Quantification du champ spinoriel de Dirac :

Comme nous allons le voir, le champ de Dirac necessite via la quantification canonique quelques modifications en relation avec le comportement statistique des particules.

A travers la quantification canonique on a appris à changer les crochets de Poisson par des commutateurs qui à leur tour implique des relations de commutation entre des opérateurs de création et d'annihilation intimement reliés au comportement statistique des particules de Bose-Einstein.

L'expérience prouve que effectivement les particules tells les électrons satisfont au principe d'exclusion de Pauli et obeisent alors à la statistique de Fermi-Dirac.

Ce fait nous oblige à modifier les commutateurs par des anti-commutateurs pour respecter cette statistique.

. Le champ spinoriel de Dirac classique vérifie :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad \text{ou bien} \quad \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m) = 0$$

. La densité lagrangienne est :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \bar{\Psi})\gamma^\mu \Psi\right] - m\bar{\Psi}\Psi .$$

Le tenseur impulsion energie est :

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

$\hookrightarrow \Psi, \bar{\Psi}$ verifient l'eq de Dirac

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial^\nu \Psi - \partial^\nu \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi\right).$$

Comme ce champ est doté d'un spin, lors d'une rotation ce n'est pas $\tilde{J}^{\mu,\nu s} = T^{\mu\nu}x^s - T^{\mu s}x^\nu$ qui se conserve mais plutot une combinaison de $\tilde{J}^{\mu,\nu s}$ et d'une partie caractéristique de son spin.

$$J^{\mu,\nu s} = T^{\mu\nu}x^s - T^{\mu s}x^\nu + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left\{\gamma^\mu, \frac{\sigma^{\nu s}}{2}\right\}\Psi.$$

Au cours de la transformation de jauge globale un courant de Noether se conserve : $J^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$.

L'impulsion total du champ est :

$$P^\mu = \int d^3x\, T^{0\mu} = \int d^3x \frac{i}{2}\left(\bar{\Psi}\gamma^0\partial^\mu\Psi - \partial^\mu\bar{\Psi}\gamma^0\Psi\right)$$

$\boxed{\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0}$

$(\gamma^0)^1 = 1$

$$= \int d^3x \frac{i}{2}\left(\Psi^+\gamma^0\gamma^0\partial^\mu\Psi - \partial^\mu\Psi^+\gamma^0\gamma^0\Psi\right).$$

$$= \int d^3x \frac{i}{2}\left(\Psi^+\partial^\mu\Psi - \partial^\mu\Psi^+\Psi\right)$$

$$= \int d^3x \frac{i}{2}\left(\Psi^+\overleftrightarrow{\partial}^\mu\Psi\right).$$

Scanné avec CamScanner

L'impulsion totale du champ est :

$$P^\mu = \int d^3x \, \frac{i}{2} \left(\psi^+ \overleftrightarrow{\partial^\mu} \psi \right)$$, elle est indépendante du temps.

L'Hamiltonien est $H = P^0$.

$$H = \int d^3x \, \frac{i}{2} \left(\psi^+ \partial_0 \psi - (\partial_0 \psi^+) \psi \right)$$

$$H = \int d^3x \, i \psi^+ \partial_0 \psi - \frac{d}{dt} \int d^3x \, \frac{i}{2} \psi^+ \psi .$$

$$H = \int d^3x \, i \psi^+ \partial_0 \psi .$$ puisque $i \int d^3x \, \psi^+ \psi = \varphi$ est la charge conservé de Noether $\frac{d\varphi}{dt} = 0$

. La solution libre de Dirac s'écrit :
(Cas classique) :

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[b(k,\alpha) u^{(\alpha)}(k) \, e^{-ikx} + d^*(k,\alpha) \, v^{(\alpha)}(k) \, e^{ikx} \right] .$$

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad , \quad K = (\omega_k, \vec{k})$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{\omega_k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[b^+(k,\alpha) \, \bar{u}^{(\alpha)}(k) \, e^{ikx} + d(k,\alpha) \, \bar{v}^{(\alpha)}(k) \, e^{-ikx} \right] .$$

les spineurs $u^{(\alpha)}$ et $v^{(\alpha)}$ vérifient :

$$\begin{cases} (\not{k} - m) \, u^{(\alpha)}(k) = 0 . \\ (\not{k} + m) \, v^{(\alpha)}(k) = 0 \end{cases}$$

avec :
$$\begin{cases} \bar{u}^{(\alpha)} v^{(\beta)} = 0 \\ \bar{u}^{(\alpha)} u^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta} \\ \bar{v}^{(\alpha)} v^{(\beta)} = -\delta^{\alpha\beta} \\ \bar{v}^{(\alpha)} u^{(\beta)} = 0 \end{cases}$$

L'impulsion totale est :

$$P^\mu = \int d^3x \, \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \right)$$

$$= \int d^3x \, \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^0 \partial^\mu \psi - \partial^\mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right].$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{w_k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[b(k,\alpha) \, u^{(\alpha)}(k) \, e^{-ikx} + d^+(k,\alpha) \, v^{(\alpha)}(k) \, e^{ikx} \right].$$

$$\partial^\mu \psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{w_k}} \, (-ik^\mu) \sum_{\alpha=1}^{2} \left[b(k,\alpha) u^{(\alpha)}(k) \, e^{-ikx} - d^+(k,\alpha) v^{\alpha}(k) \, e^{ikx} \right]$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{w_q}} \sum_{\beta=1}^{2} \left[b^+(q,\beta) \, \bar{u}^{(\beta)}(q) \, e^{iqx} + d(q,\beta) \, \bar{v}^{(\beta)}(q) \, e^{-iqx} \right].$$

$$\partial^\mu \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{w_q}} \, iq^\mu \sum_{\beta=1}^{2} \left[b^*(q,\beta) \, \bar{u}^{(\beta)}(q) \, e^{iqx} - d(q,\beta) \, \bar{v}^{(\beta)}(q) \, e^{-iqx} \right].$$

$$\star \; \bar{\psi}(x) \gamma^0 \partial^\mu \psi(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{w_q}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_q} \, (-ik^\mu)$$
$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left[b^+(q,\beta) \, \bar{u}^{(\beta)}(q) \, e^{iqx} + d(q,\beta) \, \bar{v}^{(\beta)}(q) \, e^{-iqx} \right]$$
$$\times \left[b(k,\alpha) \, u^{(\alpha)}(k) \, e^{-ikx} - d^+(k,\alpha) \, v^{\alpha}(k) \, e^{ikx} \right].$$

$$\star\ \partial^\mu \bar\Psi \gamma^0 \Psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{\omega k}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{\omega q}}\,(i q^\mu \gamma^0)$$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left[b^*(q,\beta)\, \bar u^{(\beta)}(q)\, e^{iqx} - d(q,\beta)\, \bar v^{(\beta)}(q)\, e^{-iqx} \right]$$

$$\times \left[b(k,\alpha)\, u^{(\alpha)}(k)\, e^{-ikx} + d^*(k,\alpha)\, v^{(\alpha)}(k)\, e^{ikx} \right].$$

$$\star\ \bar\Psi \gamma^0 \partial^\mu \Psi - \partial^\mu \bar\Psi \gamma^0 \Psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{\omega k}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{\omega q}}$$

$$\Big\{ -i\gamma^0 k^\mu \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^*(q,\beta)\, b(k,\alpha)\, \bar u^{\beta}(q)\, u^{(\alpha)}(k)\, e^{i(q-k)x}$$

$$+ i\gamma^0 k^\mu \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^*(q,\beta)\, d^*(k,\alpha)\, \underbrace{\bar u^{\beta}(q)\, v^{\alpha}(k)}_{=0}\, e^{i(q+k)x}$$

$$- i\gamma^0 k^\mu \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d(q,\beta)\, b(k,\alpha)\, \underbrace{\bar v^{(\beta)}(q)\, u^{(\alpha)}(k)}_{=0}\, e^{-i(q+k)x}$$

$$+ i\gamma^0 k^\mu \sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} d(q,\beta)\, d^*(k,\alpha)\, \bar v^{(\beta)}(q)\, v^{\alpha}(k)\, e^{-i(q-k)x}$$

$$- i q^\mu \gamma^0 \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^*(q,\beta)\, b(k,\alpha)\, \bar u^{(\beta)}(q)\, u^{(\alpha)}(k)\, e^{i(q-k)x}$$

$$- i q^\mu \gamma^0 \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b^*(q,\beta)\, d^*(k,\alpha)\, \underbrace{\bar u^{(\beta)}(q)\, v^{(\alpha)}(k)}_{=0}\, e^{i(q+k)x}$$

$$+ i q^\mu \gamma^0 \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d(q,\beta)\, b(k,\alpha)\, \underbrace{\bar v^{(\beta)}(q)\, u^{(\alpha)}(k)}_{=0}\, e^{-i(q+k)x}$$

$$+ i q^\mu \gamma^0 \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} d(q,\beta)\, d^*(k,\alpha)\, \bar v^{(\beta)}(q)\, v^{(\alpha)}(k)\, e^{-i(q-k)x} \Big\}.$$

$$\bar{\psi}\gamma^0\partial^\mu\psi - \partial^\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega k}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega q}$$

$$\times\Big\{(-i\gamma^0 k^\mu - iq^\mu\gamma^0)\sum_{\alpha=1}^{2} b^+(q,\alpha)\,b(k,\alpha)\,e^{i(q-k)x}$$

$$+(i\gamma^0 k^\mu + iq^\mu\gamma^0)\sum_{\alpha=1}^{2} d(q,\alpha)\,d^+(k,\alpha)\,e^{-i(q-k)x}\Big\}$$

on a : $$\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}\,e^{\pm i(k-q)x} = \delta(\vec{k}-\vec{q})\,e^{\mp i(\omega k-\omega q)x} \qquad \omega k=\omega q$$

Alors:

$$P^\mu = \int d^3x\,\frac{i}{2}\left(\psi^+\overleftrightarrow{\partial}^\mu\psi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega k}\int d^3q\,\frac{m}{\omega q}$$

$$\times\Big\{(\gamma^0 k^\mu + q^\mu\gamma^0)\sum_{\alpha=1}^{2} b^+(q,\alpha)b(k,\alpha)\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}e^{i(q-k)x}$$

$$-(\gamma^0 k^\mu + q^\mu\gamma^0)\sum_{\alpha=1}^{2} d(q,\alpha)d^+(k,\alpha)\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}e^{-i(q-k)x}\Big\}$$

$$P^\mu = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{m}{\omega k}\int d^3q\,\frac{m}{\omega q}$$

$$\times\Big\{(\gamma^0 k^\mu + q^\mu\gamma^0)\sum_{\alpha=1}^{2} b^+(q,\alpha)\,b(k,\alpha)\,\delta(\vec{k}-\vec{q})\,e^{i(\omega k-\omega q)x}$$

$$-(\gamma^0 k^\mu + q^\mu\gamma^0)\sum_{\alpha=1}^{2} d(q,\alpha)\,d^+(k,\alpha)\,\delta(\vec{k}-\vec{q})\,e^{-i(\omega q-\omega k)x}\Big\}$$

$$P^\mu = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{\omega k}\right)^2\gamma^0 k^\mu\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{b^+_\alpha(k)\,b_\alpha(k) - d_\alpha(k)\,d^+_\alpha(k)\right\}$$

Scanné avec CamScanner

alors :

$$P^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{\omega k}\right)^2 k^\mu \sum_{\alpha=1}^{2}\left[b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k) - d_\alpha(k)\, d_\alpha^+(k)\right]$$

aussi, on a : $H = P^0$ à partir de ce dernier résultat nous constatons

$$H = \int d^3x\, \psi^+ i \frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = P^0 \qquad k^0 = \omega k.$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{m}{\omega k}\right)^2 k^0 \sum_{\alpha=1}^{2}\left[b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k) - d_\alpha(k)\, d_\alpha^+(k)\right]$$

$$H = m^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,\omega k} \sum_{\alpha=1}^{2}\left[b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k) - d_\alpha(k)\, d_\alpha^+(k)\right].$$

on sait bien que l'energie contient une partie negative.

Quantifier ce champ spinoriel revient à :

$$(b, d) \xrightarrow{\text{remplacer}} (\hat{b}, \hat{d}) \text{ opérateurs.}$$

$$(b^+, d^+) \longrightarrow (\hat{b}^+, d^+) \text{ opérateurs}$$

comme on l'a vu, la commutation sur les champs induit avec elle une commutateur des (b, b^+) et (d, d^+).

- Deux difficultés majeurs apparaissent :

① Energie non bornée inférieurement (pas d'etat fondamental).

② statistique Bose-Einstein (contre nature).

Pour pouvoir établir les bonnes relations de commutations satisfaisantes et cohérentes, revenons à l'opérateur P^μ.

. L'action de P sur ψ est définie par :

$$[P^\mu, \psi] = -i\,\partial^\mu \psi.$$

Démonstration : $P^\mu = -i\,\partial^\mu$

$$[P^\mu, \psi]f(x) = [-i\partial^\mu, \psi] f(x) \quad , \forall f(x).$$

$$= -i\,[\partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu] f(x).$$

$$= -i\,[\partial^\mu(\psi f(x)) - \psi\,\partial^\mu f(x)]$$

$$= -i(\partial^\mu \psi) f(x) - i\,\psi\,\partial^\mu f(x) + i\,\psi\,\partial^\mu f(x).$$

$$[P^\mu, \psi] f(x) = -i\,\partial^\mu \psi\, f(x)$$

$$[P^\mu, \psi] = -i\,\partial^\mu \psi$$

$$P^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} k^\mu \sum_\alpha [b_\alpha^+(k) b_\alpha(k) - d_\alpha(k) d_\alpha^+(k)].$$

à un ordre normal près :

$$\left\{\begin{array}{ll} [P^\mu, b_\alpha(k)] = -k^\mu b_\alpha(k) & \text{— (1)} \\ [P^\mu, d_\alpha(k)] = -k^\mu d_\alpha(k) & \text{— (2)} \\ [P^\mu, \quad (k)] = k^\mu b_\alpha^+(k) & \text{— (3)} \\ [P^\mu, d_\alpha^+(k)] = k^\mu d_\alpha^+(k) & \text{— (4)} \end{array}\right. \quad \text{— (*)}$$

Démonstration de (*) :

Nous avons : $[P^\mu, \psi] = -i\,\partial^\mu \psi$.

c-à-d :

$[\hat{P}^\mu, \psi] = -i\,\partial^\mu \psi$ — (I).

avec :

$$[\hat{P}^\mu, \psi] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ [\hat{P}^\mu, b(k,\alpha)]\, u^{(\alpha)}(k)\, e^{-ikx} + [\hat{P}^\mu, d^+(k,\alpha)]\, v^{(\alpha)}(k)\, e^{ikx} \right\} \text{ — (1)}.$$

et :

$$-i\,\partial^\mu \psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ -k^\mu\, b(k,\alpha)\, u^{(\alpha)}(k)\, e^{-ikx} + k^\mu\, d^*(k,\alpha)\, v^{(\alpha)}(k)\, e^{ikx} \right\} \text{ — (2)}.$$

à partir de (I) et en comparant (1) et (2) ; on obtient :

$$[\hat{P}^\mu, b(k,\alpha)] = -k^\mu\, b(k,\alpha) \text{ — (1)}$$

$$[\hat{P}^\mu, d^+(k,\alpha)] = k^\mu\, d^*(k,\alpha) \text{ — (4)}.$$

Nous avons aussi :

$$[\hat{P}^N, \bar{\Psi}] = -i\partial^N \bar{\Psi} \quad \ldots (\text{II})$$

$$[\hat{P}^N, \bar{\Psi}] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ [\hat{P}^N, b^+(k,\alpha)] \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right.$$

$$\left. + [\hat{P}^N, d(k,\alpha)] \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right\} \ldots (1)'$$

$$-i\partial^N \bar{\Psi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ k^N \, b^+(k,\alpha) \bar{u}^{(\alpha)}(k) e^{ikx} \right.$$

$$\left. - k^N d(k,\alpha) \bar{v}^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} \right\} \ldots (2)'$$

à partir de (II) et en comparant (1)' et (2)' on obtient :

$$[\hat{P}^N, b^+(k,\alpha)] = k^N b^+(k,\alpha) \ldots (3)$$

$$[\hat{P}^N, d(k,\alpha)] = -k^N d(k,\alpha) \ldots (2)$$

En supposant de plus que :

$$[b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k), d_\beta(k)] = 0 \quad \ldots (\Delta)^\circ$$

$$[d_\alpha(k)\, d_\alpha^+(k), b_\beta(k)] = 0 \quad \ldots (\Delta)^{\circ\circ}$$

on obtient :

$$\sum_\alpha [b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k), b_\beta(q)] = -(2\pi)^3 \frac{\omega k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\beta(q) \ldots (\alpha)$$

$$\sum_\alpha [d_\alpha(k)\, d_\alpha^+(k), d_\beta(q)] = +(2\pi)^3 \frac{\omega k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\beta(q) \ldots (\beta)$$

on sait que :

$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$$

$$[AB, C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B.$$

Démonstration de (α) et (β) :

on a : $[P^N, b_\alpha(k)] = -k^N b_\alpha(k)$ ... ①

et

$$[P^N, b_\alpha(k)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} k^N \sum_{\beta,\alpha} \Big\{ [b^+_\beta(k) b_\beta(k), b_\alpha(q)]$$

$$- [d_\beta(k) \underbrace{d^+_\beta(k), b_\alpha(q)]}_{0=} \Big\}.$$

$$[P^N, b_\alpha(k)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} k^N \sum_{\beta,\alpha} [b^+_\beta(k) b_\beta(k), b_\alpha(q)] \quad ②$$

de ① et ②

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} k^N \sum_{\alpha,\beta} [b^+_\alpha(k) b_\alpha(k), b_\beta(q)] = -k^N b_\alpha(k).$$

$$\Rightarrow \sum_\alpha [b^+_\alpha(k) b_\alpha(k), b_\beta(q)] = -(2\pi)^3 \frac{w_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\beta(q).$$

aussi :

$$[P^N, d_\beta(q)] = -k^N d_\beta(q).$$

$$[P^N, d_\beta(q)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} k^N \sum_{\beta,\alpha} \Big\{ \overbrace{[b^+_\alpha(k) b_\alpha(k), d_\beta(q)]}^{=0}$$

$$- [d_\alpha(k) d^+_\alpha(k), d_\beta(q)] \Big\}.$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m\, k^N}{w_k} \sum_{\beta,\alpha} [d_\alpha(k) d^+_\alpha(k), d_\beta(q)].$$

$$\Rightarrow \sum_\alpha [d_\alpha(k) d^+_\alpha(k), d_\beta(q)] = (2\pi)^3 \frac{w_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\beta(q).$$

Dans le but d'éviter les problèmes cités ci dessus, on préfère utiliser l'anti-commutateur $\{\ \}$, d'où

$$\sum_\alpha [b_\alpha^+(k) b_\alpha(k), b_\beta(q)] = \sum_\alpha \Big[b_\alpha^+(k) \{b_\alpha(k), b_\beta(q)\}$$

$$- \{b_\alpha^+(k), b_\beta(q)\} b_\alpha(k)\Big] \quad \text{---} \ (+)$$

$$= -(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q}) b_\beta(q).$$

aussi :

$$\sum_\alpha [d_\alpha(k) d_\alpha^+(k), d_\beta(q)] = \sum_\alpha \Big[d_\alpha(k) \{d_\alpha^+(k), d_\beta(q)\}$$

$$- \{d_\alpha(k), d_\beta(q)\} d_\alpha^+(k)\Big] \text{..} \ (*)°$$

$$= +(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q}) d_\beta(q).$$

Ces relations sont vérifiées si on impose les anticommutation suivantes ; de $+)$ et $(*)°$; $(\Delta)°$ et $(\Delta)°°$

$$\{b_\alpha(k), b_\beta(q)\} = \{d_\alpha(k), d_\beta(q)\} = 0.$$

$$\{b_\alpha^+(k), b_\beta(q)\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\{d_\alpha^+(k), d_\beta(q)\} = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\{b_\alpha^+(k), b_\beta^+(q)\} = \{d_\alpha^+(k), d_\beta^+(q)\} = 0.$$

$$\{b_\alpha(k), d_\beta^+(q)\} = \{b_\alpha(k), d_\beta(q)\} = 0.$$

$$\{b_\alpha^+(k), d_\beta(q)\} = \{b_\alpha^+(k), d^+_\beta(q)\} = 0.$$

Ces relations définissent la quantification d'un champ spinoriel libre de Dirac et se traduisent par :

$$\{\Psi(\vec{x},t), \bar{\Psi}(\vec{y},t)\} = \gamma^0 \delta(\vec{x}-\vec{y}).$$

ou bien :

$$\{\Psi_\alpha(\vec{x},t), \Psi^+_\beta(y,t)\} = \delta(\vec{x}-\vec{y})\,\delta_{\alpha\beta}.$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0.$$

En remplaçant ces expressions et en utilisant les relations d'anticommutation, on trouve le résultat, on note aussi que pour x, y qlq :

$$\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\} = (i\gamma\partial_x + m)\, i\Delta(x-y).$$

$$\{\Psi(x), \Psi(y)\} = 0 = \{\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)\}.$$

Ces relations assurent la microcausalité de la théorie.

Opérateurs nombre de particules et Espace de fock.

Opérateurs nombre de particules :

On introduit opérateurs nombre de particules

$$N_b = \int d^3k\, N_b(k)$$

avec : $$N_b(k) = \frac{m}{(2\pi)^3 w_k} \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k).$$

et $$N_d = \int d^3k\, N_d(k)$$

avec : $$N_d(k) = \frac{m}{(2\pi)^3 w_k} \sum_{\alpha=1}^{2} d_\alpha^+(k)\, d_\alpha(k).$$

Ces opérateurs vérifient :

$$[N_b(k), b_\alpha(q)] = -\delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha(q) \quad -①''$$

$$[N_b(k), b_\alpha^+(q)] = +\delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha^+(q) \quad -②''$$

$$[N_d(k), d_\alpha(q)] = -\delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha(q) \quad -③''$$

$$[N_a(k), d_\alpha^+(q)] = +\delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha^+(q) \quad -④'$$

Démonstration :

$$* [N_b(k), b_\alpha(q)] = \frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \sum_\beta [b_\beta^+(k) b_\beta(k), b_\alpha(q)].$$

$$= \frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \left(-(2\pi)^3 \frac{\omega k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha(q)\right).$$

$$[N_b(k), b_\alpha(q)] = -\delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha(q)$$

$$* [N_b(k), b_\alpha^+(q)] = \frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \sum_\beta [b_\beta^+(k) b_\beta(k), b_\alpha^+(q)].$$

$$= \frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \sum_\beta \left((2\pi)^3 \frac{\omega k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha^+(q)\right)$$

$$[N_b(k), b_\alpha^+(k)] = \delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha^+(q).$$

$$* [N_d(k), d_\alpha(q)] = \frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \sum_\beta [d_\beta^+(k) d_\beta(k), d_\alpha(q)].$$

on a : $\{d_\alpha^+(k), d_\beta(q)\} = 0 \Rightarrow d_\alpha^+(k) d_\alpha(q) = -d_\alpha(q) d_\alpha^+(k)$

$$[N_d(k), d_\alpha(q)] = -\frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \sum_\beta [d_\beta(k) d_\beta^+(k), d_\alpha(q)].$$

$$= -\frac{m}{(2\pi)^3 \omega k} \left((2\pi)^3 \frac{\omega k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha(q)\right).$$

$$[N_d(k), d_\alpha(q)] = -\delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha(q)$$

$$[N_d(k), d_\alpha^+(q)] = \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_k} \sum_\beta [d_\beta^+(k) d_\beta(k), d_\alpha^+(q)].$$

$$= -\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_k} \sum_\beta [d_\beta(k) d_\beta^+(k), d_\alpha^+(q)]$$

$$= -\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_k} \left(-(2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha^+(q)\right)$$

$$[N_d(k), d_\alpha^+(q)] = +\delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha^+(q)$$

on a aussi :

$$\begin{cases} [N_b, b_\alpha(k)] = -b_\alpha(k) \\ [N_b, b_\alpha^+(k)] = +b_\alpha^+(k). \\ [N_d, d_\alpha(k)] = -d_\alpha(k) \\ [N_d, d_\alpha^+(k)] = +d_\alpha^+(k) \end{cases}$$

Demonstration :

- $[N_b, b_\alpha(k)] = \int d^3q\, [N_b(q), b_\alpha(k)]$

$$= \int d^3q\, (-\delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha(k))$$

$$[N_b, b_\alpha(k)] = -b_\alpha(k)$$

- $[N_b, b_\alpha^+(k)] = \int d^3q\, [N_b(q), b_\alpha^+(k)].$

$$= \int d^3q\, (\delta(\vec{k}-\vec{q})\, b_\alpha^+(k))$$

$$[N_b, b_\alpha^+(k)] = b_\alpha^+(k)$$

$$\bullet\ [N_d, d_\alpha(q)] = \int d^3q\, [N_d(q), d_\alpha(k)]$$
$$= \int d^3q \left(-\delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha(k)\right)$$

$$[N_d, d_\alpha(q)] = -d_\alpha(k)$$

$$\bullet\ [N_d, d_\alpha^+(k)] = \int d^3q\, [N_d(q), d_\alpha^+(k)]$$
$$= \int d^3q \left(\delta(\vec{k}-\vec{q})\, d_\alpha^+(k)\right)$$

$$[N_d; d_\alpha^+(k)] = d_\alpha^+(k)$$

Tous les autres commutateurs possibles s'annulent.

L'hamiltonien devient :

$$H = \int d^3k\, w_k\, [N_b(k) + N_d(k)] - 2\int d^3k\, w_k\, \delta(\vec{0}).$$

Ce terme diverge peut être evité via la forme normale, cet ordre normale dans le cas fermionique est obtenu en écrivant les operateurs de création à gauche et les opérateurs d'annihilation droite et en tenant complété de l'anticommutativite des operateurs :

$$:d_\alpha(k)\, d^+_\beta(q): = -d_\beta^+(q)\, d_\alpha(k).$$

$$:d_\alpha(k) d_\beta(q)\, d^+_\delta(l): = d_\delta^+(l)\, d_\alpha(k) d_\beta(q)$$
$$= -d_\delta^+(l)\, d_\beta(q)\, d_\alpha(k).$$

On définit alors un état du vide $|0\rangle$ par :

$$b_\alpha(k)|0\rangle = 0 \quad , \quad d_\alpha(k)|0\rangle = 0 .$$

$$:H: = \int d^3k \; w_k \left[N_b(k) + N_d(k)\right]$$

$H|0\rangle = 0$ Energie du vide nulle.

- Les états de l'espace de fock sont crées en agissant par $b_\alpha^+(k)$ et $d_\alpha^+(q)$ sur le vide $|0\rangle$.

- Comme on a $\{b_\alpha^+(k), b_\alpha^+(k)\} = 0$, alors impossible de créer un état où deux particules en même état physique (impulsion - spin),

Il est défini par :

$$b_{\alpha_1}^+(k_1)\, b_{\alpha_2}^+(k_2) \ldots b^+_{\alpha_m}(k_m)\, d^+_{\beta_1}(q_1) \ldots d^+_{\beta_n}(q_n)|0\rangle .$$

avec une antisymétrie totale.

- Il concorde exactement avec les projeviétés de la statistique de fermi Dirac (principe d'exclusion de Pauli).

- Le courant de Noether conservé à la charge :

$$Q = :\int d^3x\, \psi^+\psi :$$

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{w_k} \sum_\alpha \left[b_\alpha^+(k)\, b_\alpha(k) - d_\alpha^+(k)\, d_\alpha(k)\right] .$$

$$Q = N_b - N_a .$$

on trouve donc :

$$[Q, b_\alpha(k)] = [N_b, b_\alpha(k)] - \underbrace{[N_d, b_\alpha(k)]}_{=0} = -b_\alpha(k)$$

$$[Q, d_\alpha(k)] = \underbrace{[N_b, d_\alpha(k)]}_{=0} - [N_d, d_\alpha(k)] = +d_\alpha(k)$$

$$[Q, b_\alpha^+(k)] = [N_b, b_\alpha^+(k)] - \underbrace{[N_d, b_\alpha^+(k)]}_{=0} = +b_\alpha^+(k).$$

$$[Q, d_\alpha^+(k)] = \underbrace{[N_b, d_\alpha^+(k)]}_{=0} - [N_d, d_\alpha^+(k)] = -d_\alpha^+(k).$$

Alors :

$b_\alpha(k), d_\alpha^+(k)$ et $\Psi(x)$ ont la charge $Q = -1$.

$b_\alpha^+(k), d_\alpha(k)$ et $\Psi^+(x)$ ont la charge $Q = +1$.

* $b_\alpha^+(k)$ crée une particule d'impulsion k avec un spin α.
* $b_\alpha(k)$ détruit une particule d'impulsion k avec un spin α.
* $d_\alpha^+(k)$ crée une antiparticule d'impulsion k avec un spin α.
* $d_\alpha(k)$ détruit une antiparticule " " ".