IV-1 CHEMINS ET COURBES DANS LE PLAN COMPLEXE

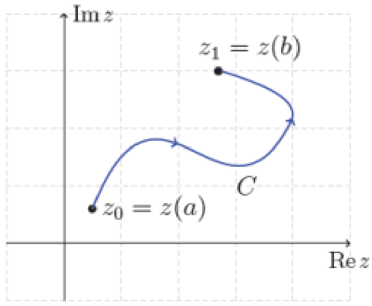
On appelle chemin ou arc de classe C^1 dans $\mathbb{C}$ toute fonction de classe

C^1 définie d'un intervalle réel $I = [a, b]$, $a < b$ vers le plan complexe $\mathbb{C}$,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},\ t \to \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

Les points $z_0 = \gamma(a)$ et $z_1 = \gamma(b)$ sont appelés respectivement point initial ou origine de γ et point final ou extrémité de γ.

L'image $C = \{\gamma(t) \in \mathbb{C}, t \in [a, b]\}$ s'appelle support de γ ou courbe dans le plan complexe $\mathbb{C}$, paramétrée par le chemin γ.



Si les points initial et final d'un chemin coïncident, ce dernier est

appelé chemin fermé ou lacet.

2. Un chemin est dit simple s'il ne se recoupe pas, i.e. il n'a pas de points doubles

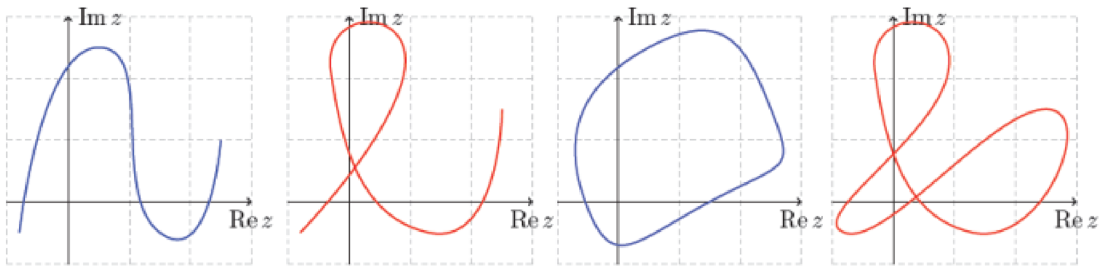
3. Toute courbe fermée et simple, est appelée courbe de Jordan.

IV-1-1 Exemples

paramétré par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $r \in [0, 2\pi]$, c'est une courbe de Jordan.

2) $C = \{t + it^2,\ t \in [-1, 2]\}$ est une courbe simple, partie de la parabole d'équation $y = x^2$, d'origine $-1 + i$ et d'extrémité $2 + 4i$.

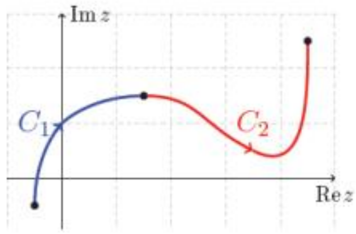
1) Le cercle de centre z_0 et de rayon r, $C = \{z \in C : |z - z_0| = r\}$ est



Chemin non fermé et simple | Chemin non fermé et non simple | Chemin fermé et simple | Chemin fermé et non simple

IV-1-2 Définition 1

Soit C_1 et C_2 deux courbes telles que l'extrémité de C_1 coïncide avec l'origine de C_2, alors $C_1 \cup C_2$ est une courbe appelée courbe composée de C_1 et C_2.



IV-1-3 Exemple

la courbe $C = \left\{e^{it},\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \cup \left\{(1-t)\,i + t\,(-1+i)\,,\ t \in [0,1]\right\}$ est composée d'un arc de cercle et d'un segment.

IV–2 INTÉGRATION LE LONG D'UNE COURBE

Soit D un domaine non vide de $\mathbb{C}$, et soit C une courbe paramétrée par un chemin de classe C^1, $\gamma : [a,b] \to D,\ t \mapsto \gamma(t)$, et soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue en tout point de C. On appelle intégrale de f le long de la courbe C et on le note $\int_C f(z)\,dz$, le nombre complexe

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

1) L'intégrale ci-dessus est appelée aussi intégrale le long du chemin γ

et notée $\int_\gamma f(z)\,dz$.

2) Si la courbe est fermée et orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre on utilise le signe $\oint$ au lieu de $\int$. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est aussi appelé sens positif ou direct.

IV-2-1 Exemple

Calculons l'intégrale $\int_C z^2 dz$, où $C = \left\{\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

On a $\gamma'(t) = 2ie^{it}$, donc

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(2e^{it}\right)^2 2ie^{it} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8ie^{3it} dt = \left[\frac{8}{3}e^{3it}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{\frac{9}{2}i\pi} - \frac{8}{3}e^0 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3}i.$$

Les propriétés suivantes sont analogues à celles des intégrales réelles.

IV-2-2 Préposition

1. $\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz + \beta \int_C g(z)\,dz,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$, *où* $-C$ *est la courbe* C *parcourue dans le sens inverse.*
3. *Si* $C = C_1 \cup C_2$, *alors* $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$.

IV-2-3 Exemple

Calculons l'intégrale $\int_C z^2 dz$, *où* C *est la courbe formée du segment*

$[-1, 1]$ *et du demi-cercle unité supérieur.*

On a $C = C_1 \cup C_2 = \{\gamma_1(t) = t,\ t \in [-1, 1]\} \cup \{\gamma_2(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi\}$, *donc*

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1}^1 t^2 dt + \int_0^\pi e^{2it} ie^{it} dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}e^{3it}\right]_0^\pi = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2) = 0.$$

IV-2-4 Longueur d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1. La longueur L_C de la courbe C est définie par

$$L_C = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Calculons la longueur du cercle $C = \{\gamma(t) = re^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$, $r > 0$.

On a $\gamma'(t) = ire^{it}$, donc $|\gamma'(t)| = |re^{it}| = r$. D'où $L_C = \int_0^{2\pi} r dt = [rt]_0^{2\pi} = 2\pi r$.

IV-2-5 Préposition

Soit f une fonction complexe continue définie sur un domaine D du plan $\mathbb{C}$, et soit $C = \{\gamma(t),\ t \in [a,b]\}$ une courbe. Supposons que

$$\exists M > 0 : |f(\gamma(t))| \leq M,\ \forall t \in [a,b],$$

alors

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq M L_C.$$

Preuve. Par définition on a

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\, \gamma'(t)|\, dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = M L_C.$$

IV-3 THÉORÈME DE CAUCHY ET SES CONSÉQUENCES

IV-3-1 Domaines simplement connexes et multiplement connexes

Un domaine D du plan complexe est dit simplement connexe si toute courbe fermée simple de D peut être réduite par déformation continue à un point sans quitter D. Dans le cas contraire D est dit multiplement connexe.

Intuitivement, un domaine simplement connexe est sans trous.

IV-3-1 Théorème de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine non vide $D \subset \mathbb{C}$ et

C une courbe fermée contenue ainsi que son intérieur dans D. Alors

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Exemple

1) On a vu que $\oint_C z^2 dz = 0$, où C est la courbe fermée, formée du segment

$[-1,1]$ et du demi-cercle unité supérieur,

2) Calculons $\oint_C z dz$, où $C = \{\gamma(t) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$. On a

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it}\left(2ie^{it}\right) dt = \int_0^{2\pi} 4ie^{i2t} dt = \left[2e^{i2t}\right]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0.$$

Le théorème de Cauchy admet une réciproque.

Théorème

Soit f une fonction continue dans un domaine simplement connexe D. Supposons que $\oint_C f(z)\,dz = 0$ pour toute courbe fermée et simple C dans D. Alors f est holomorphe dans D.

IV-3-2 Quelques conséquences du théorème de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D. Comme conséquences du théorème de Cauchy, nous avons les résultats suivants.

Si z_0 et z_1 sont deux points quelconques de D, alors $\int_C f(z)\,dz$ est indépendant du chemin C joignant z_0 à z_1. On la note alors $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$.

En particulier la fonction $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw,\ z \in D$, est holomorphe dans D, et $F'(z) = f(z)$.

IV-4 PRIMITIVES OU INTÉGRALES INDÉFINIES

Soit f et F deux fonctions holomorphes dans un domaine connexe D

telles que $F'(z) = f(z)$. Alors F est appelée intégrale indéfinie ou primitive de f, et on note

$$F(z) = \int f(z)\, dz.$$

Remarque : Comme la dérivée d'une constante est nulle, alors deux primitives d'une même fonction se diffèrent d'une constante. Pour cela souvent on ajoute une constante à l'une des primitives.

Exemple

La fonction $z \to 3z^2 - 4\sin z$ est une primitive de $z \to 6z - 4\cos z$, donc

$$\int (6z - 4\cos z)\, dz = 3z^2 - 4\sin z + c, \;\; c \in \mathbb{C}.$$

IV-4-1 Intégrales des Fonctions Elémentaires

Nous donnons les primitives de quelques fonctions usuelles, on a omis ici la constante.

1) $\int z^\alpha dz = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \;\; \alpha \neq -1,$

2) $\int \frac{1}{z} dz = \log z,$

3) $\int e^z dz = e^z,$

4) $\int \sin z = -\cos z,$

5) $\int \cos z = \sin z,$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 z} dz = \tan z,$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 z} dz = -\cot z,$

8) $\int \tan z dz = -\log \cos z,$

9) $\int \cot z dz = \log \sin z.$

Exemple : Calculons l'intégrale $\int_0^{1+i} zdz$, suivant les deux chemins $C_1 = [0, 1+i]$ et $C_2 = \{\gamma_2(t) = t + it^2,\ 0 \le t \le 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \int_{C_1} zdz &= \int_0^1 (1+i)\, t\, (1+i)\, dt = \left[(1+i)^2 \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{(1+i)^2}{2} = i, \\ \int_{C_2} zdz &= \int_0^1 \left(t + it^2\right)(1 + i2t)\, dt = \left[\frac{1}{2}\left(t + it^2\right)^2\right]_0^1 = \frac{(1+i)^2}{2} = i \end{aligned}$$

Théorème

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées et simples C et C_1 et sur ces courbes. Alors

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz,$$

Exemple : Calculons $\oint_C \frac{1}{z^2} dz$, où C est l'ellipse paramétrée par le chemin

$$\gamma(t) = 3\cos t + 2i \sin t,\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Considérons le cercle unité $C_1 = \{e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$. Puisque la fonction $\frac{1}{z^2}$ est holomorphe dans le domaine limité par les courbes C et C_1 et sur ces courbes, alors

$$\oint_C \frac{1}{z^2} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i2t}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} ie^{-it} dt = \left[-e^{-it}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Théorème

Le théorème précédent peut être étendu à un domaine connexe limité par une courbe fermée simple C et un nombre fini de courbes fermées simples $C_1, \ldots C_n$ intérieures à C, dans ce cas on a

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz$$

IV-5 INTÉGRALES DE CAUCHY ET CONSÉQUENCES

IV-5-1 Formules Intégrales de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, et soit a un point intérieur à C, alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

De même la dérivée $n-$ième de f en $z = a$, est donnée par

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \; n = 1, 2, ...$$

Remarque : la première formule est un cas particulier de la deuxième.

Exemple : Utilisons la formule de Cauchy pour calculer $\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz$ et $\oint_C \frac{1}{(z-2)^3(z+1)} dz$, où $C = \{2 + e^{it}; t \in [0, 2\pi]\}$.

La fonction $f(z) = \frac{1}{z+1}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C, d'après les formules on a

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)} dz &= \oint_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = \frac{2\pi}{3} i, \\ \oint_C \frac{1}{(z-2)^3(z+1)} dz &= \oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) \end{aligned}$$

Or $f'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2}$ et $f''(z) = \frac{2}{(z+1)^3}$, d'où

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)^3(z+1)} dz = \frac{2\pi}{27} i.$$

Exercices

Exercice1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_C z dz$, *où* C *est un segement* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{C}$.

2. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, *où* C *est le cercle unité parcouru dans le sens positif.*

3. $\int_C z^2 dz$, *où* C *est la partie de la parabole d'équation* $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Solution de l'Exercice1

1. le segment $[a, b]$, est paramétré par le chemin

$$\gamma(t) = (1-t)\,a + tb,\ \ t \in [0,1]\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_C z dz &= \int_0^1 \gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 ((1-t)\,a + tb)\,(b-a)\,dt \\
&= (b-a)\int_0^1 (a + (b-a)\,t)\,dt = (b-a)\left[at + (b-a)\,\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= (b-a)\left(a + \frac{1}{2}(b-a)\right) = (b-a)\,\frac{(b+a)}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)
\end{aligned}$$

2. Le cercle unité parcouru dans le sens positif est paramétré par

$$\gamma(t) = e^{it},\ \ -\pi \le t \le \pi,$$

donc

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t\left(ie^{it}\right)dt = i\int_{-\pi}^{+\pi} \cos t\,(\cos t + i\sin t)\,dt = i\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 t dt,$$

car la fonction $\cos t \sin t$ est impaire, et donc son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ vaut 0.

Or $\cos^2 t = \frac{\cos 2t+1}{2}$, d'où

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (\cos 2t + 1)\,dt = \left[\frac{i}{2}\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = i\pi$$

3. La partie de la parabole est paramétrée par

$$\gamma(t) = t + it^2,\ \ 0 \le t \le 1,$$

donc

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 \left(t + it^2\right)^2 (1 + i2t)\,dt = \left[\frac{1}{3}\left(t + it^2\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

Exercice2

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue réelle telle que* $|f(z)| \leq 1$ *et soit* C

le cercle unité parcouru dans le sens positif. Montrer que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq 4.$$

Solution de l'Exercice2

$$\int_C f(z)\, dz = \left| \int_C f(z)\, dz \right| e^{i\gamma},$$

et choisissons la paramétrisation $z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ du cercle unité C, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)\, dz \right| &= \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) ie^{i(t-\gamma)} dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) ie^{i(t-\gamma)} dt \right) \\ &= \int_0^{2\pi} -f\left(e^{it}\right) \sin(t-\gamma)\, dt, \end{aligned}$$

car f est réelle, et comme $|f(z)| \leq 1$, alors

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{2\pi} |\sin(t-\gamma)|\, dt,$$

or $\sin x \geq 0$ pour $x \in [0, \pi]$, et $\sin x \leq 0$ pour $x \in [-\pi, 0]$. On distingue deux cas :

- <u>Si $\gamma \in [0, \pi]$</u> : dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin(t-\gamma)|\, dt &= -\int_0^{\gamma} \sin(t-\gamma)\, dt + \int_{\gamma}^{\gamma+\pi} \sin(t-\gamma)\, dt - \int_{\gamma+\pi}^{2\pi} \sin(t-\gamma)\, dt \\ &= [\cos(t-\gamma)]_0^{\gamma} - [\cos(t-\gamma)]_{\gamma}^{\gamma+\pi} + [\cos(t-\gamma)]_{\gamma+\pi}^{2\pi} \\ &= (1-\cos\gamma) - (-1-1) + (\cos\gamma + 1) = 4, \end{aligned}$$

et alors $\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq 4.$