  $x$  et le cercle centré à l'origine du repère de rayon .



## Les écoulements potentiels composés



Superposition d'un dipôle et d'un écoulement uniforme

Le long du cercle ou ligne de courant  $\psi = 0$  la propriété de tangentialité du vecteur vitesse est vérifiée car la composante radiale de la vitesse est nulle  $v_r(r_A) = 0$ .

La configuration générale de l'écoulement, telle qu'elle est illustrée sur la figure ci-dessus permet de distinguer clairement deux régions situées à l'extérieur et à l'intérieur du cercle de rayon  $r_A$ . Dans la région externe, seul le débit de l'écoulement du champ uniforme à l'infini qui intervient, tandis que dans la région interne du cercle le mouvement du fluide est totalement engendré par la présence du dipôle à l'origine.



# Les écoulements potentiels composés

## Ecoulement autour d'un cylindre en rotation « effet de Magnus »

Examinons ce que devient l'écoulement autour du cercle (de rayon  $r_0$ ) en présence d'un vortex d'intensité  $\Gamma$  ( $\Gamma > 0$ ) et d'axe ( $Oz$ ).

**Fonction de courant**  $\psi(r, \theta) = U_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$

### Champ de vitesse

$$v_r(r, \theta) = U_0 \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

$$v_\theta(r, \theta) = -U_0 \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

### Point d'arrêt

Les points d'arrêt sont obtenus pour  $v_r=0$  et  $v_\theta=0$ . La condition sur  $v_r$  montre que ces points relèvent de l'un des deux cas suivants

$$\begin{cases} i) \quad r_A = r_0 = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi U_0}} & (\text{ cercle de rayon } r_0) \\ ii) \quad \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} & (\text{ axe des } y) \end{cases}$$

La condition  $v_\theta=0$  conduit à  $\sin \theta_A = \Gamma / \Gamma_0$  avec  $\Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0$ .

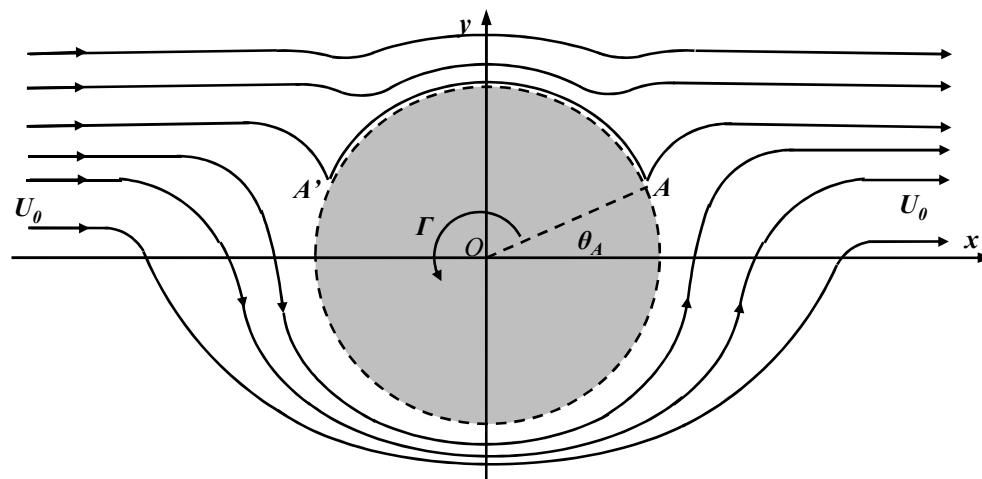


# Les écoulements potentiels composés

## i) Sur le cercle de circulation $\Gamma$

**1<sup>er</sup> Cas :  $0 \leq \Gamma < \Gamma_0$**

La condition d'annulation de  $v\theta$  est satisfaite seulement si :  $0 \leq \Gamma < \Gamma_0$  et obtient alors deux points d'arrêt situés sur le cercle et symétriques par rapport à l'axe des  $y$  repérés par les angles :  $\theta_A = \sin^{-1}(\Gamma / \Gamma_0)$ ,  $\theta_{A'} = \pi - \sin^{-1}(\Gamma / \Gamma_0)$



Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation faible ( $\Gamma < \Gamma_0$ )

On constate que l'ajout de la circulation  $\Gamma$ , créée par le vortex, avait un effet sur l'écoulement autour du cercle de façon à faire déplacer les points d'arrêt, symétriquement par rapport à l'axe ( $Oy$ ), vers le haut d'une ordonnée proportionnelle à la valeur de  $\Gamma$ .



## Les écoulements potentiels composés

### ii) Sur l'axe (Oy)

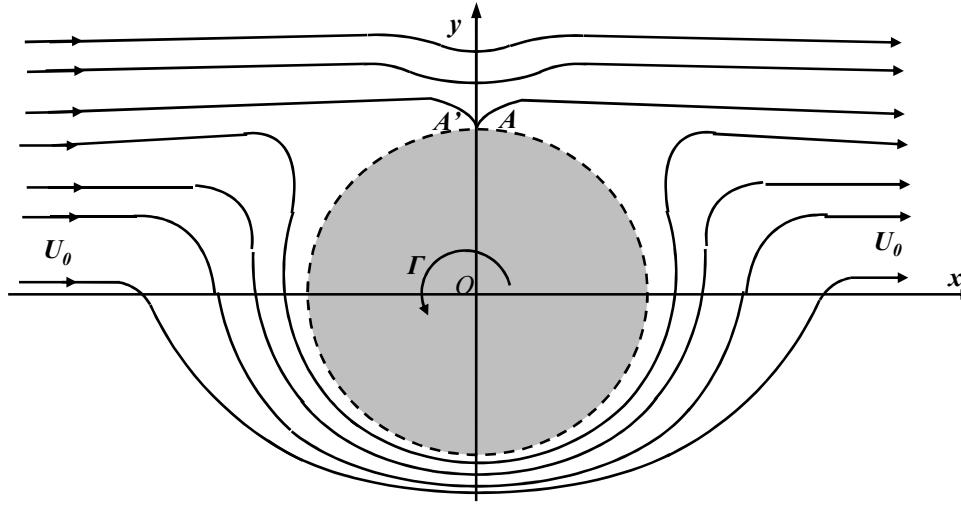
L'annulation de  $v_\theta$  a conduit à  $\sin \theta_A = \frac{\Gamma}{2\pi r_A U_0(1+r_0^2/r_A^2)} > 0$ . L'ajout de la condition  $v_r = 0$  affirme la valeur de  $\theta = \pi/2$  d'où les points d'arrêt  $\in (Oy)$  et leurs coordonnées  $r_A$  vérifient l'équation en  $r_A$  suivante :

$$r_A^2 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} r_A + r_0^2 = 0$$

dont le déterminant est  $\Delta' = r_0^2 \left[ \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2 - 1 \right]$  et  $\Gamma_0 = 4\pi r_0 U_0$ . Les solutions existent pour  $\Delta' \geq 0$  c.à.d. si et seulement si  $\Gamma \geq \Gamma_0$ .

#### 2<sup>ème</sup> Cas : $\Gamma = \Gamma_0$

Pour cette valeur critique de la circulation, un point d'arrêt double se forme à l'intersection du cercle avec l'axe (Oy).



Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation critique ( $\Gamma = \Gamma_0$ )



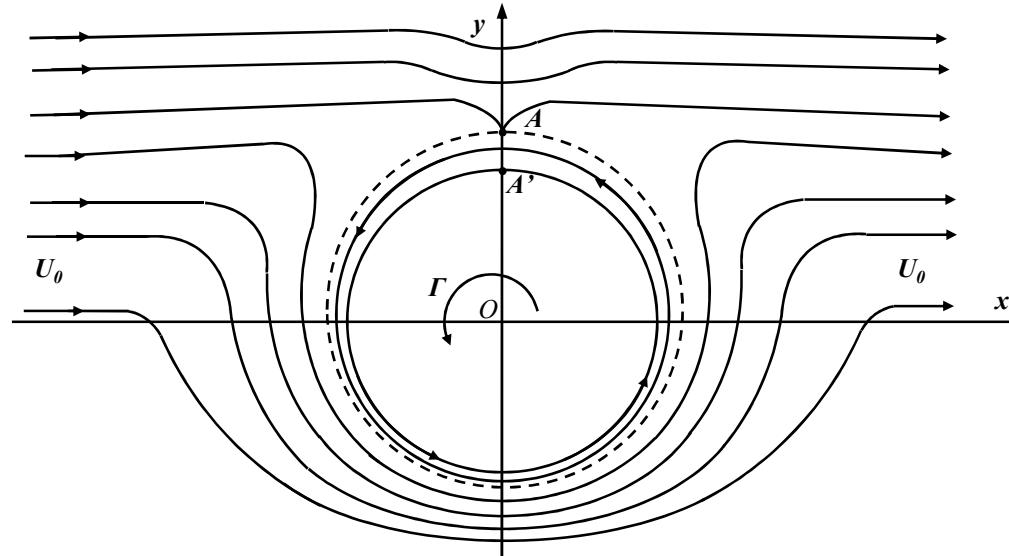
## Les écoulements potentiels composés

**3<sup>ème</sup> Cas :  $\Gamma > \Gamma_0$**

Le déterminant réduit de l'équation de la coordonnée radiale  $r_A$  des points d'arrêts est alors positif et les solutions prennent la forme suivante :

$$r_A = r_0 \left( (\Gamma / \Gamma_0) + [(\Gamma / \Gamma_0)^2 - 1]^{1/2} \right) \quad r_{A'} = r_0 \left( (\Gamma / \Gamma_0) - [(\Gamma / \Gamma_0)^2 - 1]^{1/2} \right)$$

dont leur produit est  $r_0^2$  ce qui confirme qu'un point de ces deux d'arrêt formés sur l'axe des  $y$  est à l'extérieur du cercle (cylindre) de rayon  $r_0$  et l'autre est à l'extérieur .



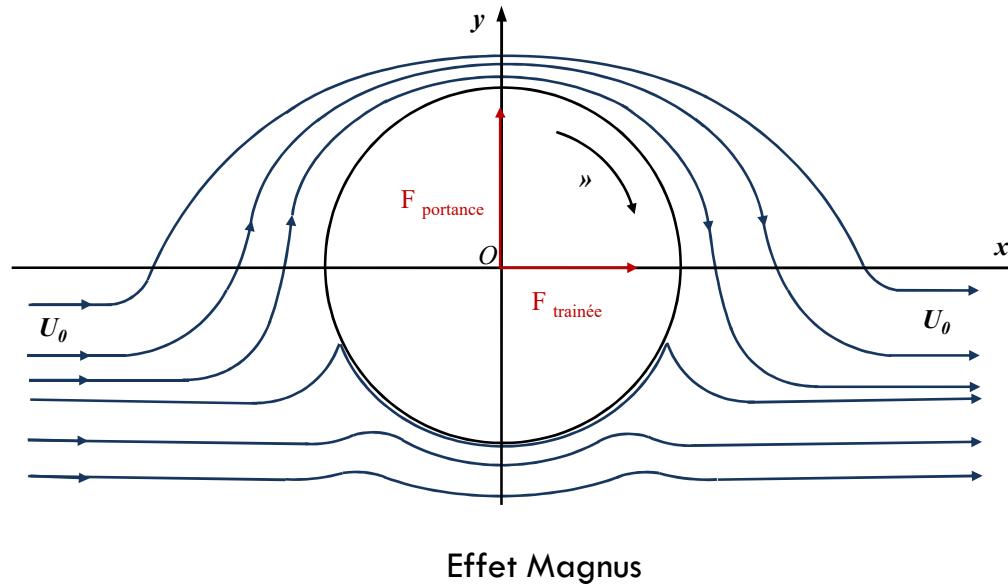
Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation critique ( $\Gamma > \Gamma_0$ )



# Les écoulements potentiels composés

## Calcul des effort d'effet de Magnus

En matérialisant une surface d'envergure unité s'appuyant dans le plan ( $xOy$ ) sur le cercle et sous la restriction  $r > r_0$ , on se trouve devant la situation d'un cylindre de rayon  $r_0$ , centré à l'origine et en rotation autour de ( $Oz$ ), plongé dans un écoulement de vitesse uniforme  $U_0$  à l'infini.



Afin de calculer l'effort global exercé par le fluide sur l'obstacle qui est le cylindre, on applique le théorème d'Euler. En négligeant les forces de frottement, seules les forces de pression qui interviennent comme forces de surfaces dans ce problème.



## Les écoulements potentiels composés

La résultante de ces forces sur le cylindre s'obtient par intégration sur son contour comme suit

$$\vec{F} = - \iint_{\Sigma} p \vec{n} dS$$

où  $dS$  est l'élément de surface d'envergure unité (longueur en  $z$  est l'unité) et la normale est extérieure. La projection de la force dans le repère ( $xOy$ ) donne

$$\vec{F} = - \iint_{\Sigma} p(r_0, \theta) \vec{n} r_0 d\theta \times (1m) \Rightarrow \begin{cases} F_x = - \int_0^{2\pi} p(r_0, \theta) \cos \theta r_0 d\theta \\ F_y = - \int_0^{2\pi} p(r_0, \theta) \sin \theta r_0 d\theta \end{cases}$$

$F_x$  appelée « traînée » représente la composante parallèle, au vecteur vitesse de l'écoulement à l'infini, de la force de pression exercée par le fluide sur le cylindre, tandis que  $F_y$  dite « portance » est sa composante normale à l'écoulement.

En négligeant la différence en énergie potentielle, l'évolution de la pression autour du cylindre est

$$p(r_0, \theta) + \frac{1}{2} \rho v^2(r_0, \theta) = c^{\text{ext}}$$



## Les écoulements potentiels composés

Le module du vecteur vitesse se calcule au niveau de la surface du cylindre  $v(r_0, \theta)$  en posant  $r=r_0$  dans les expressions de ses composantes

$$v_r = 0 \quad v_\theta = -2U_0 \left( \sin \theta + \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_0} \right)$$

d'où la pression s'écrit

$$p(\theta) = c_{ss} - 2\rho U_0^2 \left( \sin \theta + \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^2$$

Les composantes de l'effort de Magnus  $F_x, F_y$  peuvent être évaluées séparément

$$\begin{cases} F_x = -C \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + 2\rho r_0 U_0^2 \int_0^{2\pi} \left( \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma}{\Gamma_0} \sin \theta \right) \cos \theta d\theta \\ F_y = -C \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + 2\rho r_0 U_0^2 \int_0^{2\pi} \left( \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma}{\Gamma_0} \sin \theta \right) \sin \theta d\theta \end{cases}$$

pour obtenir, après intégration  $F_x=0, F_y = -\rho U_0 \Gamma$ . Ce résultat traduit l'absence de force de traînée  $F_x=0$  en raison de la symétrie de la vitesse par rapport à l'axe des  $y$  et la présence de force de portance  $F_y = -\rho U_0 \Gamma$  (négative pour une circulation positive) connue sous le nom de l'effet Magnus.



## Chapitre 2

- Cinématique des fluides
- Analyse basée sur le concept du volume de contrôle
  - Conservation de masse (formulation intégrale)
    - Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable fixe
    - Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable en mouvement
  - Equations de quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement
    - Dérivation de l'équation de quantité de mouvement
    - Dérivation de l'équation du moment de la quantité de mouvement (énergie)
- Analyse dimensionnelle et similitude



## Conservation de masse (formulation intégrale)

En mécanique des fluides, on utilise la description eulérienne du mouvement, c'est-à-dire qu'on ne suit pas les particules dans leurs mouvements individuels, mais on examine le mouvement du fluide à un endroit donné. Cette description introduit deux notions de base : dérivée matérielle ou particulaire et volume de contrôle.

Dans le chapitre précédent, on a représenté l'équation de continuité par la formulation différentielle ou locale basée sur un élément de volume infinitésimal. Dans ce chapitre on va exprimer ce principe de conservation de masse, en se basant sur la notion du volume de contrôle, à l'aide de la formulation intégrale ou globale Théorème de Reynolds). De plus, on dérive les équations de conservation quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement (énergie).

### Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable fixe

Soit un fluide occupant à l'instant  $t$  un domaine fini  $D(t)$  de volume  $V$ , limité par une surface  $S$ , que l'on suit dans son mouvement. La grandeur extensive  $m$  est calculée sur ce domaine par l'intégrale de volume

$$m = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV$$



## Conservation de masse (formulation intégrale)

Sa dérivée particulière est nulle d'où  $\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho \, dV = 0$

Comme le domaine enveloppant les particules fluides qui sont en mouvement c.à.d. volume matériel  $V$  est une fonction du temps, l'évaluation présente un inconvénient.

Afin de surmonter le problème, on fait coïncider à instant de temps  $t$  le volume matériel fermé  $V$  avec un volume de contrôle fixe  $V_c$  sur lequel on pourra effectuer les calculs plus facilement. A l'aide d'un bilan global, on comptabilise le flux de masse à travers la surface de contrôle  $S_c$  délimitant ce volume contrôle  $V_c$ .

Le débit de masse net à travers la surface de contrôle  $S_c$  est donc

$$\iint_{S_c} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \underbrace{\iint_{S_e} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux à travers } S_c} - \underbrace{\iint_{S_s} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux sortant}}$$

Le flux de masse traversant la surface  $S_c$  correspondant à la quantité de masse qui "s'accumule" (négative ou positive) par unité de temps dans le volume de contrôle est

$$\left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{V_c} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_c} \rho \, dV$$



## Conservation de masse (formulation intégrale)

Comme la masse ne peut être créée ni détruite, on a

$$\underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Accumulation de m dans } V_c \text{ dans le temps}} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Les flux massiques à travers } S_c} = 0$$

C'est le théorème de transport de Reynolds (dérivée particulière d'une intégrale de volume)

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV}_{\text{Variation temporelle de m en suivant le système}} = \underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Variation temporelle de m dans } V_c \text{ (locale)}} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{débit net de m traversant } S_c \text{ entourant } V_c} = 0$$

A l'aide du théorème de Gauss, on écrit

$$\iint_{S_c} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{V_c} \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) dV$$

L'équation de conservation de la masse devient :  $\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{V}) \right) dV = 0$

En faisant tendre ce volume vers un volume contenant une seule particule fluide en  $M_0$

$$\left. \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right) \right|_{M_0} \cdot \Delta V = 0 \quad \Delta V \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$



## Conservation de masse (formulation intégrale)

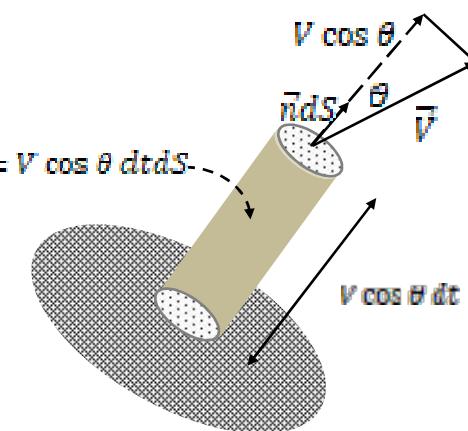
### Dérivation basée sur un volume de contrôle non déformable en $m^3$

Si le volume de contrôle se déplace, il faut considérer la vitesse relative  $\vec{V}_r$  entre celle du fluide  $\vec{V}$  et celle de la surface  $\vec{V}_s$  enveloppant le volume de contrôle  $V_c$ .

Considérant un volume élémentaire  $dV$  entre la surface  $S_c$  et la surface englobant le volume matériel  $V$ . Ce volume  $dV$  de fluide, traversant la frontière du volume de contrôle  $V_c$ , dépend de la vitesse de l'écoulement du fluide et de la vitesse de déplacement  $\vec{V}_s$  de la surface de contrôle  $S_c$ .

#### Cas d'un volume $V_c$ fixe

Si la surface est fixe, la hauteur atteinte par  $dV$  dans un intervalle de temps  $dt$  est donnée par  $|\vec{V}| \cos \theta dt$  et le volume devient  $dV = |\vec{V}| \cos \theta dt dS$ , avec  $|\vec{V}|$  le module de la vitesse de l'écoulement et  $dS$  est une surface élémentaire de  $S_c$ .



Cas de surface de contrôle immobile



## Conservation de masse (formulation intégrale)

### Cas d'un volume $V_c$ mobile

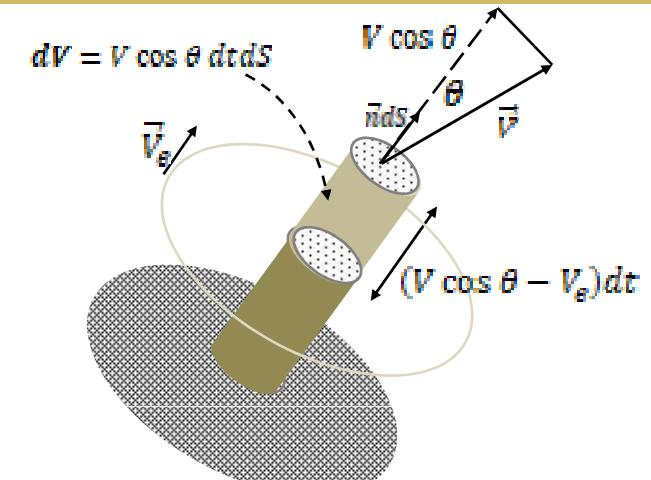
Lorsque la surface se déplace avec une vitesse d'entraînement normale  $V_e$ , dans le même sens que  $V \cos \theta$ , la hauteur du volume atteinte dans un intervalle  $dt$  est plus petite que précédemment et elle est égale à  $(V \cos \theta - V_e)dt$  et le volume devient  $dV = (V \cos \theta - V_e)dtdS$ .

Dans le cas inverse où la vitesse d'entraînement est dirigée dans le sens inverse de la vitesse  $V \cos \theta$  de l'écoulement, la hauteur du volume atteinte dans l'intervalle  $dV$  est donnée par  $(V \cos \theta + V_e)dt$  et le volume élémentaire est ainsi  $dV = (V \cos \theta + V_e)dtdS$ .

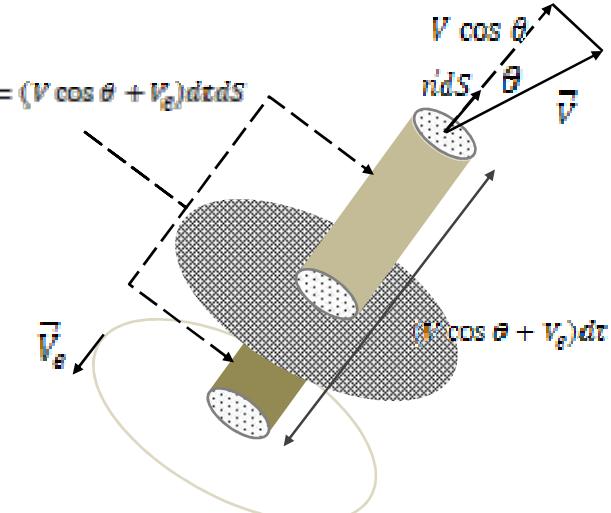
La relation générale de conservation de masse est ainsi

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho \cdot (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS = 0$$

où  $\vec{V}_r$  est la vitesse relative du fluide par rapport au  $V_c$ .



Surface de contrôle mobile dans le sens de  $\vec{n}$



Surface de contrôle mobile dans le sens opposé de  $\vec{n}$



## Equation de quantité de mouvement

### Dérivation de l'équation de la quantité de m<sup>vt</sup>

On a montré au chapitre précédent que la dérivée particulaire d'une intégrale de volume, c'est-à-dire d'un volume que l'on suit dans son mouvement, s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V G dV = \iiint_V \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \operatorname{div}(G \vec{V}) \right) dV$$

où  $G(x_i, t)$  est une fonction volumique des variables  $(x_i, t)$  attachée au domaine contenant un ensemble de particules fluides se déplaçant à vitesse  $\vec{V}(x_i, t)$ .

Comme on est amenés à faire le bilan en volume d'une grandeur massique (extensive), la fonction  $\rho f$  doit être substituée à  $G$  dans la relation précédente. On obtient

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho f dV = \iiint_V \left( \frac{\partial \rho f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho f \vec{V}) \right) dV$$

Qui se réécrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho f dV = \iiint_V \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right) dV + f \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right)}_{=0} dV$$

Où la 2<sup>ème</sup> partie est nulle grâce à l'équation de continuité et la première intégrale représente dérivée particulaire de la grandeur  $f$ . Ainsi on peut écrire

$$\iiint_V \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right) dV = \iiint_V \rho \frac{Df}{Dt} dV$$



## Equation de quantité de mouvement

En se servant du théorème d'Ostrogradsky, cette intégrale s'écrit aussi comme suit

$$\iiint_V \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{V}) \right) dV = \iiint_V \rho \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S \rho f (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Pour la fonction vectorielle de quantité de mouvement, la fonction intensive  $f$  est  $\vec{V}$ . Ainsi la loi de conservation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dV = \iiint_V \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

D'après la deuxième loi de Newton

$$\iiint_V \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} dV = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

Ainsi, loi de conservation de quantité de mouvement se réécrit

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \iiint_V \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Les forces appliquées comprennent les forces de volume et les forces de surface agissant à la surface du volume.



## Equation de quantité de mouvement

Les forces de volume s'exerçant à distance en tout point  $M$  du volume matériel  $V$ , par exemple la force exercée par le champ de gravité nommée poids

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV$$

Tandis que les forces de surface sont transmises par le fluide, extérieur du volume (domaine), en tout point  $M$  de la surface de contact  $S$  limitant ce domaine. Ces forces sont les forces de pression et les forces de frottement qui sont négligeables comme le fluide est considéré comme parfait.

Les forces de pression ont la forme suivante

$$\iint_S p \cdot \vec{n} dS dV$$

Comme, à un instant  $t$ , le volume matériel  $V$  en mouvement coïncide avec le volume de contrôle  $V_c$ , le théorème de conservation de quantité de mouvement prend la forme

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \iiint_{V_c} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dS$$

Forces exercées sur  $V_c$       Variation de la quantité de  $m^{pt}$  dans  $V_c$       Flux de la quantité de  $m^{pt}$  à travers  $S_c$



## Equation de quantité de mouvement

### Remarques

- L'équation de conservation de quantité de mouvement ne fait intervenir que des quantités calculées sur la surface limitant le volume de contrôle ; il est inutile de connaître le champ de vitesse et le champ de pression à l'intérieur de ce volume.
- Si l'écoulement est en régime permanent et si le volume de contrôle ne se déforme pas et si,  $\vec{V}_r = \vec{V}$  la loi de conservation de qt de mvt se simplifie et prend la forme suivante appelée **théorème d'Euler** :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

- Comme le fluide est considéré parfait (force de frottement négligeable) les sections d'entrées et de sorties ont des vitesses uniformes, l'intégrale sur la section  $S_c$  peut se simplifier en :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \sum_{\text{entrée}} q_{m_i} \vec{V}_i - \sum_{\text{sortie}} q_{m_j} \vec{V}_j$$

où les sommes correspondent aux nombres d'entrées et de sorties et  $q_m$  est le débit massique.



# Equation de quantité de mouvement

## Exemple (Exo2 de série3)

De l'eau circule dans une conduite horizontale, de section constante, présentant un coude d'angle  $90^\circ$  continué dans la direction verticale. On suppose que le régime est stationnaire et on néglige l'effet de la pesanteur.

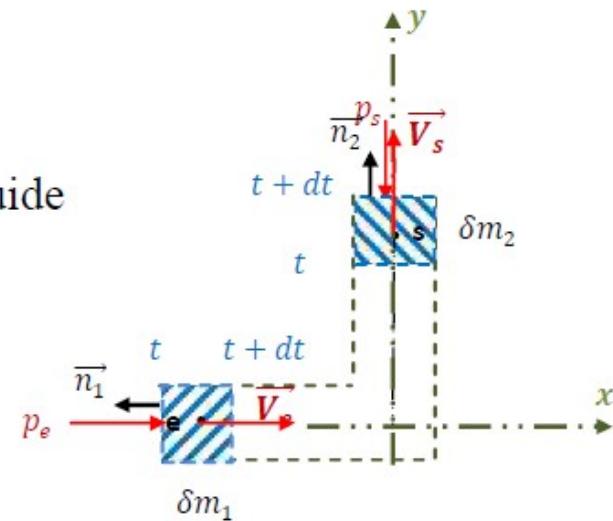
1. Déterminer la force  $\vec{F}$  appliquée par le fluide sur la canalisation.
2. Calculer le module de  $\vec{F}$  ainsi que ses composantes pour les données  $D=9\text{cm}$ ,  $V_e=0,5\text{m/s}$  et  $p_e=29\,616,78\text{Pa}$ ...

## Solution

1. Détermination de la force appliquée par le fluide sur la canalisation

### *Les hypothèses*

L'écoulement est incompressible,  
Le régime est stationnaire,  
L'effet de la pesanteur est négligé.





## Equation de quantité de mouvement

On résonne sur le système matériel fermé  $\Sigma$  constitué du contenu du tube coudé (limité par  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_l$ ) et une masse élémentaire  $\delta m_1$  qui rentre en amont entre  $t$  et  $t+dt$ :

D'après le principe de conservation du débit massique du fluide, on écrit

$$m(t) + \delta m_1 = m(t + dt) + \delta m_2$$

qui se réécrit comme suit

$$m(t + dt) - m(t) = \delta m_1 - \delta m_2 = \rho(S_1 V_1 - S_2 V_2)dt$$

Comme l'écoulement est stationnaire

$$m(t + dt) = m(t) \Rightarrow S_1 V_1 = S_2 V_2$$

d'où

$$S_1 = S_2 \Rightarrow V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_e = V_s$$

D'autre part, on applique le théorème de Bernoulli entre  $e$  et  $s$

$$p_e + \underbrace{\rho g y_e}_{\approx 0} + \frac{1}{2} \rho V_e^2 = p_f + \underbrace{\rho g y_f}_{\approx 0} + \frac{1}{2} \rho V_s^2$$

$$V_e = V_s \Rightarrow p_e = p_f$$

Afin de calculer la force appliquée par le fluide sur la canalisation on applique le théorème de bilan de quantité de m<sup>vt</sup> (théorème de transport de Reynolds TTR) sur le volume de contrôle  $V_c$  délimité par les surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_l$  du système fermé  $\Sigma$ . On écrit



## Equation de quantité de mouvement

$$\underbrace{\iiint_{V_c} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV}_{=0} + \iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{ext}$$

### *Les forces extérieures*

Forces de viscosité : négligées

Force de pesanteur : négligée

La force subie par le coude est  $\overrightarrow{F_{f/c}} = -\overrightarrow{F_{c/f}} = -\vec{F}$

Les forces de pression :  $\overrightarrow{F_{pe}}, \overrightarrow{F_{ps}}$

$$\iint_{S_1} \rho \vec{V}_e (\vec{V}_e \cdot \vec{n}_1) dS + \iint_{S_2} \rho \vec{V}_f (\vec{V}_f \cdot \vec{n}_2) dS + \underbrace{\iint_{S_l} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_l) dS}_{=0, (\vec{V} \perp \vec{n}_l)} = \overrightarrow{F_{pe}} + \overrightarrow{F_{ps}} - \vec{F}$$

Comme les forces de viscosité sont négligées la vitesse est uniforme le long de la section  $S_l$  et l'intégrale de surface devient

$$\iint_{S_1} \rho \vec{V}_e (\vec{V}_e \cdot \vec{n}_1) dS = -\rho V_e^2 S_1 \vec{l}$$



## Equation de quantité de mouvement

De même pour la section  $S_2$  la vitesse est uniforme :

$$\iint_{S_2} \rho \vec{V}_f (\vec{V}_f \cdot \vec{n}_2) dS = \rho V_s^2 S_2 \vec{j}$$

Par conséquent

$$-\rho V_e^2 S_1 \vec{i} + \rho V_f^2 S_2 \vec{j} = p_e S_1 \vec{i} - p_s S_2 \vec{j} - \vec{F}$$

Comme  $S_1 = S_2, p_e = p_s, V_e = V_s$ , on obtient

$$\vec{F} = (p_e S_1 + \rho V_e^2 S_1)(\vec{i} - \vec{j}).$$

**2.** Le module de  $\vec{F}$  et ses composantes

$$F_x = \frac{\pi D^2}{4} (p_e + \rho V_e^2), \quad F_y = -\frac{\pi D^2}{4} (p_e + \rho V_e^2)$$

$$\|\vec{F}\| = \frac{\pi \sqrt{2} D^2}{4} (p_e + \rho V_e^2)$$

**A.N. :**

$$F_x = 190N, \quad F_y = -190N, \quad F = 268.7N.$$