

Mais comme nous allons le voir le produit au même point x induit avec lui des difficultés de divergence, on évite cette difficulté en réécrivant H sous une forme dite normale : H_0 .
Voyons d'abord comment la solution de l'éq de K.G. s'écrit :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0.$$

Il y a deux types de solutions :

$$e^{\pm i k x} = e^{\pm i (K^0 t - \vec{K} \cdot \vec{x})}$$

$$\text{avec : } K^2 = K_0^2 - \vec{K}^2 = m^2 \quad (K^0 = \omega)$$

Le champ φ est solution de l'éq K.G et comme modèle :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k \, c(k) e^{i k x} \delta(k^2 - m^2) \dots (*)$$

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(K_0^2 - \vec{K}^2 - m^2).$$

$$\delta(f(x)) = \frac{\sum_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha})}{|f'(x_{\alpha})|}, \quad x_{\alpha} = K_0 = \omega_K.$$

$$K_0^2 - \vec{K}^2 - m^2 = 0 \Rightarrow K_0 = \pm \sqrt{\vec{K}^2 + m^2} = \pm \omega_K.$$

$$f'(x_{\alpha}) = 2K_0 = 2\omega_K \Rightarrow x_{\alpha} = \pm \omega_K.$$

$$\delta(K_0^2 - \vec{K}^2 - m^2) = \frac{\delta(K_0 - \omega_K)}{|2\omega_K|} + \frac{\delta(K_0 + \omega_K)}{|2\omega_K|}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \, \frac{1}{2\omega_K} \left[c(\omega_K, \vec{k}) e^{i(\omega_K t - \vec{K} \cdot \vec{x})} + c(-\omega_K, \vec{k}) e^{-i(\omega_K t + \vec{K} \cdot \vec{x})} \right].$$

en faisant le changement $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ d'où $\int d^3k \rightarrow \int d^3k$.
 (juste pour le deuxième terme)

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2\omega_k} [a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}]$$

avec:
$$\begin{cases} a(\vec{k}) = c(-\omega_{\vec{k}}, -\vec{k}) \\ a^\dagger(\vec{k}) = c(\omega_{\vec{k}}, \vec{k}) \end{cases}$$

comme $\varphi(x)$ est un champ réel, on a:

$$a^\dagger(\vec{k}) = a(\vec{k})$$

il vient donc:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx})$$

Le champ $\pi(x)$ est alors:

$$\pi(x) = \dot{\Phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(a(\vec{k}) \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(\vec{k}) \frac{\partial}{\partial t} e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (-i\omega_k a(\vec{k}) e^{-ikx} + i\omega_k a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx})$$

$$\pi(x) = (-i) \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} [a(\vec{k}) e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}]$$

Passons maintenant à la quantification,

$\varphi(x)$ opérateur est :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx} \right].$$

où $a(k)$ est un opérateur et $a^\dagger(k)$ son conjugué.

$$\varphi^\dagger(x) = \varphi(x) \text{ champ réel.}$$

Puisque φ et π vérifient des relations de commutation, il est de même pour a et $a^\dagger$.

Alors cherchons ces relations.

Soit les fonctions : $f_k = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx}$ sont

des ondes planes de quantité de mouvement $\vec{k}$ et d'énergie ω_k

ils vérifient :

$$\left(\int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = \delta(\vec{k} - \vec{q}) \right) \quad (*)$$

avec : $\overleftrightarrow{\partial}_0 = \overrightarrow{\partial}_t - \overleftarrow{\partial}_t$

Démonstration de (*):

$$\int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = \int d^3x \left[f_k^*(x) \overrightarrow{\partial}_0 f_q(x) - \overleftarrow{\partial}_0 f_k^*(x) \cdot f_q(x) \right] \quad (**)$$

on a :

$$\overrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \frac{\partial}{\partial t} e^{-i(\omega_q t - \vec{q} \cdot \vec{x})}$$

$$\partial_0 f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} (-i\omega_q) e^{-iqx}$$

aussi ;

$$\partial_0 f_k^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \frac{\partial}{\partial t} e^{+i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

$$\partial_0 f_k^* = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (+i\omega_k) e^{+ikx}$$

il vient :

$$f_k^*(x) \cdot \partial_0 f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{ikx} \times \frac{(-i\omega_q)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} e^{-iqx}$$

$$f_k^*(x) \partial_0 f_q(x) = \frac{-i\omega_q}{(2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}} e^{i(k-q)x} \quad \text{--- (1)}$$

de même :

$$\partial_0 f_k^*(x) \cdot f_q(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (i\omega_k) e^{ikx} \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} e^{-iq(x)}$$

$$\partial_0 f_k^* f_q(x) = \frac{i\omega_k}{(2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}} e^{i(k-q)x} \quad \text{--- (2)}$$

Nous remplaçant (1) et (2) dans (*).

$$\int d^3x f_k^*(x) i \partial_0 f_q(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \left[\frac{(\omega_q + \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}} e^{i(k-q)x} \right]$$

Nous avons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dx = \delta(\alpha)$$

et alors: $\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} = \delta(\vec{k}-\vec{q})$.

$$\int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \frac{(\omega_q + \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}} e^{i(\omega_k - \omega_q)t} \times e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}}$$

posons: $\omega_k = \omega_q$ (pour la condition de colarité)

Alors, cette dernière équation devient:

$$(\omega_q + \omega_k) = 2\omega_k$$

$$\begin{aligned} \int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \frac{2\omega_k}{\sqrt{(2\omega_k)^2}} e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int d^3x f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = \delta(\vec{k}-\vec{q})} \quad \checkmark$$

on a aussi :

$$\int d^3x f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = 0 \dots (\beta).$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f_k(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}} \left[-i\omega_q e^{-i(k+q)x} + i\omega_k e^{-i(k+q)x} \right] \\ \int d^3x f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \frac{(\omega_q - \omega_k)}{(2\omega_k) 2\omega_q} e^{-i(k+q)x} \end{aligned}$$

pour $\omega_k = \omega_q \Rightarrow$

$$\int d^3x f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) = 0.$$

Notons que les égalités (α) et (β) sont vraies $\forall t$, elles permettent d'inverser l'expression en modes de $\varphi(x)$ et d'obtenir une expression pour $a(t)$ et son conjugué.

d'où on tire :

$$a(k) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) \dots (I)$$

$$a^+(k) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \varphi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) \dots (II)$$

Vérifications des relations (I) et (II):

$$\int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi(x)$$

$$= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[f_k^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi(x) - \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k^\dagger \psi(x) \right]$$

$$= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \left[\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} (a(q) e^{-iqx} + a^\dagger(q) e^{+iqx}) \right]$$

$$= \int \frac{d^3x d^3q \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left\{ \left(f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \frac{a(q) e^{-iqx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \right) + f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \frac{a^\dagger(q) e^{+iqx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \right\}$$

$$= \int d^3x d^3q \frac{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \left\{ a(q) f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) + a^\dagger(q) f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q^\dagger(x) \right\}$$

$$= \int d^3q \frac{\sqrt{2\omega_k}}{\sqrt{2\omega_q}} \left[a(q) \int d^3x f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x) + a^\dagger(q) \int d^3x f_k^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q^\dagger(x) \right]$$

à partir des relations (α) et (β), on trouve:

$$= \int d^3q \frac{\sqrt{2\omega_k}}{\sqrt{2\omega_q}} \left[a(q) \delta(\vec{k}-\vec{q}) + a^\dagger(q) \times 0 \right]$$

$$= a(k) \longleftarrow$$

+ vérification de la relation (II):

$$\int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \psi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x).$$

$$= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega_q} [a(q) e^{-iqx} + a^\dagger(q) e^{iqx}] i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)$$

$$= \int d^3q \frac{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} [a(q) e^{-iqx} + a^\dagger(q) e^{iqx}] i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)$$

$$= \int d^3q \sqrt{\frac{2\omega_k}{2\omega_q}} \left\{ a(q) \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} e^{-iqx} i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) \right.$$

$$\left. + a^\dagger(q) \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}} e^{iqx} i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) \right\}$$

$$= \int d^3q \sqrt{\frac{2\omega_k}{2\omega_q}} \left\{ a(q) \int d^3x f_q(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) \right.$$

$$\left. + a^\dagger(q) \int d^3x f_q^\dagger(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) \right\}$$

En utilisant les relations (a) et (b), il vient:

$$= \int d^3q \sqrt{\frac{2\omega_k}{2\omega_q}} \{ a(q) \cdot 0 + a^\dagger(q) \delta(\vec{k} - \vec{q}) \}$$

$$= a^\dagger(k) \checkmark$$

Comme dans les relations (α) et (β) ne dépend pas du temps les règles de commutations des opérateurs $a(k)$ et $a^+(k)$ s'obtiennent ensuite facilement en utilisant les expressions (I) et (II) et les commutateurs canonique de φ et π .

On obtient :

$$[a(k), a^+(q)] = (2\pi)^3 \omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{q})$$

$$[a(k), a(q)] = [a^+(k), a^+(q)] = 0$$

Démonstration :

$$[a(k), a^+(q)] = \int d^3x d^3y \sqrt{(2\pi)^3 \omega_k} \sqrt{(2\pi)^3 \omega_q} [f_k^+(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(x), \varphi(y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_q(y)]$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{\omega_k \omega_q}$$

$$[f_k^+(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(x) - \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_k^+(x) \varphi(x), \varphi(y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_q(y) - \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(y) f_q(y)]$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{\omega_k \omega_q} \times \left\{ [f_k^+(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(x), \varphi(y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_q(y)] \right.$$

$$- [f_k^+(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(x), \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(y) f_q(y)] - [\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_k^+(x) \varphi(x), \varphi(y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_q(y)]$$

$$+ [\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 f_k^+(x) \varphi(x), \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(y) f_q(y)] \left. \right\}$$

$$\text{avec : } \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(x) = \pi(x)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi(y) = \pi(y)$$

$$[a(k), a^\dagger(q)] = \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}$$

$$\left\{ (i)^2 f_k^*(x) \partial_0 f_q(y) [\pi(x), \varphi(y)] - (i)^2 f_k^*(x) f_q(y) [\pi(x), \pi(y)] \right. \\ \left. - (i)^2 \partial_0 f_k^*(x) \partial_0 f_q(y) [\varphi(x), \varphi(y)] + (i)^2 \partial_0 f_k^*(x) i f_q(y) [\varphi(x), \pi(y)] \right\}$$

$-i \delta(x-y)$

$i \delta(x-y)$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \times \delta(x-y).$$

$$[+ f_k^*(x) i \partial_0 f_q(y) + \partial_0 f_k^*(x) i f_q(y)].$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \delta(x-y) \times f_k^*(x) i \partial_0 f_q(y).$$

$$= \int d^3x (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} f_k^*(x) i \partial_0 f_q(x).$$

$$= (2\pi)^3 (2\omega_k) \delta(\vec{k} - \vec{q}).$$

$$\Rightarrow [a(k), a^\dagger(q)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

de même :

$$[a(k), a(q)] = \int d^3x d^3y \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q}$$

$$[f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x), f_q^*(y) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(y)]$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)}$$

$$\times [f_k^*(x) i \partial_0 \varphi(x) - \partial_0 f_k^*(x) i \varphi(x), \\ f_q^*(y) i \partial_0 \varphi(y) - \partial_0 f_q^*(y) i \varphi(y)]$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \{ [f_k^*(x) i \pi(x), f_q^*(y) i \pi(y)]$$

$$- [f_k^*(x) i \pi(x), \partial_0 f_q^*(y) i \varphi(y)] - [\partial_0 f_k^*(x) i \varphi(x), f_q^*(y) i \pi(y)]$$

$$+ [\partial_0 f_k^*(x) i \varphi(x), \partial_0 f_q^*(y) i \varphi(y)] \}$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \{ (i)^2 f_k^*(x) f_q^*(y) [\underbrace{\pi(x), \pi(y)}_{=0}]$$

$$- (i)^2 f_k^*(x) \partial_0 f_q^*(y) [\underbrace{\pi(x), \varphi(y)}_{-i\delta(x-y)}]$$

$$- (i)^2 \partial_0 f_k^*(x) f_q^*(y) [\underbrace{\varphi(x), \pi(y)}_{i\delta(x-y)}]$$

$$+ (i)^2 \partial_0 f_k^*(x) \partial_0 f_q^*(y) [\underbrace{\varphi(x), \varphi(y)}_{=0}] \}$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} [\overset{=0}{-} f_k^*(x) i \partial_0 f_q^*(y)$$

$$+ \partial_0 f_k^*(x) i f_q^*(y)] \delta(x-y)$$

$$[a(k), a(q)] = \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \delta(x-y) \\ \times (-f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q^*(y))$$

$$= - \int d^3x (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q^*(x)$$

$$[a(k), a(q)] = 0 \quad \checkmark$$

$$[a^+(k), a^+(q)] = \int d^3x d^3y \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_q} \\ \times [\varphi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x), \varphi(y) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(y)]$$

$$= \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \\ \times [\varphi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x) - \partial_0 \varphi(x) i f_k(x), \varphi(y) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(y) - \partial_0 \varphi(y) i f_q(y)] \\ = \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \left\{ (i)^2 \partial_0 f_k(x) \partial_0 f_q(y) [\varphi(x), \varphi(y)] \right. \\ \left. - (i)^2 \partial_0 f_k(x) f_q(y) [\varphi(x), \pi(y)] - (i)^2 f_k(x) \partial_0 f_q(y) [\pi(x), \varphi(y)] \right. \\ \left. + (i)^2 f_k(x) f_q(y) [\pi(x), \pi(y)] \right\}$$

$$[a^+(k), a^+(q)] = \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} \delta(x-y)$$

$$\times [(-\partial_0 f_k(x) i f_q(y) + f_k(x) i \partial_0 f_q(y))]$$

$$[a^+(k), a^+(q)] = \int d^3x d^3y (2\pi)^3 \sqrt{(2\omega_k)(2\omega_q)} f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(y) \\ \times \delta(x-y)$$

$$[a^+(k), a^+(q)] = - \int d^3x (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k(2\omega_q)} f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_q(x).$$

$$[a^+(k), a^+(q)] = 0 \quad \checkmark$$

Ces opérateurs $a(k)$, $a^+(k)$ sont similaires à ceux de l'oscillateur harmonique connus sous le nom : opérateurs de création et d'annihilation. Le champ scalaire quantique est un ensemble d'oscillateurs quantiques qui s'interprètent en termes de particules.

- On définit alors l'opérateur :

$$N(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^+(k) a(k).$$

qui vérifie :

$$[N(k), N(q)] = 0. \quad \dots (a)$$

$$[N(k), a(q)] = -a(q) \delta(\vec{k} - \vec{q}). \quad \dots (b)$$

$$[N(k), a^+(q)] = +a^+(q) \delta(\vec{k} - \vec{q}). \quad \dots (c)$$

Vérification des relations (a), (b) et (c).

$$[N(k), N(q)] = \frac{1}{(2\pi)^6 (2\omega_k)(2\omega_q)} [a^\dagger(k) a(k), a^\dagger(q) a(q)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6 (2\omega_k)(2\omega_q)} \left\{ a^\dagger(k) [a(k), a^\dagger(q) a(q)] + [a^\dagger(k), a^\dagger(q) a(q)] a(k) \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6 (2\omega_k)(2\omega_q)} \left\{ a^\dagger(k) \underbrace{[a(k), a^\dagger(q)]}_{(2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k}-\vec{q})} a(q) + a^\dagger(k) a^\dagger(q) \underbrace{[a(k), a(q)]}_{0} + \underbrace{[a^\dagger(k), a^\dagger(q)]}_{0} a(q) a(k) + a^\dagger(q) \underbrace{[a^\dagger(k), a(q)]}_{- [a(q), a^\dagger(k)]} a(k) \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6 (2\omega_k)(2\omega_q)} \left\{ a^\dagger(k) [a(k), a^\dagger(q)] a(q) - a^\dagger(q) \underbrace{[a(q), a^\dagger(k)]}_{(2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k}-\vec{q})} a(k) \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6 (2\omega_k)(2\omega_q)} \times (2\pi)^3 2\omega_k \left[\delta(\vec{k}-\vec{q}) a^\dagger(k) a(q) - \delta(\vec{k}-\vec{q}) a^\dagger(q) a(k) \right]_{\vec{q} \leftrightarrow \vec{k}}$$

$$\delta(\vec{k}-\vec{q}) = \delta(\vec{q}-\vec{k})$$

$$\Rightarrow [N(k), N(q)] = 0$$

$$\bullet [N(k), a(q)] = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a^\dagger(k) a(k), a(q)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ \underbrace{a^\dagger(k) [a(k), a(q)]}_{=0} + \underbrace{[a^\dagger(k), a(q)] a(k)}_{= - (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k}-\vec{q})} \right\}$$

$$= -a(k) \delta(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\Rightarrow [N(k), a(q)] = -a(k) \delta(\vec{k}-\vec{q}) \quad \leftarrow$$

$$\bullet [N(k), a^\dagger(q)] = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a^\dagger(k) a(k), a^\dagger(q)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ \underbrace{a^\dagger(k) [a(k), a^\dagger(q)]}_{=0} + \underbrace{[a^\dagger(k), a^\dagger(q)] a(k)}_{=0} \right\}$$

$$= a^\dagger(k) \delta(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\Rightarrow [N(k), a^\dagger(q)] = a^\dagger(k) \delta(\vec{k}-\vec{q}) \quad \leftarrow$$

Cet opérateur permet d'exprimer l'Hamiltonien comme

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \{ a(k) a^\dagger(k) + a^\dagger(k) a(k) \} \dots \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \{ 2 a^\dagger(k) a(k) + a(k) a^\dagger(k) - a^\dagger(k) a(k) \} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \{ 2 a^\dagger(k) a(k) + [a(k), a^\dagger(k)] \}
 \end{aligned}$$

$$H = \int d^3k \left\{ \omega_k N(k) + \frac{1}{4(2\pi)^3} [a(k), a^\dagger(k)] \right\}$$

on sait que : $[a(k), a^\dagger(q)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{q})$

alors : $[a(k), a^\dagger(k)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{0})$

H devient comme suit :

$$H = \int d^3k \left\{ \omega_k N(k) + \frac{1}{2} \omega_k \delta(\vec{0}) \right\} \quad (8)$$

l'éq (8) n'est cependant pas satisfaisante, puisque elle contient un terme infini de la forme : $\int d^3k \frac{1}{2} \omega_k \delta(\vec{0})$ qui est indépendant des opérateurs $a(k)$ et $a^\dagger(k)$.

et $[H, N(k)] = 0$, les valeurs propres de l'hamiltonien quantique H qui ne contient pas ce terme sont finies

et vérifie $[H, N(k)] = 0$.

Dans la suite, on définira H par un hamiltonien

: H : qui ne contiendra pas ce terme infini mais qui vérifiera $[H, N(k)] = 0$.

on peut alors trouver une base comme à H et $N(k)$ on la note: $\{|n(q)\rangle, \forall q = (\omega_q, \vec{q})\}$.

Ces états vérifient:

$$N(k)|n(q)\rangle = n(k)|n(q)\rangle \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}).$$

$n(k)$ est une valeur propre de $N(k)$, cette valeur propre est positive $n(k) \geq 0$.

En effet: $\langle n(k) | a^\dagger(k) a(k) | n(k) \rangle$

$$= (2\pi)^3 2\omega_k \langle n(k) | N(k) | n(k) \rangle$$

$$= (2\pi)^3 2\omega_k n(k) \underbrace{\langle n(k) | n(k) \rangle}_{=1} \geq 0.$$

d'où $n(k) \geq 0$.

Pour $n(k) = 0$, on a: $N(k)|0\rangle = 0$.

$|0\rangle$ est dit état du vide, qui peut se définir aussi par

$$a(k)|0\rangle = 0 \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k}).$$

La base $\{|n(k)\rangle\}$ engendre un espace dit de Fock.

on a en plus :

$$N(k) a^\dagger(q) |n(k)\rangle = [N(k), a^\dagger(q)] |n(k)\rangle + a^\dagger(q) N(k) |n(k)\rangle$$

on sait que: $[N(k), a^\dagger(q)] = a^\dagger(q) \delta(\vec{k} - \vec{q})$

donc

$$N(k) a^\dagger(q) |n(k)\rangle = a^\dagger(q) \delta(\vec{k} - \vec{q}) |n(k)\rangle + a^\dagger(q) n(k) |n(k)\rangle$$

$$N(k) \underline{a^\dagger(q) |n(k)\rangle} = \underline{(n(k) + \delta(\vec{k} - \vec{q})) a^\dagger(q) |n(k)\rangle}$$

alors $a^\dagger(q) |n(k)\rangle$ est vecteur propre de l'opérateur $N(k)$
avec la valeur propre $n(k) + \delta(\vec{k} - \vec{q})$.

de même :

$$N(k) a(q) |n(k)\rangle = [N(k), a(q)] |n(k)\rangle + a(q) N(k) |n(k)\rangle$$

on sait que:

$$[N(k), a(q)] = -a(q) \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

donc :

$$N(k) a(q) |n(k)\rangle = -a(q) \delta(\vec{k} - \vec{q}) |n(k)\rangle + a(q) n(k) |n(k)\rangle$$

$$N(k) \underline{a(q) |n(k)\rangle} = \underline{(n(k) - \delta(\vec{k} - \vec{q})) a(q) |n(k)\rangle}$$

donc $a(q) |n(k)\rangle$ est vecteur propre de l'opérateur $N(k)$
avec la valeur propre $n(k) - \delta(\vec{k} - \vec{q})$.

Ceci permet d'introduire un opérateur :

$$N = \int d^3k N(k).$$

sa valeur propre est n un entier ≥ 0 , qu'on interprète comme nombre total de particules contenues dans l'état $N(k)$ est une densité de nombre de particules dans le volume d^3k autour de $\vec{k}$.

on a :

$$* [N, a(k)] = -a(k).$$

$$* [N, a^+(k)] = a^+(k)$$

$$* N |n(k)\rangle = n |n(k)\rangle$$

avec $n = \int d^3k n(k)$.

$$* N a(q) |n(k)\rangle = (n-1) a(q) |n(k)\rangle. \quad n \geq 1.$$

$$* N a^+(q) |n(k)\rangle = (n+1) a^+(q) |n(k)\rangle.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} a) [N, a(k)] &= \int d^3q [N(q), a(k)] \\ &= \int d^3q (-a(q) \delta(\vec{k} - \vec{q})). \end{aligned}$$

$$[N, a(k)] = -a(k) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} b) [N, a^+(k)] &= \int d^3q [N(q), a^+(k)] \\ &= \int d^3q (a^+(q) \delta(\vec{k} - \vec{q})) \end{aligned}$$

$$[N, a^+(k)] = a^+(k) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad N a(q) |n(k)\rangle &= \int d^3k \, N(k) a(q) |n(k)\rangle \\
 &= \int d^3k \left\{ [N(k), a(q)] + a(q) N(k) \right\} |n(k)\rangle \\
 &= \int d^3k \left\{ -a(q) \delta(\vec{k}-\vec{q}) + a(q) n(k) \right\} |n(k)\rangle \\
 &= [-a(q) + a(q) \int d^3k \, n(k)] |n(k)\rangle \\
 &= (n-1) a(q) |n(k)\rangle
 \end{aligned}$$

$$N a(q) |n(k)\rangle = (n-1) a(q) |n(k)\rangle$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad N a^+(q) |n(k)\rangle &= \int d^3k \, N(k) a^+(q) |n(k)\rangle \\
 &= \int d^3k \left\{ [N(k), a^+(q)] |n(k)\rangle + a^+(q) N(k) |n(k)\rangle \right\} \\
 &= \int d^3k \left\{ a^+(q) \delta(\vec{k}-\vec{q}) + n(k) a^+(q) \right\} |n(k)\rangle \\
 &= \left[\int d^3k \, n(k) a^+(q) + a^+(q) \right] |n(k)\rangle
 \end{aligned}$$

$$N a^+(q) |n(k)\rangle = (n+1) a^+(q) |n(k)\rangle$$