

Dans ce cas on a alors deux moments conjugués

$$\begin{cases} \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \\ \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \end{cases}$$

la densité hamiltonienne est :

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = \pi^* \pi + (\vec{\nabla} \phi^*)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

La densité d'énergie moment du champ est

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \partial^\mu \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \phi^* \partial^\lambda \phi - m^2 \phi^* \phi)$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

la densité énergie :

$$\mathcal{H} = T^{00} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\vec{\nabla} \phi^*)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

$$= \pi^* \pi + (\vec{\nabla} \phi^*)(\vec{\nabla} \phi) + m^2 \phi^* \phi$$

la densité impulsion

$$T^{0i} = + \dot{\phi} \vec{\nabla} \phi^* + \dot{\phi}^* \vec{\nabla} \phi = + \pi^* \vec{\nabla} \phi^* + \pi \vec{\nabla} \phi \quad (41)$$

De la même manière on peut définir un
 bon moment angulaire.

$$J^{\mu, \nu} = T^{\mu \nu} x^3 - T^{\mu 3} x^{\nu}$$

Il est facile de voir que pour le champ
 de $K-G$ complexe admet une symétrie interne
 définie par :

$$(\phi, \phi^*) \longrightarrow (e^{ie\alpha} \phi, e^{ie\alpha} \phi^*)$$

Le lagrangien rest invariant

$$L = L_2$$

et par conséquent $\frac{\partial \hat{L}}{\partial (\delta\alpha)} = 0$

Calculons maintenant le courant de Noether
 associée à cette symétrie

$$j^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \delta\alpha)} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \frac{\partial (\partial_{\nu} \phi)}{\partial (\partial_{\mu} \delta\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\nu} \phi^*)} \frac{\partial (\partial_{\nu} \phi^*)}{\partial (\partial_{\mu} \delta\alpha)}$$

avec
$$\begin{cases} \delta \phi = -ie(\delta\alpha) \phi \\ \delta \phi^* = +ie(\delta\alpha) \phi^* \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \delta (\partial_{\nu} \phi) = -ie \partial_{\nu} (\delta\alpha) \phi - ie \delta\alpha \partial_{\nu} \phi \\ \delta (\partial_{\nu} \phi^*) = +ie \partial_{\nu} (\delta\alpha) \phi^* + ie \delta\alpha \partial_{\nu} \phi^* \end{cases}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} J^\mu &= ie (\varphi^* \partial^\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^* \varphi) \\ &= ie (\varphi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \varphi) \end{aligned}$$

Par analogie au cas de l'ép. de K.G.
Cette densité joue le rôle d'une densité de charge électrique et par conséquent le champ de K.G. complexe décrit un champ chargé. La conservation de Noether implique la conservation de la charge.

c) champ scalaire

il est décrit par la densité lagrangienne

$$L_{\text{scalaire}} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - V(\phi^* \phi)$$

V est une fonction régulière arbitraire.

les équations de champs sont

(43)

$$(\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi) = - \frac{\partial V}{\partial \phi^*}$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + \mu^2 \phi^*) = - \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

la charge de Noether de la symétrie

$$(\phi, \phi^*) \rightarrow (e^{-ie\alpha} \phi, e^{ie\alpha} \phi^*)$$

est comme précédemment

$$j^\mu = ie (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi)$$

Champs spinoriels de Dirac :

Comme nous l'avons déjà vu l'ép. de Dirac

est une ép. du 1^{er} ordre sur un ψ à 4 composantes

dit spinors de Dirac qui décrit une particule

de spin 1/2. De la même manière qu'on fait

avec K.G, faisons avec Dirac, ie, soit

un champ spinorielle, qui se transforme comme

un spinors, et soit le densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi$$

$$\text{avec } \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

(44)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{i}{2} \gamma^\mu \psi$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \partial_\mu \psi = i \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - m \psi = 0$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de Dirac. m étant la masse du champ.
L'autre E.p. donne l'équation adjointe de Dirac

$$+ i (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0$$

Le tenseur impulsion énergie est donné par

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \partial^\nu \bar{\psi} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{Dirac}}$$

et comme $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = 0$

on obtient

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

(45)

ce tenseur n'est pas symétrique mais se peut être symétrisé (T.D.)

L'impulsion-énergie est

$$\begin{aligned}
 P^\mu &= \int d^3x T^{0\mu} \\
 &= \frac{i}{2} \int d^3x (\bar{\psi} \gamma^0 \partial^\mu \psi - \partial^\mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi) \\
 &= \frac{i}{2} \int d^3x (2\bar{\psi} \gamma^0 \partial^\mu \psi - \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma^0 \psi))
 \end{aligned}$$

pour $\mu = 1, 2, 3$ le terme de surface est nul.
 pour $\mu = 0$ ce terme est encore nul à cause de la conservation de la charge de Dirac.
 d'où $P^\mu = i \int d^3x (\bar{\psi} \gamma^0 \partial^\mu \psi)$

$$\begin{aligned}
 P^0 &= i \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \partial^0 \psi \\
 &= \int d^3x \bar{\psi} (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi
 \end{aligned}$$

$$H = \bar{\psi} (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi = T^{00}$$

on s'occupe l'esp du champ de Dirac.
 revenant à la conservation de la charge de

la aussi l'équation est invariante par

(46)

la transformation

$$(\psi, \bar{\psi}) \rightarrow (e^{ie\alpha} \psi, e^{ie\alpha} \bar{\psi})$$

le courant de Noether est

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \frac{\partial(\partial_\nu \psi)}{\partial(\partial_\mu \alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \bar{\psi})} \frac{\partial(\partial_\nu \bar{\psi})}{\partial(\partial_\mu \alpha)}$$

$$\begin{cases} \delta \psi = -ie \delta \alpha \psi & \delta(\partial_\mu \psi) = -ie \partial_\mu \delta \alpha \psi + \dots \\ \delta \bar{\psi} = ie \delta \alpha \bar{\psi} & \delta(\partial_\mu \bar{\psi}) = ie(\partial_\mu \delta \alpha) \bar{\psi} + \dots \end{cases}$$

$$j^\mu = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (-ie \psi) + (+ie \bar{\psi}) (-\frac{i}{2} \gamma^\mu \psi)$$

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \text{ et on a}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{ou bien}$$

$$\partial_0 Q = 0 \quad \text{ie,} \quad \partial_0 \left(\int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) = 0$$

j^μ représente le densité de courant
 $e \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi$ étant le charge de Dirac

(47)

Champs en interaction

2. Champ de K.G. en interaction avec un champ de Maxwell:

Par analogie avec l'ép de K.G., on sait que en présence d'un champ A^μ l'ép de K.G se change comme

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$$

Alors faisons la même chose

$$L_{KG} \longrightarrow L_{KG}^{int}$$

$$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \longrightarrow (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

Le lagrangien de ce système est alors le suivant

$$L = L_{Max} + L_{KG} + L^{int}$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

les équations des champs sont les suivantes

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

48

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_\mu)} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = - \int d^4x \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \right)$$

avec $\int d^4x = ie \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = - \int d^4x A_\mu \text{ avec } \int d^4x = -ie \left[(\partial_\mu \phi^* - ie A_\mu \phi^*) \phi - \phi^* (\partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi) \right]$$

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - ie (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) A^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi + e^2 A_\mu A^\mu \phi + ie A_\mu \partial^\mu \phi^*$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi^* - ie \phi^* A^\mu$$

l'eq pour ϕ est

$$((\partial_\mu - ie A_\mu)(\partial^\mu - ie A^\mu) + m^2) \phi = 0$$

et même l'eq pour ϕ^* est (D)

$$((\partial_\mu + ie A_\mu)(\partial^\mu + ie A^\mu) + m^2) \phi^* = 0$$

(49)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) + 2A^\mu \phi^* \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -F^{\nu\mu}$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = +ie (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi) - 2A^\mu \phi^* \phi$$

le lagrangien $\mathcal{L}$ est invariant par les transformations

$$(\phi, \phi^*, A_\mu) \rightarrow (\bar{\phi}, \bar{\phi}^*, \bar{A}_\mu) /$$

$$\begin{cases} \bar{\phi} = e^{ie\alpha(x)} \phi \\ \bar{\phi}^* = e^{-ie\alpha(x)} \phi^* \\ \bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

pu'on appelle transformation de jauge

locale (pour α indépendant de x elle

est dite transf de jauge globale)
le lagrangien reste invariant par cette transformation?
En effet? $F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$

$$\bar{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{D}_\mu (e^{ie\alpha} \phi^*)$$

$$\bar{D}^\mu (e^{-ie\alpha} \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

(50)

avec $\bar{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$
 or on a :

$$(\bar{D}_\mu (e^{-ie\alpha} \phi))^* \bar{D}^\mu (e^{-ie\alpha} \phi)$$

$$= (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi$$

d'où l'invariance de $\mathcal{L}$ et par conséquent
 de l'action :

$\mathcal{L}$ n'est pas difficile de s'assurer que
 le courant conservé est (T.D)

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\alpha})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial (\partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\mu \bar{\alpha})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \frac{\partial (\partial_\mu \phi^*)}{\partial (\partial_\mu \bar{\alpha})}$$

$$J^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = +ie (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi) - 2e^2 A^\mu \phi^* \phi$$

Remarque: on dit que la théorie de champ
 à l'invariance de jauge.

(51)

*) Champ de Dirac en interaction, avec un champ de Maxwell.

Lià encore on introduit la covariation minimale $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$

$$L_{\text{Dirac}} \rightarrow L_{\text{Dirac}}^{\text{Interact.}}$$

$$\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi$$

$$\rightarrow \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - ((\partial_\mu - ieA_\mu) \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi$$

Le lagrangien du système devient alors :

$$L = L_{\text{em}} + L_{\text{Dirac}} + L_{\text{int.}}$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi - ((\partial_\mu - ieA_\mu) \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \quad (52)$$

les équations des champs s'écrivent comme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (A_\mu)} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0$$

le lagrangien d'interaction est

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -A_\mu j_{\text{Dirac}}^\mu$$

on vérifie aisément que les Eqs précédentes sont

$$(i \not{\partial} - e \not{A}) \psi - m \psi = 0$$

$$\bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} + e \not{A}) + m \bar{\psi} = 0$$

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = j_{\text{Dirac}}^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Invariance de jauge

la théorie est invariante par le transitif de jauge en inante

(53)

$$(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) \rightarrow (\psi', \bar{\psi}', A'_\mu)$$

$$\begin{cases} \psi' = e^{-ie\alpha(x)} \psi \\ \bar{\psi}' = e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi} \\ A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \end{cases}$$

on a $F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi}' e^{ie\alpha(x)} \gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. (\partial_\mu + ieA'_\mu) e^{-ie\alpha(x)} \psi \right. \\ &\quad \left. - ((\partial_\mu - ieA'_\mu) e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}') \gamma^\mu e^{-ie\alpha(x)} \psi \right) \\ &\quad - m \bar{\psi}' \psi \end{aligned}$$

Comme $(\partial_\mu + ieA'_\mu) e^{-ie\alpha(x)} \psi$

$$= e^{-ie\alpha(x)} (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi$$

et $(\partial_\mu - ieA'_\mu) e^{ie\alpha(x)} \bar{\psi}'$

$$= e^{ie\alpha(x)} (\partial_\mu - ieA_\mu) \bar{\psi}$$

on obtient alors

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$$

(54)

Le courant conserve au cours de cette transformation est

$$j^u = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_u \delta a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_u \psi)} \frac{\partial (\partial_u \psi)}{\partial (\partial_u \delta a)} + \frac{\partial (\partial_u \bar{\psi})}{\partial (\partial_u \delta a)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_u \bar{\psi})} = j^u_{\text{Dirac}} = e \bar{\psi} \gamma^u \psi$$

la théorie est invariante de jauge.

Cas du champ extérieur A^μ_{ext} :

Dans ce cas il n'y a pas de variation sur A_μ et

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{matière}} - j^u A_\mu^{\text{ext}}$$

j^u pour K.G. est

$$j^u = ie (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^u \phi) - 2e^2 A^\mu_{\text{ext}} \phi^* \phi$$

j^u pour Dirac est

$$j^u = e \bar{\psi} \gamma^u \psi$$

(55)