Faculté des Sciences et de la Technologie, Filières :

- Génie civile et Hydraulique
- Mécanique

Série 3 Math 4

Fonctions Holomorphes

Exercice 1 : *Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes :*

1. $w = z^3$.
2. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
3. $w = \sin z$.

Exercice 2 : *Déterminer les conditions sur les constantes réelles* a, b, c *et* d *qui rendent la fonction*

$$f(z) = ax + by + i(cx + dy)$$

holomorphe.

Exercice 3 :

Soient $z = x + iy$ *et* V *la fonction définie par*

$V : (x, y) \to xy^2 - x^3/3$

1) *Montrer que* V *est harmonique. 2) Trouver une fonction* U *telle que la fonction complexe* $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ *soit holomorphe.*

Exercice4 :

1) *Montrer que les équations de Cauchy-Riemann s'écrivent en coordonnées polaires :*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

2) *Vérifier que la fonction définie pour* $\operatorname{Re} z > 0$ *par* $f(z) = \ln|z| + i\arg z$, *est holomorphe.*

Exercice5 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1) $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, 2) $f(z) = \cos^2(2z + 3i)$, 3) $f(z) = (z+i)^z$