Chapitre 1

Circuits électriques

1 Définition

Un circuit électrique est une association simple ou complexe de dipôles interconnectés, alimentée par un générateur (source). Le plus simple des circuits peut se représenter sous la forme d'un *générateur* d'énergie électrique alimentant des *récepteurs* chargés de transformer l'énergie électrique reçue en une autre forme exploitable, les dispositifs étant reliés par des *conducteurs* électriques. Fig.1.

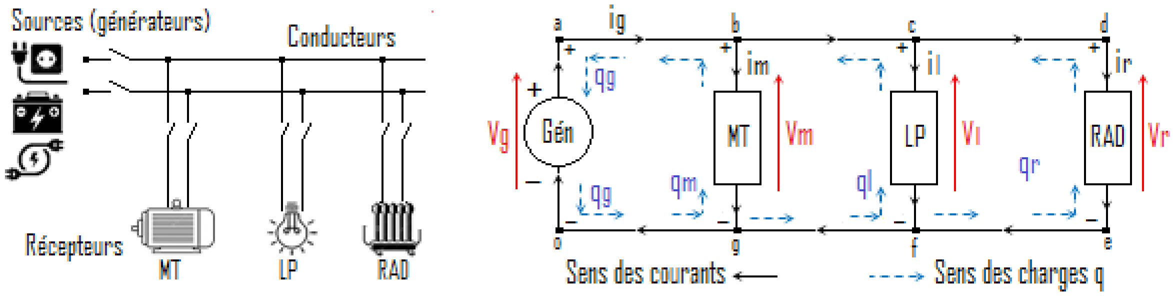


Figure 1 : Exemple d'installation électrique et circuit équivalent montrant les sens des flux de charges et des courants

2 Fonctionnement

Le fonctionnement d'un circuit est décrit par un transfert de charges *q* (électrons/ions, en Coulomb) entre le générateur et les récepteurs. Ce flux de charge résultant de l'action de la tension (v) du générateur, est modélisé par un courant électrique (i) traversant les conducteurs. Ce courant exprime à chaque instant le *débit* de charges à travers la section d'un conducteur électrique, soit :

$$i_g = \frac{dq_g}{dt} \approx \frac{\Delta q_g}{\Delta t}; \qquad i_m = \frac{dq_m}{dt} \approx \frac{\Delta q_m}{\Delta t}; \qquad i_l = \frac{dq_l}{dt} \approx \frac{\Delta q_l}{\Delta t}; \qquad i_r = \frac{dq_r}{dt} \approx \frac{\Delta q_r}{\Delta t}$$

- Les charges négatives *q* (électrons) circulent des potentiels bas aux potentiels hauts.
- Le courant, par convention, circule en inverse des charges négatives : des potentiels hauts aux potentiels bas.
- Les tensions sont des différences de potentiels : $V_g = v_a - v_0$; $V_m = v_b - v_g$; $V_r = v_d - v_e$ ....
- Les points (o, g, f, e) n'ont aucun dipôle entre eux, ils ont le même potentiel (équipotentiels), électriquement ils sont considérés comme un seul point, pris pour référence des potentiels : $v_0 = v_g = v_f = v_e = 0V$.
- Les points (a, b, c, d) sont aussi équipotentiels : $v_a = v_b = v_c = v_d$.
- Dans ce circuit toutes les tensions sont égales à la tension de la source (Vg)

$$\begin{cases} V_g = v_a - v_0 = v_a - 0 = v_a \\ V_m = v_b - v_g = v_b - 0 = v_b \\ V_l = v_c - v_f = v_c - 0 = v_c \\ V_r = v_d - v_e = v_d - 0 = v_d \end{cases} \quad \text{Avec : } (v_a = v_b = v_c = v_d) \Longrightarrow (V_g = V_m = V_l = V_r)$$

- Les tensions sont dirigées, en sens inverse des courants dans les dipôles récepteurs, et dans le même sens des courants dans les dipôles générateurs.

3 Régime de fonctionnement

Le régime d'un circuit dépend du type de son dipôle générateur d'énergie. On distingue alors :

- Générateurs à courants de formes quelconques → Circuits en régime quelconque (ou en régime transitoire) → Les tensions et courants (v , i) sont des fonctions quelconques du temps, Fig.2.a.

- Générateurs à courants continus → Circuits en régime continu → Les tensions et courants sont constants, indépendants du temps $(i = I \text{ et } v = U, \forall t)$, Fig.2.b.
- Générateurs à courants sinusoïdaux → Circuits en régime sinusoïdal → Les tension et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps $\left(i = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ et } v = \hat{V} \cdot \sin(\omega t + \varphi)\ , \forall t\right)$, Fig.2.c.

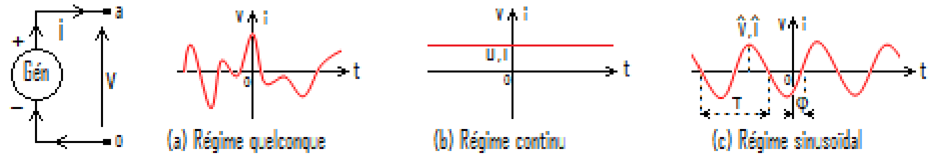


Figure 2 : Régimes de fonctionnement d'un circuit électrique(ou d'un générateur)

4 Dipôles électriques élémentaires

Tout dispositif électrique qui possède deux bornes est un dipôle électrique. Les générateurs d'énergie sont dits *dipôles actifs*, les récepteurs qui ne font que consommer de l'énergie sont des *dipôles passifs*. On ne s'intéresse dans la suite que des dipôles linéaires (leurs tensions varient linéairement avec leurs courants).

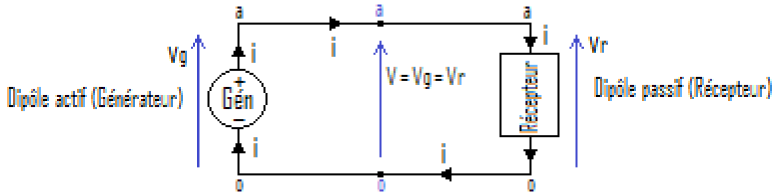


Figure 3 : Circuit électrique formé par un dipôle actif alimentant un dipôle passif

- Le même courant (i) circule de la borne (+) du générateur, en passant par le récepteur, puis retourne vers le générateur à travers sa borne (-).
- Dans le dipôle actif (générateur), la flèche de la tension (Vg) est dirigée en même sens du courant (i).
- Dans le dipôle passif (récepteur), la flèche de la tension (Vr) est dirigée en sens inverse du courant (i).
- Dans ce circuit, les trois tensions sont égales : Vg = V =Vr.

4.1 Dipôles actifs linéaires

Ce sont les dipôles générateurs d'énergie « sources ». Leurs modèles les plus rencontrés sont les générateurs de tension et de courant « *sources de tension et sources de courant* », Fig.2. Les deux modèles sont équivalents et leur caractéristique s'exprime par des équations algébriques linéaires et simples.

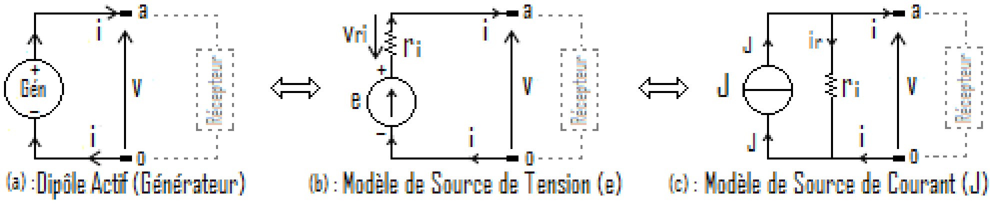


Figure 4 : Dipôles actifs (linéaires) et leurs modèles équivalents.

Dans ces deux modèles de dipôles actifs équivalents :

- « a et o » : sont les deux bornes du dipôle actif, générateur.
- $V=V_a-V_o$: est la tension aux bornes du générateur, en volt [V].
- i : est le courant fourni par le dipôle générateur au dipôle récepteur, en ampère [A].
- La tension et le courant du générateur ont le même sens.

- e : est la force électromotrice, **f.é.m**. du générateur : c'est la tension à vide du générateur, lorsqu'il n y a pas de récepteur (à courant nul, i = 0), généralement ($e \neq V$).
- J : est le courant de court-circuit du générateur (lorsque sa tension est nulle v =0).

- r_i : est la résistance (*ou impédance*) interne du dipôle générateur, mise en série avec la **f.é.m.** « e » dans la « source de tension », et en parallèle avec le courant « J » dans « la source de courant ».
- $V=e-r_i \times i$: est l'équation caractéristique de la source de tension. Si la résistance interne est nulle, la source de tension est dite idéale ($V=e$, $\forall i$), Fig.3.a.
- $i=J-V/r_i$: est l'équation caractéristique de la source de courant. Si la résistance interne est infinie, la source de courant est dite idéale : ($i=J$, $\forall V$), Fig.3.b.
- $e=J \times r_i \Leftrightarrow J=e/r_i$: est l'équation d'équivalence qui permet de passer d'une source à une autre.

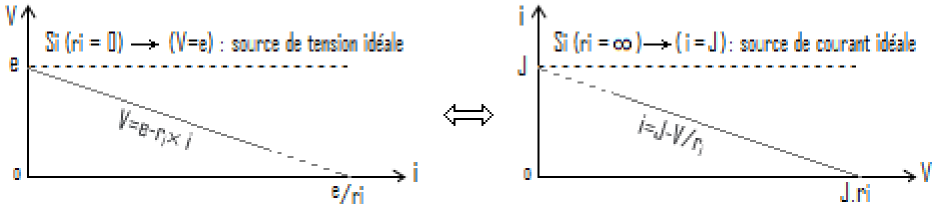


Figure 5 : Caractéristiques « tension-courant » des dipôles actifs linéaires

4.2 Dipôles passifs élémentaires

Trois dipôles passifs et élémentaires sont couramment utilisés dans les circuits électriques : élément résistif de résistance R, bobine d'inductance L et condensateurs de capacité C, Fig.6

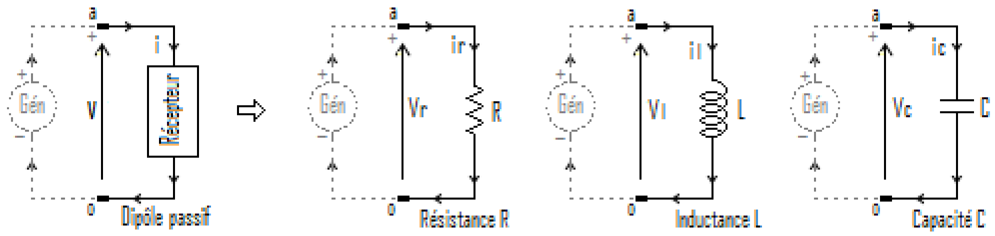


Figure 6 : Modèles des dipôles passifs élémentaires en régime quelconque

Leurs fonctionnements s'expriment, en tout régime, sous forme d'équations différentielles simples, linéaires et à coefficients constants, Tableau.1.

Tableau 1 : Lois fondamentales des dipôles passifs élémentaires (régime quelconque : en tous régimes)

Résistance R en Ω (Ohm)	Inductance L en H (Henry)	Capacité C en F (Farad)
$V_r = R \cdot i_r$ (loi d'Ohm) $i_r = V_r/i_r$ (loi d'Ohm) $P_r = V_r \cdot i_r = R \cdot i_r^2$ (Puissance en Watt) $dW_r = P_r \cdot dt$ (Energie en Joule)	$V_l = L \cdot \frac{di_l}{dt}$ $i_l = \frac{1}{L}\int V_l \cdot dt$ $P_l = V_l \cdot i_l$ (Puissance en W) $dW_l = P_l \cdot dt$ (Energie en J)	$V_c = \frac{1}{C}\int i_c \cdot dt$ $i_c = C \cdot \frac{dV_c}{dt}$ $P_c = V_c \cdot i_c$ (Puissance en W) $dW_c = P_c \cdot dt$ (Energie en J)

4.2.1 Dipôles élémentaires en régimes continus

En régimes continus, les tensions et courants sont constants, leurs variations temporelles sont alors nulles $\left(\frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} = 0\right)$, d'où les lois précédentes se transforment comme celles dans le tableau suivant.

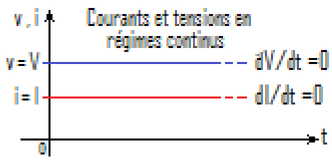


Tableau 2 : Lois des dipôles passifs élémentaires en régime continu

Résistance R en (Ω)	Inductance L en (H)	Capacité C en (F)
$V_r = R \cdot I_r$ (loi d'Ohm) $I_r = V_r/R$ (loi d'Ohm) $P_r = V_r \cdot I_r = R \cdot I_r^2$ (W) $W_r = P_r \cdot t = R \cdot I_r^2 \cdot t$ (J)	$V_l = L \cdot \frac{dI_l}{dt} = \mathbf{0}$ (court-circuit) $I_l = \frac{1}{L}\int V_l \cdot dt = I_l$ $P_l = V_l \cdot I_l = 0$, Puissance nulle $W_l = P_l \cdot t = 0$, Energie nulle	$V_c = \frac{1}{C}\int I_c \cdot dt = V_c$ $I_c = C \cdot \frac{dV_c}{dt} = \mathbf{0}$ (circuit ouvert) $P_c = V_c \cdot I_c = 0$, Puissance nulle $W_c = P_c \cdot t = 0$, Energie nulle

Ces lois permettent de conclure qu'en régimes continus, seules les résistances gardent leurs modèles et leurs lois d'Ohm, Fig.7a.

- Les inductances deviennent de simples traits de court-circuit, car leurs tensions s'annulent, Fig.7.b.
- Les capacités se retirent totalement du circuit, car leurs courants s'annulent, Fig.7.c.

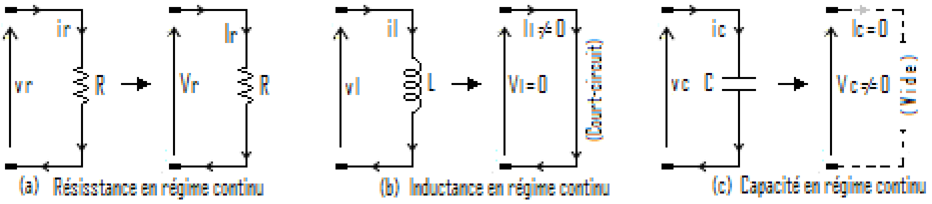
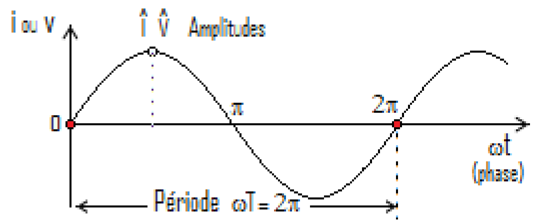


Figure 7 : Dipôles passifs élémentaires en régime continu : seule la résistance garde son effet

4.2.2 Dipôles élémentaires en régimes sinusoïdaux (notion d'impédance)

En régime sinusoïdal dit aussi harmonique, les tensions et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps, par exemple : $\left(i = \hat{I} \cdot \sin \omega t = \mathbf{I}\sqrt{2} \cdot \sin \omega t\right)$ et $\left(v = \hat{V} \cdot \sin \omega t = \mathbf{V}\sqrt{2} \cdot \sin \omega t\right)$, où :

- $(\hat{I}$ et $\hat{V})$ amplitudes et, ($\mathbf{I}$ et $\mathbf{V}$) valeurs efficaces
- ωt : l'angle de phase en (rad)
- $\omega = 2\pi f$, la pulsation en (rad/sec)
- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ est la période en (sec)
- $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence en (Hz)



La forme complexe des grandeurs sinusoïdales permet de simplifier les quantités temporelles $\left(\frac{di}{dt}, \frac{dv}{dt}, \int idt, \int vdt\right)$ dans les lois fondamentales

$$\begin{cases} \underline{v} = \mathbf{V}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = j\omega \mathbf{V}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \int \underline{v}dt = \frac{1}{j\omega}\mathbf{V}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{i} = \mathbf{I}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \mathbf{I}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \int \underline{i}dt = \frac{1}{j\omega}\mathbf{I}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$$

En utilisant ces expressions dans les 1ères lois fondamentales (Tab.1), nous obtenons :

- Pour la résistance : $\underline{v}_r = R \cdot \underline{i}_r \Rightarrow \mathbf{V_r} \cancel{\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}} = R \cdot \mathbf{I_r} \cancel{\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}} \Rightarrow \mathbf{V_r} = R \cdot \mathbf{I_r} = \mathbf{Z_r} \cdot \mathbf{I_r}$
- Pour l'inductance : $\underline{v}_l = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} \Rightarrow \mathbf{V_l} \cancel{\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}} = L \cdot j\omega \cdot \mathbf{I_l} \cancel{\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}} \Rightarrow \mathbf{V_l} = jL\omega \cdot \mathbf{I_l} = \mathbf{Z_l} \cdot \mathbf{I_l}$
- Pour la capacité : $\underline{v}_c = \frac{1}{C} \cdot \int \underline{i}dt \Rightarrow \mathbf{V_c} \cancel{\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \mathbf{I_c} \cancel{\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}} \Rightarrow \mathbf{V_c} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathbf{I_c} = \mathbf{Z_c} \cdot \mathbf{I_c}$

On constate qu'en régime harmonique tous les dipôles élémentaires sont régis par la *loi d'Ohm en complexe*. La tension et le courant efficaces du dipôle sont liés par *l'impédance* du dipôle $\left(\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}\right)$. Cette impédance est souvent de nature complexe (module∠argument, ou, parties réelle et imaginaire).

Tableau 3 : Lois d'Ohm et impédances complexes des dipôles élémentaires en régime harmonique.

Elément de résistance R en Ω	Bobine d'inductance L en H	Condensateur de capacité C en F
$\mathbf{V_r} = R \cdot \mathbf{I_r} = \mathbf{Z_r} \cdot \mathbf{I_r}$ (loi d'Ohm) $\mathbf{Z_r} = \frac{\mathbf{V_r}}{\mathbf{I_r}} = R + j0 = R$ (réelle) $\mathbf{Z_r} = R = Re^{j0} = R\angle 0$	$\mathbf{V_l} = j\omega L \cdot \mathbf{I_l} = \mathbf{Z_l} \cdot \mathbf{I_l}$ (loi d'Ohm) $\mathbf{Z_l} = \frac{\mathbf{V_l}}{\mathbf{I_l}} = 0 + jL\omega = jL\omega$ (imaginaire) $\mathbf{Z_l} = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega L \angle \frac{\pi}{2}$	$\mathbf{V_c} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathbf{I_c} = \mathbf{Z_c} \cdot \mathbf{I_c}$ (loi d'Ohm) $\mathbf{Z_c} = \frac{\mathbf{V_c}}{\mathbf{I_c}} = \frac{1}{j\omega C} = 0 - \frac{j}{\omega C}$ (imaginaire) $\mathbf{Z_c} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} \angle \frac{-\pi}{2}$
Z=R+jX : La partie réelle R est une résistance, la partie imaginaire X est une réactance : la résistance est toujours ≥ 0 Si X>0 ⟶ Réactance inductive (X=wL), si X<0 ⟶ Réactance capacitive (X=1/wC)		

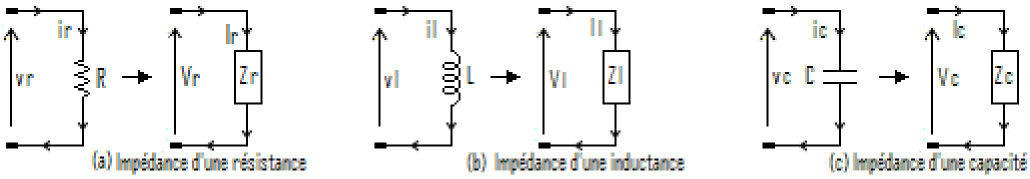


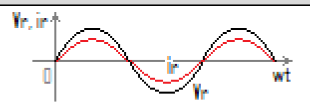
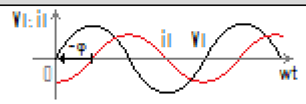
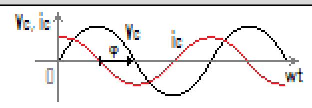
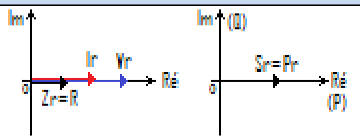
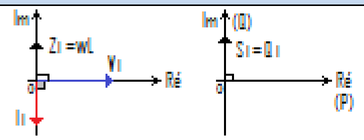
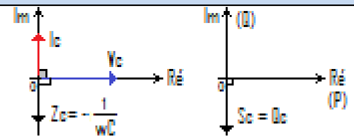
Figure 8 : Dipôles élémentaire en régime sinusoïdal : représentation par impédances

En régime sinusoïdal, les grandeurs électriques efficaces (**V et I**), les impédances des dipôles (**Z**), et les lois correspondantes sont souvent complexes et peuvent être représentées dans un plan complexe. On définit, en régime harmonique, la puissance complexe en voltampère [VA] d'un dipôle, par :

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \cdot \mathrm{I}^2 = \mathrm{P} + j\mathrm{Q} \qquad [\mathrm{VA}]$$

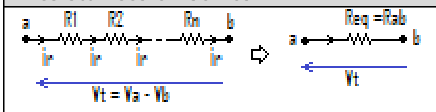
- **V** et **I** sont les valeurs efficaces généralement complexes, $\mathbf{I}^*$ est le conjugué du courant **I**.
- P (W) : puissance active utile qui se transforme en travail, c'est la partie réelle de la puissance complexe **S**
- Q (VAR : voltampère réactive): puissance réactive, non utile, c'est la partie imaginaire de la puissance complexe **S**
- $\mathrm{S} = |\mathbf{S}| = \mathrm{V} \cdot \mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2}$ (VA) : la puissance apparente, c'est le module de la puissance complexe **S**.

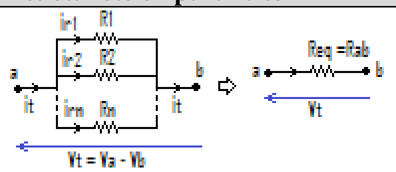
Tableau 4 : Grandeurs électriques des dipôles élémentaires en régime sinusoïdal. Représentations sinusoïdales et complexes.

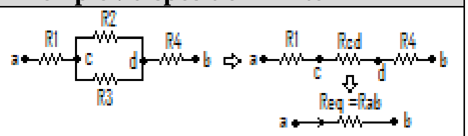
Lois d'Ohm d'une résistance R	Lois d'Ohm d'une inductance L	Lois d'Ohm d'une capacité C
$\mathbf{Z_r} = \mathrm{R} = \mathrm{R}e^{j0} = \mathrm{R}\angle 0$ $\mathbf{V_r} = \mathbf{Z_r} \cdot \mathbf{I_r} = (\mathrm{R} \cdot e^{j0}) \times \mathbf{I_r}$ $\mathbf{I_r} = \frac{\mathbf{V_r}}{\mathbf{Z_r}} = \frac{\mathbf{V_r}}{\mathbf{R}} \cdot e^{j0}$ **Ir** et **Vr** sont en phase $v_r = \sqrt{2} \cdot V_r \sin \omega t$ $i_r = \sqrt{2} \cdot I_r \sin(\omega t + 0)$	$\mathbf{Z_l} = jL\omega = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega L \angle \frac{\pi}{2}$ $\mathbf{V_l} = \mathbf{Z_l} \cdot \mathbf{I_l} = \left(\omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \times \mathbf{I_l}$ $\mathbf{I_l} = \frac{\mathbf{V_l}}{\mathbf{Z_l}} = \frac{\mathbf{V_l}}{\omega L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$ **Il** est en quadrature arrière de **Vl** $v_l = \sqrt{2} \cdot V_l \sin \omega t$ $i_l = \sqrt{2} \cdot I_l \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbf{Z_c} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} \angle \frac{-\pi}{2}$ $\mathbf{V_c} = \mathbf{Z_c} \cdot \mathbf{I_c} = \left(\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) \times \mathbf{I_c}$ $\mathbf{I_c} = \frac{\mathbf{V_c}}{\mathbf{Z_c}} = \omega C \mathbf{V_c} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ **Ic** est en quadrature avant de **Vc** $v_c = \sqrt{2} \cdot V_c \sin \omega t$ $i_c = \sqrt{2} \cdot I_c \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
Puissances dans une résistance R	**Puissances dans une inductance L**	**Puissances dans une capacité C**
$\mathbf{S_r} = \mathbf{V_r} \cdot \mathbf{I_r^*} = \mathbf{Z_r} \cdot I_r^2 = P_r + jQ_r$ (VA) $\mathbf{S_r} = \mathbf{Z_r} \cdot I_r^2 = R \cdot I_r^2 + j0$ (VA) $P_r = R \cdot I_r^2$ (W) $Q_r = 0$ (VAR)	$\mathbf{S_l} = \mathbf{V_l} \cdot \mathbf{I_i^*} = \mathbf{Z_i} \cdot I_l^2 = P_l + jQ_l$ (VA) $\mathbf{S_l} = \mathbf{Z_i} \cdot I_l^2 = 0 + j\omega L \cdot I_l^2$ (VA) $P_l = 0$ (W) $Q_l = \omega L \cdot I_L^2$ (VAR)	$\mathbf{S_c} = \mathbf{V_c} \cdot \mathbf{I_c^*} = \mathbf{Z_c} \cdot I_c^2 = P_c + jQ_c$ (VA) $\mathbf{S_c} = \mathbf{Z_c} \cdot I_c^2 = 0 - j\frac{1}{\omega C} \cdot I_c^2$ (VA) $P_c = 0$ (W) $Q_c = -\frac{1}{\omega C} \cdot I_c^2$ (VAR)
Représentation sinusoïdale de Vr et ir	**Représentation sinusoïdale de Vl et il**	**Représentation sinusoïdale de Vc et ic**
 ir et Vr sont en phase φ =0°	 il est en retard de Vl par (φ =π/2)	 ic est en avance de Vc par (φ =π/2)
Représentations complexes Vr, ir, Zr, Sr	**Représentations complexes Vl, il, Zl, Sl**	**Représentations complexes Vc, ic Zc, Sc**
 Courant et tension en phase Puissance complexe réelle pure (active) Puissance active Pr =Sr (non nulle) Puissance réactive Qr =0 (nulle)	 Courant en quadrature arrière de la tension Puissance complexe imaginaire pure (réactive) Puissance active Pl =0 (nulle) Puissance réactive Ql =Sl (positive, non nulle)	 Courant en quadrature avant de la tension Puissance complexe imaginaire pure (réactive) Puissance active Pc=0 (nulle) Puissance réactive Qc =Sc (négative, non nulle)

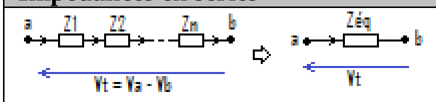
5 Association des dipôles (dipôles composés)

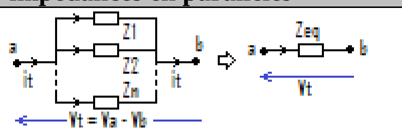
Il s'agit des de dipôles composés de dipôles élémentaires. Les configurations fondamentales sont: en séries, en parallèles et mixtes.

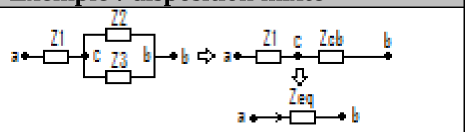
<table>
<tr><th>Résistances en séries</th><th>Résistances en parallèles</th><th>Exemple : disposition mixte</th></tr>
<tr>
<td>

$R_{eq} = R_{ab} = \sum R$
$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots R_n$</td>
<td>

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{ab}} = \sum \frac{1}{R}$
$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}$</td>
<td>

R2 et R3 sont en parallèles (R2//R3), d'où :
$\frac{1}{R_{cd}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Leftrightarrow R_{cd} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3}$
R1 et Rcd et R4 sont en séries (R1 + Rcd + R4), d'où
$R_{eq} = R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2+R_3} + R_4$</td>
</tr>
<tr><th>Impédances en séries</th><th>impédances en parallèles</th><th>Exemple : disposition mixte</th></tr>
<tr>
<td>

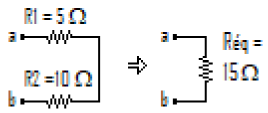
$Z_{eq} = Z_{ab} = \sum Z$
$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots Z_n$</td>
<td>

$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_{ab}} = \sum \frac{1}{Z}$
$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots \frac{1}{Z_n}$</td>
<td>

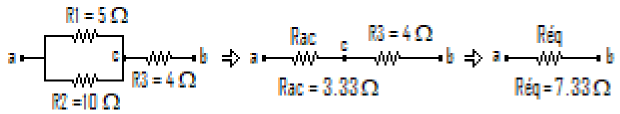
Z2 et Z3 sont en parallèles (Z2//Z3), d'où :
$\frac{1}{Z_{cb}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \Leftrightarrow Z_{cb} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2+Z_3}$
Z1 et Zcb sont en séries (Z1 + Zcb), d'où
$Z_{eq} = Z_{ab} = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2+Z_3}$</td>
</tr>
</table>

Exemples d'applications

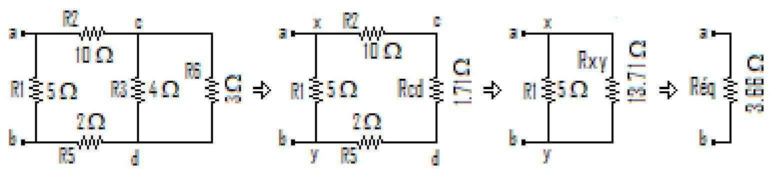
1) Trouver le dipôle équivalent entre les deux bornes (a,b) des circuits suivants.



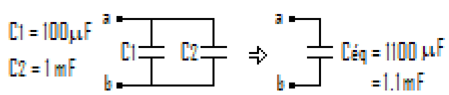
•(R1 et R2) sont en séries, leur résistance équivalente est alors : Réq=Rab =R1+R2 = 5 +10 =15Ω



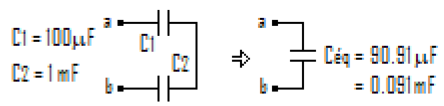
•(R1 et R2) sont en parallèles, leur résistance équivalente est alors Rac= (R1×R2)/ (R1+R2) = (5×10)/ (5+10) = 50/15 = 3.33Ω.
(Rac et R3) sont en séries, leur résistance équivalente finale est Réq =Rab =Rac+R3 = 3.33 + 4 = 7.33Ω.



•(R3 et R6) sont en parallèles ⟶ leur équivalente $R_{cd} = (R_3 \times R_6)/(R_3+R_6) = (4\times3)/(4+3) = 12/7 = 1.71\ \Omega$
(R2 et Rcd et R5) sont en séries ⟶ leur équivalente Rxy = (R2+Rcd+R5) = (10+1.71+2) = 13.71 Ω
(R1 et Rxy) sont en parallèles ⟶ leur équivalente finale Réq = Rab = (R1×Rxy)/ (R1+Rxy) = (5×13.71)/(5+13.71) = 3.66 Ω



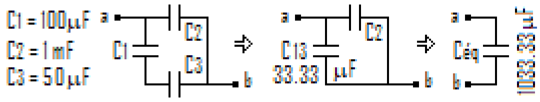
•(C1 et C2) sont en parallèles ⟶ leurs impédances $\left(Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}, Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}\right)$ sont alors en parallèles ⟶ leur impédance équivalente est : $Z_{éq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{j\omega(C_1+C_2)} = \frac{1}{j\omega C_{éq}} \Longrightarrow C_{éq} = C_1 + C_2 = 100 + 1000 = 1100\ \mu F$



•(C1 et C2) sont en séries ⟶ leur impédance équivalente est $Z_{éq} = Z_1 + Z_2 = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1}{j\omega C_{éq}} \Longrightarrow \frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Longrightarrow C_{éq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1+C_2} = \frac{100\times1000}{100+1000} \approx 90.91\mu F$

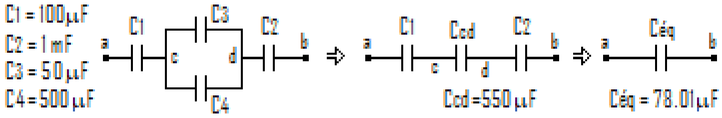
(**NB** : capacités en séries ⟶ $\frac{1}{C_{éq}} = \sum \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$; capacités en parallèles ⟶ $C_{éq} = \sum C_i = C_1 + C_2 + \cdots$)

•(C1 et C3) sont en séries → leur capacité équivalente C13 est telle que : $\frac{1}{C_{13}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_{13} = \frac{C_1 \cdot C_3}{C_1 + C_3} = \frac{100 \times 50}{100+50} = 33.33\mu F$

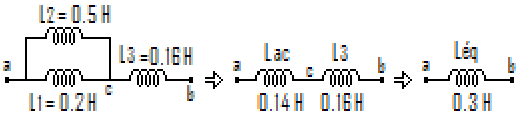


(C13 et C2) sont en parallèles → leur capacité équivalente finale est : $C_{éq} = C_{13} + C_2 = 33.33\mu F + 1000\mu F = 1033.33\ \mu F$

•(C3 et C4) en parallèles → leur capacité équivalente Ccd = C3+C4=50+500=550µF. Ensuite, les capacités »(C1, Ccd et C2) sont en série → leur capacité équivalente est telle que : $\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{cd}} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{éq} = \frac{C_1 \cdot C_{cd} \cdot C_2}{C_1 \cdot C_{cd} + C_1 \cdot C_2 + C_{cd} \cdot C_2} = \frac{100 \times 550 \times 1000}{100 \times 550 + 100 \times 1000 + 550 \times 1000} = 78\ \mu F$



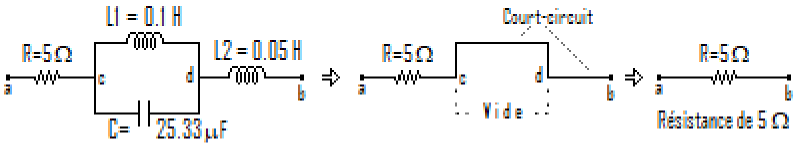
•(L1 et L2) en parallèles, leurs impédances ($Z_1 = j\omega L_1$, et $Z_2 = j\omega L_2$) sont en parallèles → leur impédance équivalente est: $Z_{ac} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega L_1 \cdot j\omega L_2}{j\omega L_1 + j\omega L_2} = \frac{j\omega\, L_1 L_2}{L_1 + L_2} = j\omega L_{ac} \Rightarrow L_{ac} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{0.2 \times 0.5}{0.2+0.5} = 0.14\ H$



» (Lac et L3) sont en série → leur équivalente est $Z_{éq} = Z_{ab} = Z_{ac} + Z_3 = j\omega L_{ac} + j\omega L_3 = j\omega(L_{ac} + L_3) = j\omega L_{éq} \Rightarrow L_{éq} = L_{ac} + L_3 = 0.14 + 0.16 = 0.3H.$ (**Remarquer** : Inductances en séries → $L_{éq} = \sum L_i = L_1 + L_2 + \cdots$; Inductances en parallèles → $\frac{1}{L_{éq}} = \sum \frac{1}{L_i} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots$).

2) Dans les deux régimes, continu et sinusoïdal (f=50 Hz), trouver, la valeur et la nature du dipôle équivalent entre les deux bornes (a,b) des circuits suivants.

•En régime continu, seules les résistances gardent leurs effets, les inductances et les capacités perdent leurs effets et deviennent, respectivement, des traits de court-circuit et des vides de circuits ouverts. **D'où le dipôle équivalent à ce circuit en régime continu est une résistance de 5Ω.**



•En régime sinusoïdal, les impédances de dipôles sont utilisées. La fréquence f=50 Hz → donne une pulsation de : w=2π.f =2×3.1416×50=314.16 rad/sec.

»L1 → son impédance $Z_1 = j\omega L_1 = j\ 314.16 \times 0.1 = j\ 31.416\Omega$;

»C → son impédance $Z_c = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\ \frac{10^6}{314.16 \times 25.33} = -j\ 125.665\Omega$

»(Z1 et Zc) en parallèles→ leur équivalente $Z_{cd} = \frac{Z_1 \cdot Z_c}{Z_1 + Z_c} = \frac{3\ 947{,}89164}{-j94.25} \approx j41.89\ \ \Omega$

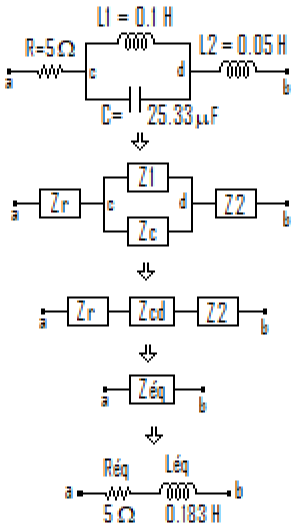
»(Z1, Zcd et Z2) en séries→ leur équivalente $Z_{éq} = Z_r + Z_{cd} + Z_2 = R + Z_{cd} + j\omega L_2 =$

$Z_{éq} = 5 + j41.89 + j314.16 \times 0.05 = (5 + j57.6)\Omega = R_{éq} + jX_{éq} \Rightarrow$

Sa partie réelle (Réq =5 Ω) est une résistance équivalente

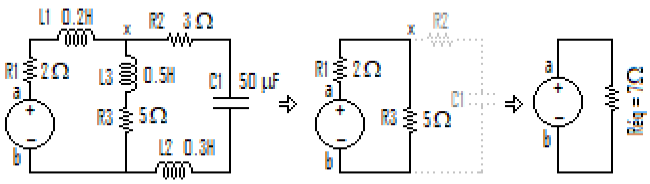
Sa partie imaginaire (Xéq =57.6Ω > 0) est une réactance inductive (impédance d'une inductance)

$$\begin{cases} R_{éq} = 5\ \Omega \\ X_{éq} = +57.6\ \Omega = \omega L_{éq} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{éq} = 5\ \Omega \\ L_{éq} = \frac{X_{éq}}{\omega} = \frac{57.6}{314.16} = 0.183\ H \end{cases}$$

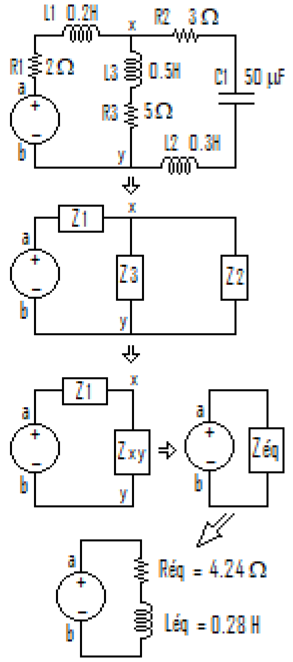


D'où le dipôle équivalent à ce circuit en régime harmonique est une impédance de (5+j57.6)Ω constituée d'une résistance de 5Ω en série avec une inductance de 0.183 H.

•En régime continu, la capacité C1 est ouverte→ aucun courant ne circule dans (R2, C1 et L2) → la branche (R2, C2 et L2) est supprimée du circuit. → les inductances (L1 et L3) se court-circuitent→ Ils ne restent que les résistances (R1 et R3) en séries → Réq =R1+R3+2+5=7 Ω, → **D'où le dipôle équivalent à ce circuit en régime continu est une résistance de 7Ω**



•En régime sinusoïdal, (w= 314.16 rad/s), les impédances de dipôles sont utilisées.



» (R1 et L1) sont en séries → leur impédance équivalente est $Z_1 = Z_{R1} + Z_{L1} = R_1 + j\omega L_1 \Rightarrow$
$Z_1 = 2 + j314.16 \times 0.2 = (2 + j62.83)\ \Omega$ (forme cartésienne, en réel/imaginaire), Ou bien
$Z_1 = \|Z_1\|\angle\theta_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}\angle \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L_1}{R_1}\right) = \sqrt{2^2 + 62.83^2}\angle \operatorname{atan}\left(\frac{62.83}{2}\right) =$
$62.86\ \angle 88.18°\ \Omega$ (forme polaire, en module/argument)

» (R2, C1 et L2) sont en séries → leur impédance équivalente est $Z_2 = Z_{R2} + Z_{C1} + Z_{L2}$
$Z_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C_1} + j\omega L_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = 3 + j\left(314.16 \times 0.3 - \frac{1}{314.16\times 50\times 10^{-6}}\right)$
$Z_2 \approx (3 + j30.6)\Omega = 30.74\ \angle 84.4°\ \Omega$

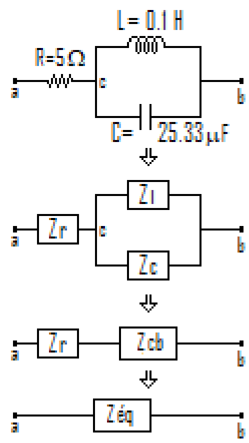
» (L3 et R3) sont en séries → leur impédance équivalente est $Z_3 = Z_{R3} + Z_{L3} = R_3 + j\omega L_3$
$Z_3 = 5 + j314.16 \times 0.5 = (5 + j157.1)\ \Omega = 157.16\angle 88.17°\ \Omega$

» (Z2 et Z3) sont en parallèles → leur impédance équivalente est : $Z_{xy} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$
$(Z_2 + Z_3) = (3 + j30.6) + (5 + j157.1) = (8 + j187.7) = 187.87\angle 87.56°\ \Omega$
$Z_{xy} = \frac{Z_2\cdot Z_3}{Z_2+Z_3} = \frac{30.74\ \angle 84.4°\ \times 157.16\angle 88.17°}{187.87\angle 87.56°} = 25.7\ \angle 85°\ \Omega = (2.24 + j25.6\ )\ \Omega$

» (Z1 et Zxy) sont en séries → leur impédance équivalente est l'impédance finale recherchée : Zéq
$Z_{éq} = Z_1 + Z_{xy} = 2 + j62.83 + 2.24 + j25.6 = (4.24 + j88.43)\ \Omega = 88.53\angle 87.25°\ \Omega$.

$Z_{éq} = (4.24 + j88.43)\ \Omega = R_{éq} + j\omega L_{éq} \Rightarrow \begin{cases} R_{éq} = 4.24\ \Omega \\ L_{éq} = \frac{88.43}{314.16} = 0.28\ \mathrm{H} \end{cases}$ **D'où le dipôle équivalent à ce circuit en régime sinusoïdal est une impédance de (4.24+j88.43)Ω constituée d'une résistance de 4.24Ω en série avec une inductance de 0.28 H.**

3) trouver la valeur et nature du dipôle équivalent entre les deux bornes (a,b) pour trois régimes sinusoïdaux, de fréquences respectivement, (f1=50Hz, f2 =100 Hz et f3=200Hz). Conclure.



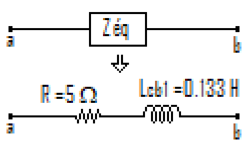
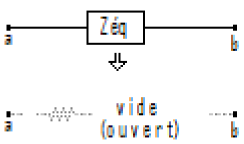
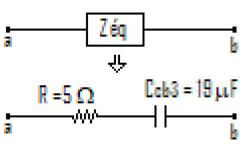
•Trois fréquences → trois pulsations (w=2πf) $\rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \times 50 = 314.16\ \mathrm{rad/sec} \\ \omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi \times 100 = 628.32\ \mathrm{rad/sec} \\ \omega_3 = 2\pi f_3 = 2\pi \times 200 = 1256.64\ \mathrm{rad/sec} \end{cases}$

» (L et C) en parallèles → (Zl et Zc) en parallèles →leurs équivalente est: $Z_{cb} = \frac{Z_l \cdot Z_c}{Z_l + Z_c} = \frac{j\omega L \times \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$,

après simplifications on obtient : $Z_{cb} = j \cdot \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$ → la nature de cette impédance dépend du signe du dénominateur $(1 - \omega^2 LC)$ qui peut varier en fonction de la pulsation $(\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

$\begin{cases} \text{Si: } (1 - \omega^2 LC) = 0 \Rightarrow Z_{cb} \rightarrow \infty \text{ (c'est un vide ou circuit ouvert)} \\ \text{Si: } (1 - \omega^2 LC) > 0 \Rightarrow Z_{cb} \rightarrow j\omega L_{cb} \quad \text{(c'est une inductance)} \\ \text{Si: } (1 - \omega^2 LC) < 0 \Rightarrow Z_{cb} \rightarrow -\frac{1}{\omega C_{cb}} \quad \text{(c'est une capacité)} \end{cases}$

» (Zr et Zcb) en séries → leurs équivalente est $Z_{éq} = Z_r + Z_{cb} = R + Z_{cb}$

1ère régime ($\omega = \omega_1 = 314.16$ rad/s	2ième régime ($\omega = \omega_2 = 628.32$ rad/s	3ième régime ($\omega = \omega_3 = 1256.64$ rd/s
$Z_{cb1} = j \cdot \frac{\omega_1 L}{1-\omega_1^2 LC} = j\ 41.89\Omega\ > \mathbf{0}$ $Z_{cb1} = j\omega_1 L_{cb1} \leftrightarrow L_{cb1} = 0.133\ \mathrm{H}$ $Z_{éq} = R + Z_{cb1} = R + j\omega_1 L_{cb1}$ **Résistance et inductance en séries**	$Z_{cb2} = j \cdot \frac{\omega_2 L}{1-\omega_2^2 LC} = \frac{62.8}{0.000007} \approx \infty$ Vide ou Circuit ouvert (Résonnance parallèle) $Z_{éq} = R + Z_{cb2} = 5 + \infty \approx \infty$ **Circuit ouvert (ou vide)**	$Z_{cb3} = j \cdot \frac{\omega_3 L}{1-\omega_3^2 LC} = -j\ 41.89\Omega\ < \mathbf{0}$ $Z_{cb3} = \frac{1}{j\omega_3 C_{cb3}} \leftrightarrow C_{cb3} = 19\ \mu\mathrm{F}$ $Z_{éq} = R + Z_{cb3} = R - j\frac{1}{\omega_3 C_{cb3}}$ **Résistance et capacité en séries**
		

Un circuit LC parallèle change sa nature en fonction de la fréquence, il peut même devenir ouvert (filtre) face à certaines fréquences.

6 Réseaux électriques – lois, principes et théorèmes

Lois, théorèmes et principes qui permettent l'analyse de circuits et réseaux électriques, en régimes continus et sinusoïdaux. D'abord nous définissons le réseau électrique et ses constituants.

- **Réseau électrique** : toute association, simple ou complexe de dipôles, alimentée par un ou plusieurs sources.
- **Branche d'un réseau:** toute partie dipolaire, entre deux nœuds d'un réseau, parcourue par un même courant.
- **Nœud d'un réseau :** tout point du réseau commun à plus de 2 branches, un nœud est pris pour référence de potentiels.
- **Maille d'un réseau :** tout chemin orienté constituant une boucle et formé de plusieurs branches.

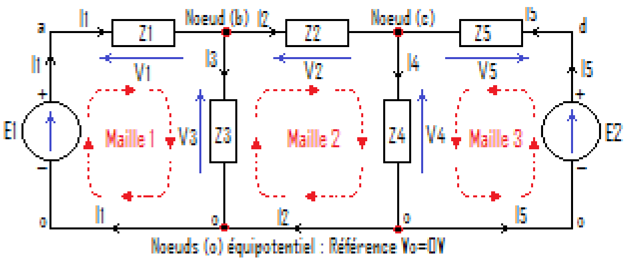


Figure 9 : Exemple d'un réseau électrique montrant ses constituants

- **Nombre de nœuds** : Np=03 nœuds (o , b, c), les points (a et d) ne sont pas des nœuds. Les points « o » sont équipotentiels considérés comme un seul nœud(o), pris pour référence des potentiels (Vo =0),
- **Nombre de branches** : Nb=05 branches, (oab), (ob), (bc), (oc) et (odc).
- **Nombre de mailles :** Nm=03 mailles indépendantes (Maille 1), (Maille 2) et (Maille 3).

6.1 1ère loi de Kirchhoff –loi des nœuds

La somme des courants entrant à un nœud est égale à la somme des courants sortant de ce nœud. Ou encore : la somme algébrique des courants en un nœud est nulle (les courants entrant positifs, les sortants négatifs).

- Nœud (b) : $I_1 = I_2 + I_3 \iff I_1 - I_2 - I_3 = 0 \iff \frac{V_1}{Z_1} - \frac{V_2}{Z_2} - \frac{V_3}{Z_3} = 0$
- Nœud (c) : $I_2 + I_5 = I_4 \iff I_2 + I_5 - I_4 = 0 \iff \frac{V_2}{Z_2} + \frac{V_5}{Z_5} - \frac{V_4}{Z_4} = 0$
- Nœud (o) : $I_3 + I_4 = I_1 + I_5 \iff I_3 + I_4 - I_1 - I_5 = 0 \iff \frac{V_3}{Z_3} + \frac{V_4}{Z_4} - \frac{V_1}{Z_1} - \frac{V_5}{Z_5} = 0$

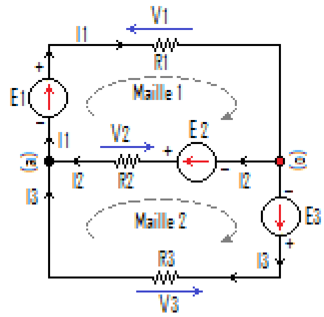
6.2 2ième loi de Kirchhoff –loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille orientée est nulle. La tension ayant le même sens que celui de la maille est comptée positivement, celle orientée dans le sens opposé comptée négativement.

- Maille 1 : $E_1 - V_1 - V_3 = 0 \iff E_1 - Z_1 \cdot I_1 - Z_3 \cdot I_3 = 0$
- Maille 2 : $V_3 - V_2 - V_4 = 0 \iff Z_3 \cdot I_3 - Z_2 \cdot I_2 - Z_4 \cdot I_4 = 0$
- Maille 3 : $V_4 + V_5 - E_2 = 0 \iff Z_4 \cdot I_4 + Z_5 \cdot I_5 - E_2 = 0$

Exemple. Calculer les courants et tensions dans le réseau ci-contre.

(AN: E1 =E2=E3 =10V, R1=10Ω, R2=5Ω, R3=15Ω)



- Réseau ayant 02 nœuds, 02 mailles et 03 branches
- Les sens des f.é.m. Ei des générateurs sont imposés par leurs polarités
- Les sens des courants sont choisis arbitrairement
- Les sens des tensions de récepteurs Vi opposent ceux des courants
- Les sens des mailles sont choisis arbitrairement
- Un nœud (o) est choisi comme référence des potentiels

On applique d'abord la loi des mailles sur les deux mailles, (1 et 2), on obtient 02 équations à 03 courants inconnus.

$$\begin{matrix}\text{Maille } 1 \rightarrow E_1 - V_1 + E_2 - V_2 = 0 \\ \text{Maille } 2 \rightarrow V_2 - E_2 + E_3 - V_3 = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = V_1 + V_2 \\ E_3 - E_2 = V_3 - V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \\ E_3 - E_2 = R_3 \cdot I_3 - R_2 \cdot I_2 \end{cases}$$

Deux équations à trois courants inconnus. Il faut soit ajouter une 3ième équation, soit réduire les inconnus. L'application de la loi des nœuds au nœud (a) permet de la faire : Nœud (a) $\rightarrow$ $I_1 = I_2 + I_3$ (on le remplace dans les équations précédentes), on obtient :

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = R_1 \cdot (I_2 + I_3) + R_2 \cdot I_2 \\ E_3 - E_2 = R_3 \cdot I_3 - R_2 \cdot I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R_1 + R_2) \cdot I_2 + R_1 \cdot I_3 = E_1 + E_2 \\ -R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = E_3 - E_2 \end{cases}$$: 02 équations à deux inconnus, (I2 et I3),

dont l'application numérique donne la solution finale des courants et tensions : $\begin{cases} 15 \cdot I_2 + 10 \cdot I_3 = 20 \\ -5 \cdot I_2 + 15 \cdot I_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I_2 = 3 \cdot I_3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} I_3 = \frac{20}{55} = 0.36 \text{ A} \\ I_2 = \frac{60}{55} = 1.1 \text{ A} \\ I_1 = I_2 + I_3 = \frac{80}{55} = 1.45\text{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = R_1 \cdot I_1 = 10 \times \frac{80}{55} = 14.54 \text{ V} \\ V_2 = R_2 \cdot I_2 = 5 \times \frac{60}{55} = 5.45 \text{ V} \\ V_3 = R_3 \cdot I_3 = 15 \times \frac{20}{55} = 5.45 \text{ V} \end{cases}$$

Le bilan de puissance du circuit (Puissance produite par les générateurs = Puissance consommée par les récepteurs) permet de vérifier la justesse de nos calculs. Le bilan est bien vérifié, donc nos calculs sont justes.

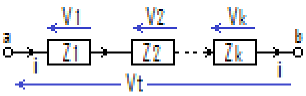
Puissance produite : $P_G = P_{E1} + P_{E2} + P_{E3} = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 = 10 \times \left(\frac{80+60+20}{55}\right) = \frac{1600}{55} = 29.09 \text{ W}$

Puissance consommée : $P_R = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 = \frac{10\times80^2+5\times60^2+15\times20^2}{55^2} = \frac{88000}{3025} = 29.09 \text{ W}$

»» Refaire les calculs avec les données suivantes :(E1 =E3 =10V, E2=20V, R1=10Ω, R2=5Ω, R3=15Ω) »»

6.3 Diviseur de tension

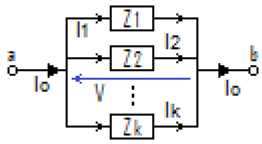
Dans une branche, composée de dipôles en séries, et soumise à une tension connue «Vt », la tension d'un dipôle « k » est exprimée par le diviseur de tension : $V_k = Z_k \cdot i = \frac{Z_k}{Z_{éq}} \cdot V_t = \frac{Z_k}{Z_1+Z_2+\cdots Z_k} \cdot V_t$



6.4 Diviseur de courant

Dans une branche, composée de dipôles en parallèles, et parcourue par un courant connu « Io », le courant dans un dipôle « k » est donné par le diviseur de courant :

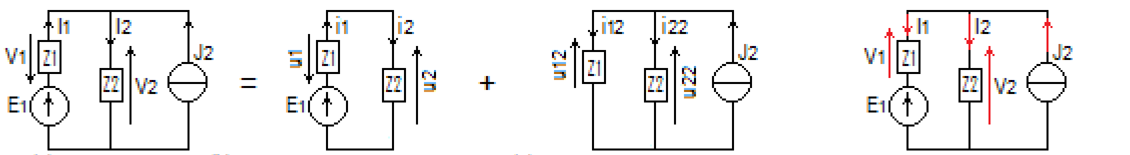
$I_k = \frac{V}{Z_k} = \frac{I_0 \cdot Z_{eq}}{Z_k} = \frac{Z_{eq}}{Z_k} \cdot I_0$ avec $\frac{1}{Z_{éq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots \frac{1}{Z_k}$



6.5 Principe de superposition

Dans un réseau linéaire possédant plusieurs générateurs, la tension d'un nœud, ou le courant d'une branche, est égal à la somme des tensions, ou des courants, créés séparément par chaque générateur, les autres générateurs étant désactivés (sources de tension court-circuitées, et sources de courant ouvertes).

Exemple: Utiliser le principe de superposition, les diviseurs de courant ou tension, pour calculer les courants et tension du circuit initial de la figure (10.a). AN : Z1 = 5Ω, Z2 = 10Ω, E1 = 30V et J2 = 5A



(a) Circuit initial (b) Source de courant désactivée (c) Source de tension désactivée (d) Sens réels des V et I après calculs

Figure 10 : Exemple de superposition, étapes de calculs

Nous avons deux sources, donc deux étapes de calculs et leur superposition.

1ère Etape : désactiver une source, la source de courant J2 par exemple, (la retirer complètement du circuit), on obtient le circuit de la figure (10.b) ayant une seule maille, dont les dipôles Z1 et Z2 sont en séries, parcourus par le même courant (i1=i2) et soumis à la tension totale E1=30V. Le diviseur de tension donne pour chacun des dipôles : $\begin{cases} u_1 = \frac{Z_1}{Z_{éq}} \cdot E_1 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \cdot E_1 = \frac{5}{5+10} \times 30 = 10\ V \\ u_2 = \frac{Z_2}{Z_{éq}} \cdot E_1 = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} \cdot E_1 = \frac{10}{5+10} \times 30 = 20\ V \end{cases}$

Les courants correspondants sont exprimés par la loi d'Ohm : $i_1 = i_2 = \frac{u_1}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} = \frac{E_1}{Z_1+Z_2} = \frac{30}{15} = 2\ A$

2ième Etape : désactiver la source de tension E1, (la remplacer par un trait de court-circuit), on obtient le circuit de la figure (10.c), dans lequel les deux impédances (Z1 et Z2) sont en parallèles et parcourues par un courant total J2=5A.

Le diviseur des courants pour chacun des dipôles $\begin{cases} i_{12} = \frac{Z_{eq}}{Z_1} \cdot J_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1(Z_1+Z_2)} \cdot J_2 = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} \cdot J_2 = 3.33\ A \\ i_{22} = \frac{Z_{eq}}{Z_2} \cdot J_2 = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2(Z_1+Z_2)} \cdot J_2 = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \cdot J_2 = 1.67\ A \end{cases}$

Les tensions correspondantes sont exprimées par la loi d'Ohm : $u_{12} = u_{22} = Z_1 \cdot i_{12} = Z_2 \cdot i_{22} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1+Z_2} \cdot J_2 = 16.67\ V$

3ième Etape : en superposant les résultats des deux étapes, en respectant les sens des courants et tension, on obtient les courants et tensions du circuit initial. $\begin{cases} I_1 = i_1 - i_{12} \quad = 2 - 3.33 = -1.33\ A \\ V_1 = u_1 - u_{12} = 10 - 16.67 = -6.67\ V \\ I_2 = i_2 + i_{22} \quad = 2 + 1.67 = 3.67\ A \\ V_2 = u_2 + u_{22} = 20 + 1667 = 36.67\ V \end{cases}$ Les signe (-), dans V1 et I1, veut dire que leur sens réel (Fig.10.d) est l'opposé du sens choisi sur le circuit initial (Fig.10.a).

6.6 Théorème de Thévenin

Entre deux points d'un réseau linéaire, le réseau est équivalent à un générateur de tension dit de Thévenin, de force électromotrice **Eo**, (ou Eth) en série avec une impédance interne **Zi**, (ou Zth).

- **Zi** est égale à l'impédance équivalente, entre les deux points du réseau, lorsque tous ses générateurs sont éteints (générateurs de tension court-circuités, générateurs de courant ouverts ou supprimés).
- La tension **Eo** est égale à la tension à vide entre les deux points du réseau.

6.7 Théorème de Norton

C'est le dual de Thévenin, tout réseau linéaire est équivalent, entre deux points, à un générateur de courant dit de Norton, de courant **Io** et d'impédance interne **Zi** égale à celle de Thévenin. Le courant **Io** est égal au courant de court-circuit entre les deux nœuds du réseau.

Exemples : soit le réseau (Fig.11.a), on cherche à calculer seulement le courant et la tension dans le dipôle récepteur Z3, par les deux théorèmes. **AN** : E1 = 50V, J2 = 5A, Z1 = Z2 = j.5 Ω et Z3 = - j.15 Ω (Attention, impédances complexes → calculs en complexe).

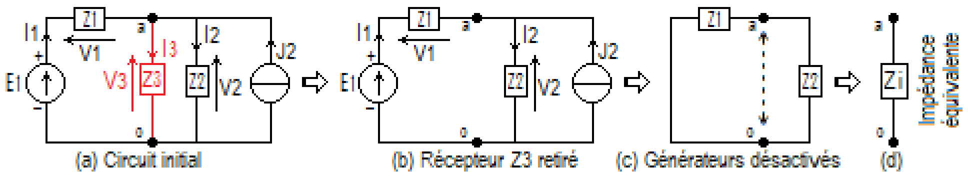


Figure 11 : Exemple d'tapes de calcul du circuit équivalent de Thevenin

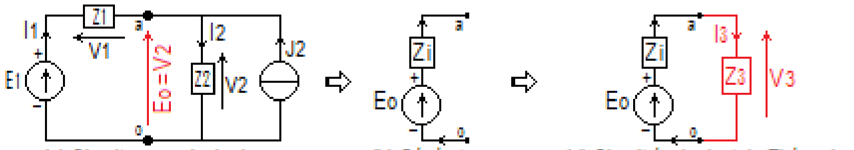
Pour faire ceci, les étapes suivantes sont communes aux deux théorèmes :

- Retirer du circuit initial le dipôle récepteur Z3 sur lequel on veut calculer les grandeurs électriques, (Fig.11.b).
- Désactiver tous les générateurs (source de tension court-circuitées, source de courant supprimées), (Fig.11.c).
- Calculer l'impédance équivalente du circuit résultant entre les deux points de raccordement du récepteur retirée, (FIG.11.d).

Ces étapes ont conduit, par rapport aux points (o et a), à l'impédance interne équivalente Zi suivante;

(Z1 et Z2) en parallèles → leur équivalente : $Z_i = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{j5 \times j5}{j5+j5} = j\frac{25}{10} = j2.5\ \Omega = 2.5\ \angle 90°\ \Omega$ → (une réactance inductive)

Calcul par le théorème de Thévenin



(a) Circuit pour calculer la tension de Thévenin Eo (b) Générateur équivalent de Thévenin (c) Circuit équivalent de Thévenin, avec récepteur Z3 réintégré

1) Calcul de la tension de Thévenin Eo. Le calcul de la f.é.m. **Eo**, correspond au circuit (Fig. a), dans lequel la maille (E1, Z1 et Z2) permet d'écrire : $\begin{cases} E_1 = V_1 + E_0 \\ E_0 = V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} V_1 = E_1 - E_0 \\ V_2 = E_0 \end{matrix}$

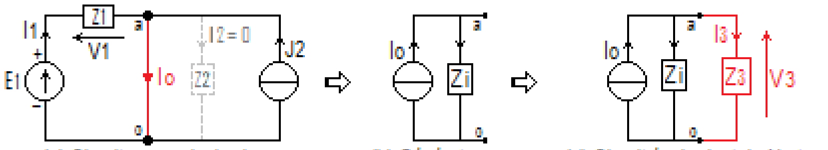
D'autre part, le nœud « a » permet d'écrire : $I_1 + J_2 = I_2 \Leftrightarrow \frac{V_1}{Z_1} + J_2 = \frac{V_2}{Z_2} \Rightarrow \frac{E_1 - E_0}{Z_1} + J_2 = \frac{E_0}{Z_2} \Rightarrow \frac{E_1 - Z_1 \cdot J_2}{Z_1} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 \cdot Z_2} \cdot E_0$

Ce qui donne la tension de Thevenin recherchée $E_0 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot (E_1 + Z_1 \cdot J_2) = (25 + j12.5)V = 27.95 \angle 26.57°\ V$

2) Circuit équivalent de Thevenin : Le générateur équivalent de Thévenin (Fig.b), est un générateur de tension qui regroupe en série la f.é.m. Eo et l'impédance Zi. Le circuit équivalent (Fig.c), consiste à réintégrer le récepteur Z3 aux bornes du générateur de Thévenin, ce qui permet de calculer le courant I3 recherché : $I_3 = \frac{E_0}{Z_i + Z_3} = \frac{25 + j12.5}{j2.5 - j15} = \frac{25 + j12.5}{-j12.5} = (-1 + j2)A = 2.236 \angle 116.57°\ A.$

Et la tension V3 recherchée : $V_3 = Z_3 I_3 = \frac{Z_3}{Z_i + Z_3} E_0 = \frac{-j15}{-j12.5} \times (25 + j12.5) = (30 + j15)V = 33.54 \angle 26.57°\ V$

Calcul par le théorème de Norton



(a) Circuit pour calculer le courant de Norton Io (b) Générateur équivalent de Norton (c) Circuit équivalent de Norton, avec récepteur Z3 réintégré

1) Calcul du courant de court-circuit de Norton Io. Le calcul du courant de Norton **Io**, correspond au circuit (Fig. a), dans lequel l'impédance Z2 n'a pas d'effets (court-circuitée) et (V1 =E1). La loi des nœuds en (a) permet d'écrire :

$$I_0 = J_2 + I_1 = J_2 + \frac{V_1}{Z_1} = J_2 + \frac{E_1}{Z_1} = 5 + \frac{50}{j5} = (5 - j10)\ A = 11.18 \angle -63.43°\ A$$

2) Circuit équivalent de Norton. Le générateur équivalent de Norton (Fig.b), est un générateur de courant qui regroupe en parallèle le courant idéal Io et l'impédance Zi. Le circuit équivalent (Fig.c), consiste à réintégrer le récepteur Z3 aux bornes du générateur de Norton, ce qui permet de calculer le courant I3 recherché par le diviseur de courant entre (Zi et Z3).

$$I_3 = \frac{Z_{eq}}{Z_3} \cdot I_0 = \frac{1}{Z_3}\left(\frac{Z_i \cdot Z_3}{Z_i + Z_3}\right) \cdot I_0 = \frac{Z_i \cdot I_0}{Z_i + Z_3} = \frac{j2.5}{j2.5 - j15} \cdot I_0 = -0.2 \times (5 - j10) = (-1 + j2)A = 2.236 \angle 116.57°\ A$$

La tension recherchée est alors : $V_3 = Z_3 \cdot I_3 = -j15 \times (-1 + j2) = (30 + j15)V = 33.54 \angle 26.57°\ V$

NB : (les deux circuits équivalent, de Thévenin et de Norton, ont donnée des résultats identiques).