

L'impulsion-Energie du champ est le 4-vecteur defini par

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}$$

et il est facile de voir que

$$\partial_n T^{n0} = 0$$

$$\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0$$

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{i0}$$

$$\frac{dP^\nu}{dt} = \int_V d^3x \partial_0 T^{0\nu} = - \int_V d^3x \underbrace{\partial_i T^{i\nu}}_{\text{th. de Gauss}}$$

$$= - \oint_S ds_i T^{i\nu} = 0$$

Frontière V

Sur les frontières S de V le tenseur $T^{\mu\nu}$ s'annule. D'où la conservation de l'impulsion-energie du champ.

Remarque: $T^{\mu\nu}$ est par construction

non-symétrique.

Ceci est connu sous le nom de Théorème de Noether impliquant par l'invariance de l'action l'eq. locale de continuité d'un courant "j^u" l'intégrale $\int d^3x j^0$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

(21)

génére une conservation de la charge

$$Q = \int d^3x j^0 \quad \text{avec} \quad \dot{Q} = 0.$$

Application champ de Maxwell

Nous avons le lagrangien de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

le Tenseur Impulsion-Energie est

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g^{\mu\nu} j^\lambda A_\lambda$$

Comme il est facile de voir $T^{\mu\nu}$ n'est pas invariant de jauge : $A_\lambda \rightarrow A_\lambda + \partial_\lambda \phi$

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\lambda (g^{\mu\nu} j^\lambda \phi - F^{\mu\lambda} \partial^\nu \phi) - j^\mu \partial^\nu \phi.$$

En absence de courant externe $j^\mu = 0$

la différence est une divergence et ne

contribue pas dans le calcul de l'impulsion

- Energie du champ.

Le tenseur $T^{\mu\nu}$ est donc dépendant de la jauge. En plus il n'est pas symétrique

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \text{Anti}(t)$$

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = F^{\nu\lambda} \partial^\mu A_\lambda - F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda$$

Alors il serait préférable de rajouter à ce tenseur $T^{\mu\nu}$ une quantité qui soit

une divergence $T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$

$$\Delta T^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\lambda T^{\mu\lambda, \nu} \quad \text{Nether} \rightarrow T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$$

si antisymétrique (diag $T = 0 \Rightarrow T^{00} = 0$) $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\Delta T^{\mu\nu}) = 0$

$T^{\mu\lambda, \nu}$ est un tenseur antisymétrique

en (μ, λ) de manière à avoir $\int d^3x \partial_0 T^{0\nu} = 0$

$$P^\nu = \tilde{P}^\nu \Rightarrow \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x (T^{0\nu} + \Delta T^{0\nu})$$

$$\partial_\mu \Delta T^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\lambda T^{\mu\lambda, \nu} = 0$$

et en plus $\Delta P^\nu = \int d^3x \Delta T^{0\nu}$

$$\Delta T^{0\nu} = \partial_\lambda T^{0\lambda, \nu} = \partial_i T^{0i, \nu}$$

$$\Delta P^\nu = \int_V d^3x \partial_i T^{0i, \nu} = \oint_S ds_i T^{0i, \nu} = 0$$

$$T = \frac{\text{Sym}(T)}{2} + \frac{\text{Anti}(T)}{2}$$

(23)

et on voudrait bien l'avoir en relation avec la jauge. En effet: on a vu que

$$\Delta_{\text{jauge}} T^{\mu\nu} = -\partial_\lambda (F^{\mu\lambda} \partial^\nu \phi)$$

Ce qui nous pousse à écrire

$$\Delta T^{\mu\nu} = \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A^\nu)$$

Alors on définit le tenseur impulsion

Energie par

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \partial_\alpha A^\alpha \right)$$

$$- F^{\mu\lambda} \partial^\nu A_\lambda + \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A^\nu)$$

En utilisant l'eq de mouvement

$$\partial_\lambda F^{\mu\lambda} = -j^\mu \quad \text{il se réduit à}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu$$

$$+ g^{\mu\nu} (\partial_\lambda A^\lambda) - j^\mu A^\nu \quad (*)$$

(24)

$$L(T^{\mu\nu}) = \frac{1}{4} \cdot 4 k (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) + k (F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu)$$

$$= k (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) + k (F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu)$$

En l'absence de courant: $T^{\mu\nu}$ est invariant de jauge, conservé, symétrique et de trace nulle

si j_μ n'est pas nul: on a

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = A_\lambda \partial^\nu j^\lambda = \partial^\nu (A_\lambda j^\lambda) - j^\lambda \partial^\nu A_\lambda$$

qui peut aussi s'écrire $\partial_\mu T^{\mu\nu} = A_\lambda \partial^\nu j^\lambda$

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu \right)$$

$$= j_\lambda F^{\lambda\nu} \left(\begin{aligned} &\partial^\nu (A_\lambda j^\lambda) - j^\lambda \partial^\nu A_\lambda = \partial^\nu (j^\lambda A_\lambda) \\ &+ g^{\mu\nu} \partial_\mu (j_\lambda A^\lambda) - \partial_\mu j^\lambda A^\mu - j^\lambda \partial_\mu A^\mu \\ &\partial_\mu (j^\lambda A^\mu) = - j^\lambda \partial_\mu A^\mu + j^\mu \partial_\mu A^\lambda = \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} \end{aligned} \right)$$

on identifie alors le tenseur du champ

par $\tilde{a}$:

$$T^{\mu\nu}_{(0)} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu \quad j_\lambda = 0$$

Il est facile de voir que

$$T^{00}_{(0)} = \frac{1}{4} g^{00} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{0\lambda} F_\lambda{}^0 = -\frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \vec{E}^2$$

$$T^{00}_{(0)} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \quad \text{densité d'énergie}$$

$$\text{et } T^{i0} = F^{0\lambda} F_\lambda{}^i = -E^1 E'_1 - E^2 E'_2 \text{ du champ}$$

$$T^{i0}_{(0)} = (\vec{E} \wedge \vec{B})^i$$

densité de l'impulsion du champ
Vecteur de Poynting

(25)

et on a :

$$-\frac{d}{dt} \int_V d^3x T_{(0)} = \text{th de Gauss}$$

$$= \int_S dS_i (\vec{E} \wedge \vec{B})^i + \int d^3x \vec{E} \cdot \vec{j}$$

6) Rotation de Lorentz et conservation du moment
Angulaire généralisée.

Dans ce cas on a :

$$x \rightarrow \bar{x} = \Lambda x$$

Sous sa forme infinitésimale

$$\bar{x} = x + \delta x$$

$$\text{où } \delta x_\mu = \delta \omega_{\mu\nu} x^\nu$$

$$\delta \omega_{\mu\nu} = -\delta \omega_{\nu\mu}$$

Un calcul similaire à celui des translations
donne (T.D.)

$$\delta I = \int d^4x \left(\partial_\nu L \delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \partial_\mu (\delta x^\nu) \right)$$

puis après intégration par parties, en négligeant
bien sûr le terme de surface

(26)

$$\delta I = \int_{\Omega} d^4x \left(\partial_\nu \mathcal{L} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \right] \right) \delta x^\nu$$

$$I = - \int_{\Omega} d^4x \left(\partial_\mu T^{\mu\nu} \right) x^\nu \delta \omega_{\nu\epsilon}$$

Pour $T^{\mu\nu}$ symétrique on aura :

$$\delta I = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu J^{\mu, \nu\epsilon} \delta \omega_{\nu\epsilon}$$

avec : $J^{\mu, \nu\epsilon} = T^{\mu\nu} x^\epsilon - T^{\mu\epsilon} x^\nu$

est la densité du moment angulaire du champ. L'invariance de l'action par rotation implique l'invariance du moment angulaire résidant dans :

$$\partial_\mu J^{\mu, \nu\epsilon} = 0.$$

Il est important que $T^{\mu\nu}$ la densité énergie-impulsion soit symétrique pour que le moment angulaire se conserve.

(27)

Le moment angulaire généralisé est

$$J^{\nu S} = \int_V d^3x J^{0, \nu S}(x, t)$$

et nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{dJ^{\nu S}}{dt} &= \int_V d^3x \partial_0 J^{0, \nu S} \\ &= - \int_V d^3x \partial_i J^{i, \nu S} \\ &= - \oint_{S(V)} ds_i J^{i, \nu S} = 0 \end{aligned}$$

La conservation du moment angulaire

Lors d'une translation ce moment angulaire n'est pas invariant. Dans une translation de l'origine des coordonnées de a^μ ce moment change

d'une quantité $a^\nu p^S - a^S p^\nu = \Delta J^{\nu S}(T, 0)$

Le moment angulaire vectoriel habituel est en relation avec le vecteur de Pauli-Lubanski

$$W_\lambda = -\frac{1}{2} \epsilon_{\lambda \beta \gamma \delta} J^{\beta \gamma} p^\delta / \sqrt{p^2} \quad (28)$$

Dans le repère propre ($\vec{p} = \vec{0}$) on a :

$$\vec{W} = \vec{J} \quad (T, D.)$$

* Formalisme hamiltonien

Jusqu'à maintenant nous avons développé le formalisme de la théorie des champs via un principe d'action utilisant le Lagrangien. Notre souci était la covariance du formalisme. Si on essaye d'introduire le formalisme hamiltonien le temps sera alors privilégié. En effet, on associe au champ $\varphi(x) \equiv \varphi(\vec{x}, t)$ un

champ conjugué

$$\left\{ \pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial L(t)}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \frac{\delta}{\delta(\partial_0 \varphi(\vec{x}, t))} \int d^3y L(\vec{y}, t) \right.$$

et d'une manière similaire on définit le crochet de Poisson de deux fonctionnelles

L_1 et L_2 par

(29)

$$\{L_1, L_2\} = -\{L_2, L_1\}$$

$$= \int d^3x \left(\frac{\delta L_1}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \frac{\delta L_2}{\delta \varphi(\vec{x}, t)} - \frac{\delta L_1}{\delta \varphi(\vec{x}, t)} \frac{\delta L_2}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \right)$$

En particulier on a :

$$\{ \pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t) \}$$

$$= \int d^3x' \left\{ \frac{\delta \pi(\vec{x}, t)}{\delta \pi(\vec{x}', t)} \frac{\delta \varphi(\vec{y}, t)}{\delta \varphi(\vec{x}', t)} - 0 \right\}$$

$$= \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(\vec{y} - \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{ \pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t) \} = \{ \varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t) \} = 0$$

Les équations du mouvement sont (T.D.)

$$\partial_0 \varphi(\vec{x}, t) = \{ H, \varphi(\vec{x}, t) \} = \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)}$$

$$\partial_0 \pi(\vec{x}, t) = \{ H, \pi(\vec{x}, t) \} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi(\vec{x}, t)}$$

avec $H(t) = \int d^3x T^{00}(\vec{x}, t)$

(30)

Remarque: ① Il est possible de développer une théorie hamiltonienne pour la relativité

$$\pi(x) = \eta_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \eta_{\mu} \eta^{\mu} = 1$$

η_{μ} étant un vecteur orthogonal à Σ_1 et Σ_2
 du genre temps

Σ_1 et Σ_2 étant du genre espace.

Cette théorie a fait l'objet des travaux de Tomonaga - Dirac - Schwinger. Elle ne sera pas développée ici dans notre cours.

$$\textcircled{2} \quad T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi})}$$

31

* symétries internes

Sont T^s ($s=1,2,\dots,r$) des générateurs infinitésimaux associés à la transformation

$$\delta \varphi(x) = \delta \alpha_s(x) T^s \varphi(x)$$

avec $(T^s)^\dagger = -T^s$ et vérifiant

$$[T^{s_1}, T^{s_2}] = C^{s_1 s_2}_{s_3} T^{s_3}$$

Sous cette transformation on a :

$$L(\varphi) \rightarrow \hat{L}(\varphi + \delta\varphi)$$

$\hat{L}(\varphi + \delta\varphi)$ est fonction de $\varphi(x)$, $\partial_\mu \varphi(x)$, $\alpha_s(x)$ et $\partial_\mu \alpha_s(x)$.

La variation de l'action donne

$$\delta I = \int d^4x \delta L$$

(32)

$$\delta L = \hat{L} - L = \hat{L} - L(\varphi + \delta\varphi - \delta\varphi)$$

$$\text{or } L(\varphi + \delta\varphi - \delta\varphi) = \hat{L} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial(\delta\alpha_s)} \delta\alpha_s - \frac{\partial \hat{L}}{\partial(\partial_\mu \alpha_s)} \partial_\mu(\delta\alpha_s)$$

$$- \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta \varphi$$

pour $\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0$

on a $\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\delta \alpha_s)} \delta \alpha_s + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu \delta \alpha_s)} \partial_\mu (\delta \alpha_s)$

+ divergence

qui donne pour δI :

$$\delta I = \int d^4x \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\delta \alpha_s)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu (\delta \alpha_s))} \right) \right) \delta \alpha_s$$

L'invariance de I par la transformation

implique

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu (\delta \alpha_s))} \right) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\delta \alpha_s)}$$

On appelle courant de Noether associé à la transformation précédente

$$j_\mu^s(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu (\delta \alpha_s))}$$

(33)

la conservation du courant n'est satisfaite

que si
$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \delta \alpha)} = 0.$$

Donc que si $\mathcal{L}$ est invariant par la sous transformation générée par T_S .

La charge de Noether est dans ce cas

$$Q_S = \int d^3x j_S^0(\vec{x}, t)$$

et on a: $\frac{dQ_S}{dt} = 0$ si $\mathcal{L}$ est invariant par T_S -transformation.

$$\text{on a: } j_S^0(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \delta \alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} \frac{\partial (\partial_0 \varphi)}{\partial (\partial_0 \delta \alpha)}$$

$$\text{or on a: } \delta(\partial_0 \varphi) = \partial_0(\delta \alpha) T^S \varphi(x)$$

$$\text{ie, } \frac{\delta(\partial_0 \varphi)}{\delta(\partial_0 \delta \alpha)} = T^S \varphi(x)$$

ce qui donne

$$j_S^0(x) = \pi(x) T^S \varphi(x)$$

(314)

Alors :

$$Q_S = \int d^3x \pi(x) T^S \phi(x)$$

et nous avons

$$\{Q_S, F\} = \int d^3x \left(\frac{\delta Q_S}{\delta \pi} \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} - \frac{\delta Q_S}{\delta \phi} \frac{\delta F}{\delta \pi} \right)$$

$$\{Q_S, F\} = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \phi} T^S \phi - \pi T^{1S} \frac{\delta F}{\delta \pi} \right)$$

et en particulier

$$\{Q^S, \phi(x)\} = T^S \phi(x)$$

$$\{Q^S, \pi(x)\} = -\pi(x) T^S = T^S \pi(x)$$

ou bien autrement

$$\{ \delta \alpha_S Q^S, \phi(x) \} = \delta \phi(x) = \delta \alpha_S \{ \dot{\phi}^S, \phi(x) \} = \delta \alpha_S T^S \phi(x) = \delta \phi(x)$$

$$\{ \delta \alpha_S Q^S, \pi(x) \} = \delta \pi(x) \quad (35)$$

On dit que Q^S g n re la variation via les crochets de Poisson de la même manière que H g n re la variation dans le

les charges ne s'annulent

$$\{Q^{s_1}, Q^{s_2}\} = - \int d^3x \pi(x) [T^{s_1}, T^{s_2}] \phi(x)$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que

$$\frac{dQ^s}{dt} = \{H(t), Q^s(t)\} = \int d^3x \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (\delta x_s)}$$

et que

$$\{j_{s_1}^0(\vec{x}_1, t), j_{s_2}^0(\vec{x}_2, t)\} = - C_{s_1 s_2}^{s_3} j_{s_3}^0(\vec{x}, t) \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

$$j_{s_1}^0 = \pi(n) T^{s_1 s_1}$$

(36)

* Champ de Klein - Gordon :

① Champ réel à une composante

Dans ce cas la densité lagrangienne est donnée par :

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} (a \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + b \phi \partial_\mu \phi + c \phi^2)$$

l'équation du champ est :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{b}{2} \partial_\mu \phi + c \phi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = a \partial^\mu \phi + \frac{b}{2} \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

$$a \partial^\mu \partial_\mu \phi + \frac{b}{2} \partial_\mu \phi - \frac{b}{2} \partial_\mu \phi - c \phi = 0 \quad \text{--- (1)}$$

on bien (1) et (2) $\Rightarrow a=1, (-c = \mu^2)$

$$(\square + \mu^2) \phi(x) = 0 \quad \text{--- (2)} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2$$

μ est l'ép de Klein - Gordon si on fixe

$$\mu = \frac{m c}{\hbar} \quad \text{ou bien} \quad \mu = m$$

Le Tenseur Impulsion - énergie est

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (m^2 \phi^2 - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi$$

qui est symétrique.

la densité d'énergie

$$T^{00}(x) = \frac{1}{2} (u^2 \phi^2 - \partial_0 \phi \partial^0 \phi) + \frac{\partial^0 \phi \partial^0 \phi}{2} + \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi \partial^0 \phi + u^2 \phi^2) + \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2}$$

qui peut aussi s'écrire avec l'introduction

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi$$

$$\begin{cases} q \rightarrow \phi \\ p \rightarrow \pi \end{cases}$$

$$(q, p) \rightarrow (\phi, \pi)$$

Comme

$$T^{00}(x) = \mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{u^2}{2} \phi^2 + \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2}$$

$$H(t) = \int_V d^3x \mathcal{H} = \int T^{00}(x) d^3x$$

l'énergie du champ.

Si $L(t)$ est invariant par translation / à t

on a $\delta \left(\int L(t) dt \right) = 0$ qui donne

$$\frac{dH(t)}{dt} = 0$$

(38)

L'impulsion du champ est

$$P^i = \int_V d^3x \, T^{0i} = \int_V d^3x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial^i \phi$$

$$P^i(t) = \int_V d^3x \, \pi(\vec{x}, t) \partial^i \phi(\vec{x}, t)$$

Le Tenseur moment-angulaire du champ

$$J^{\mu, \nu \lambda} = T^{\mu \nu} x^\lambda - T^{\mu \lambda} x^\nu$$

$$= \frac{1}{2} \left(\eta^2 \phi^2 - \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) \left(g^{\mu \nu} x^\lambda - g^{\mu \lambda} x^\nu \right) \\ + \partial^\mu \phi \left(x^\lambda \partial^\nu \phi - x^\nu \partial^\lambda \phi \right)$$

(39)

Champ de Klein - Gordon complexe

L'extension du champ précédent au cas complexe est immédiate :

$$\phi \longrightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des champs de K.G. réels

Il n'est pas difficile de s'assurer alors

que

$$L(\phi_1, \phi_2, \partial_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_2)$$

$$\longrightarrow L(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*)$$

et les équations de champs seront

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0$$

avec

$$L(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*)$$

$$= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi$$

qui donne :

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + \mu^2 \phi^* = 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0 \end{cases}$$

(40)