III-1 DÉRIVATION DANS LE DOMAINE COMPLEXE

Malgré la possibilité de considérer un nombre complexe z comme un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, il y avait une différence essentielle entre la fonction considérée comme une fonction de la variable complexe z ou des variables réelles x et y. Cette différence apparait particulièrement dans la dérivation.

III-1-1 Définition 1

Soit f une fonction uniforme définie sur domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$, et soit $z_0 \in D$. On dit que f est dérivable en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et elle est finie. Dans ce cas on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle la dérivée de f au point z_0.

Remarque : Si on pose $h = z - z_0$, on aura $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$.

III-1-2 Définition 2

On dit que f est holomorphe dans D, si f est dérivable en tout point z de D.

Elle est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0.

Exemple : Tout polynôme est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Si la fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dérivable au point $z_0 \in D$, alors elle est continue au point z_0.

Preuve. Pour tout $z_0 \in D\setminus\{z_0\}$, on a

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow \lim_{z \to z_0}(f(z) - f(z_0)) = 0 \times f'(z_0) = 0.$$

D'où f est continue en z_0. □

Remarque : La réciproque de la proposition est fausse. Par exemple $f(z) = |z|$ est continue en $z_0 = 0$, mais elle n'est pas dérivable en $z_0 = 0$. En effet

pour $h = l > 0$ on a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|-0}{h} = 1$, et pour $h = ik$, $k > 0$ on a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|-0}{h} = \frac{1}{i} \neq 1$.

III-2 CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMANN

Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction définie dans un domaine D, et soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Alors f est dérivable au point z_0, si et seulement si les fonctions u et v sont dérivables au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et vérifient les équations dites de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Preuve. *Condition nécessaire :* Supposons f dérivable au point z_0, alors

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

en particulier pour $x \to x_0, y = y_0$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0}\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0}, \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

et de même pour $x = x_0, y \to y_0$, on trouve

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)}, \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Il se peut que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sans être dérivable en z_0.

Exemple : Soit $f(z) = f(x + iy) = \sqrt[3]{xy}$, $z_0 = 0$.

On a $u(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ et $v(x, y) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

D'où les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, mais la fonction f n'est pas dérivable en 0, car $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sqrt[3]{xy}}{x+iy}$ n'existe pas. En effet pour $x = y$, on a

$$\lim_{z \to 0} \left| \frac{\sqrt[3]{xy}}{x + iy} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(1+i)x} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|1+i|} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

1. *En multipliant la deuxieme condition de Cauchy-Riemann par i et l'ajoutant à la première, on aura*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ou bien $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, *où* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ *dit opérateur de Cauchy-Riemann.*

2. Si les fonctions u et v sont deux fois dérivables et vérifient les relations (3.1), *alors*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

De telles fonctions sont dites harmoniques. Ainsi les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.

III−3 RÈGLES DE DÉRIVATION

III-3-1 Opérations sur la dérivée

Les règles de dérivation somme, produit, quotient et composition (lorsqu'elles sont définies) sont les mêmes que celles utilisées dans le cas réel.

1. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$.
2. $(f(z)\,g(z))' = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z)$.
3. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$, si $g(z) \neq 0$.
4. $(g \circ f)'(z) = f'(z)\,g'[f(z)]$.

III-3-2 Dérivées des fonctions Elémentaire

1. $(z^n)' = nz^{n-1}$,
2. $(e^z)' = e^z$,
3. $(\log z)' = \frac{1}{z}$,
4. $(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z$,
5. $(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z$.
6. $(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z$.

III-3-3 Règles de l'Hôpital

Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans un domaine contenant le ponit z_0 telles que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, et $g'(z_0) \neq 0$, alors

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dans le cas où $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, on peut utiliser cette règle à nouveau.

Exemple

Calculons $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}$.

Les fonctions $\sin z$ *et* z *sont holomorphes sur* $\mathbb{C}$, *et* $\sin 0 = 0$, *donc par la règle de l'Hôpital, on a*

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1.$$