

B) Quantification des champs libres

* méthode de la quantification canonique

D'après le cours de la M. P. standard on voit que quantifier revient à remplacer les grandeurs physiques par des observables agissant sur un certain espace et remplacer les crochets de Poisson régissant la dynamique par des commutateurs. Cette méthode

s'appelle quantification canonique.

Pour les systèmes de temps des champs on a pu étendre le formalisme des crochets de Poisson. Pour les quantifier nous procédons de la même manière, i.e.,

Puisque toutes les grandeurs physiques s'écrivent en fonction de $\varphi(x)$ et $\pi_\varphi(x)$ nous remplaçons naïvement

(56)

$\varphi(x)$ et $\pi_\varphi(x)$ par des opérateurs

$\hat{\varphi}(x)$ et $\hat{\pi}_\varphi(x)$ agissant sur un certain espace (pu'on définir par la suite)

puis nous modifions $\{ \}_{\text{poisson}} \rightarrow [,]$

Donc nous partons du lagrangien

classique

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$$

d'où nous déduisons le champ conjugué de φ :

$$\pi_\alpha = \frac{\delta L(t)}{\delta(\partial_0 \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi(\vec{x}, t))}$$

les quantités φ et π étant des C-nombre nous les remplaçons alors par des opérateurs : φ et π .
venant

(57)

$$[\varphi_\alpha(\vec{x}, t), \pi_\beta(\vec{y}, t)] = i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\varphi_a(\vec{x}, t), \varphi_b(\vec{y}, t)] = 0$$

$$[\pi_a(\vec{x}, t), \pi_b(\vec{y}, t)] = 0$$

A partir de ces opérateurs fondamentaux nous construirons toutes les grandeurs physiques et leurs dynamique.

Par exemple l'Hamiltonien

$$H = \int d^3x \left(\sum_a \pi_a(\vec{x}, t) \dot{\varphi}(\vec{x}, t) - \mathcal{L} \right)$$

Cette procédure souffre de plusieurs difficultés parmi :

- * le problème d'ordre des opérateurs
- * multiplication des opérateurs champs au même point spatial $\{\vec{x}\}$
- * l'espace de Hilbert sur lequel agissent les opérateurs n'est pas toujours spécifié.

Ainsi de suite...

(58)

* Quantification du champ de K.G. réel

La densité lagrangienne est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right)$$

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$$

$(\varphi, \pi) \longrightarrow$ opérateurs

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right)$$

Cette expression ne connaît pas la difficulté de l'ordre sur π et φ . Mais comme nous allons le voir le produit au même point x induit avec lui des difficultés de divergence on évite cette difficulté en réécrivant H sous une forme dite normale : H_N ,

Voyons d'abord comment la solution de

l'éq de K.G. s'écrit :

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0$$

(§9)

les solutions indépendantes sont

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\pm i k x} = e^{\pm i (k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ \text{avec } k^2 = m^2 \end{array} \right.$$

la solution générale est alors

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 k \, c(k) e^{i k x} \delta(k^2 - m^2)$$

$c(k)$ une fonction de k

on sait que

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2)$$

$$= \frac{1}{2\omega_k} \left(\delta(k^0 - \omega_k) + \delta(k^0 + \omega_k) \right)$$

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(c(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right. \\ & \left. + c(-\omega_k, \vec{k}) e^{-i(\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right) \end{aligned}$$

(60)

posons: $C(-\omega_k, \vec{k}) = a(\vec{k})$

$C(+\omega_k, \vec{k}) = b(\vec{k})$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} + b(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

Comme $\phi(x)$ est réel on a

$$a^*(\vec{k}) = b(\vec{k})$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(a(\vec{k}) e^{-ikx} + a^*(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$k = (\omega_k, \vec{k})$
le

champ $\Pi(x)$ est alors :

$$\Pi(x) = \dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(-i\omega_k a(\vec{k}) e^{-ikx} + i\omega_k a^*(\vec{k}) e^{ikx} \right)$$

$$\Pi(x) = (-i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} - a^*(\vec{k}) e^{ikx} \right]$$

(61)

Passons maintenant à la quantification

$\varphi(x)$ opérateur est

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left[a(k) e^{-ikx} + a^\dagger(k) e^{ikx} \right]$$

où $a(k)$ est un opérateur et $a^\dagger(k)$ son adjoint hermitique

$$\varphi^\dagger(x) = \varphi(x) \quad \text{Champ réel.}$$

Puisque φ et π vérifient des relations de commutation, il en est de même pour

a et $a^\dagger$. Alors cherchons ces relations

Soit la base de fonctions

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx}$$

Il n'est pas difficile de vérifier

$$\int d^3x f_k^*(x) i \partial_0 f_q(x) = \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad (62)$$

$$\int d^3x \, f_k(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_p(x) = 0$$

d'où on tire :

$$a(k) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \, f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x)$$

$$a^\dagger(k) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \, \varphi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)$$

des relations de commutations

$$[\varphi_\alpha(\vec{x}, t), \pi_\beta(\vec{y}, t)] = i \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\varphi_\alpha(\vec{x}, t), \varphi_\beta(\vec{y}, t)] = 0$$

$$[\pi_\alpha(\vec{x}, t), \pi_\beta(\vec{y}, t)] = 0$$

on tire

$$[a(k), a^\dagger(q)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

$$[a(k), a(q)] = 0 = [a^\dagger(k), a^\dagger(q)]$$

(63)

Les opérateurs $a(k)$, $a^\dagger(k)$ sont similaires
à ceux de l'oscillateur harmonique

Connu sous le nom : opérateurs de création
et annihilation. Le champ scalaire quantifié
est un ensemble d'oscillateurs quantiques
qui s'interprètent en termes de particules

On définit alors l'opérateur :

$$N(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(k) a(k)$$

qui vérifie

$$[N(k), N(q)] = 0$$

$$[N(k), a(q)] = -a(q) \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

$$[N(k), a^\dagger(q)] = +a^\dagger(q) \delta(\vec{k} + \vec{q})$$

Cette opérateur permet d'exprimer
l'Hamiltonien comme

(64)

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k \{ a(k) a^\dagger(k) + a^\dagger(k) a(k) \}$$

$$= \int d^3 k \left\{ \omega_k N(k) + \frac{1}{4(2\pi)^3} [a(k), a^\dagger(k)] \right\}$$

qui montre que H contient un terme infini de la forme $\int d^3 k \frac{1}{2} \omega_k \delta(\vec{0})$. En fait est gênant par sa valeur infinie mais il est indépendant de $a(k)$ et $a^\dagger(k)$ et on a toujours :

$$[H, N(k)] = 0.$$

Dans la suite on définit H par un hamiltonien

$:H:$ qui ne comprend pas ce terme infini mais qui vérifie $[:H:], N(k)] = 0$.

on peut alors trouver une base commune à H et $N(k)$ on la note :

$$\{ |n(q)\rangle, \forall q = (\omega_q, \vec{q}) \} \quad (65)$$

Ces états vérifient

$$N(k) |n(k)\rangle = n(k) |n(k)\rangle \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k})$$

$n(k)$ est une valeur propre de $N(k)$

Cette valeur propre est positive $n(k) \geq 0$

En effet :

$$\langle n(k) | a^\dagger(k) a(k) | n(k) \rangle$$

$$= 2\omega_k (2\pi)^3 n(k) \langle n(k) | n(k) \rangle \geq 0$$

$$\text{d'où } n(k) \geq 0$$

pour $n(k) = 0$ on a :

$$N(k) |0\rangle = 0$$

$|0\rangle$ est dit état du vide

qui peut se définir aussi par

$$a(k) |0\rangle = 0 \quad \forall k = (\omega_k, \vec{k})$$

la base $\{|n(k)\rangle\}$ engendre un espace dit de Fock.

on a en plus :

$$N(k) a^\dagger(q) |n(k)\rangle = a^\dagger(q) N(k) |n(k)\rangle$$

$$+ [N(k), a^\dagger(q)] |n(k)\rangle$$

$$= (n(k) + \delta(\vec{k} - \vec{q})) a^\dagger(q) |n(k)\rangle$$

donc $a^\dagger(q) |n(k)\rangle$ est vecteur propre de $N(k)$ avec la valeur propre

$$n(k) + \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

de même

$$N(k) a(q) |n(k)\rangle = (n(k) - \delta(\vec{k} - \vec{q})) a(q) |n(k)\rangle$$

Ceci permet d'introduire un opérateur

$$N = \int d^3k N(k)$$

sa valeur propre est n un entier ≥ 0

qu'on interprète comme nombre total de particules contenues dans l'état

$N(k)$ est une densité de nombre de particules dans le volume d^3k autour de $\vec{k}$.

(67)

on a :

$$[N, a(k)] = -a(k)$$

$$[N, a^\dagger(k)] = a^\dagger(k)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N |n(k)\rangle = n |n(k)\rangle \\ \text{avec } n = \int d^3k n(k) \end{array} \right.$$

$$N a(q) |n(k)\rangle = (n-1) a(q) |n(k)\rangle \quad n \geq 1$$

$$N a^\dagger(q) |n(k)\rangle = (n+1) a^\dagger(q) |n(k)\rangle$$

Il e apparaît plus que :

$a(k)$ détruit une particule d'impulsion

$\vec{k}$ et de masse m

$a^\dagger(k)$ crée une particule d'impulsion

$\vec{k}$ et de masse m

les particules satisfont à l'E_q de
Klein Gordon.

$|0\rangle$ est l'état qui ne contient aucune
particule.

(68)

Comme $[a^\dagger(q), a^\dagger(k)] = 0$ l'ordre de l'autre $a^\dagger(q)$ et $a^\dagger(k)$ est sans importance. Un état est complètement déterminé par la donnée des impulsions $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_m$.

$$|k_1, k_2, \dots, k_m\rangle = a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) \dots a^\dagger(k_m) |0\rangle$$

$$\text{et on a : } |k_1, k_2, \dots, k_m\rangle = |k_2, k_1, \dots, k_m\rangle$$

$$= \text{une permutation quelconque de } |k_1, \dots, k_m\rangle$$

on dit que l'état est complètement symétrique.

$$|k_1, k_2, \dots, k_m\rangle = \frac{1}{m!} \sum_{\text{permutation}} a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) \dots a^\dagger(k_m) |0\rangle$$

C'est un état à m particules.

L'espace de Fock admet alors la base de tous les états à m particules

$$\text{avec } m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (69)$$

Les m particules sont indiscernables au sens de la M. Q. et suivent la statistique de Bose Einstein (B. E.). Ceci découle directement des relations de commutations de φ et $\varphi^\dagger$.

Définition de la forme Normale :

Définissons d'abord l'énergie de l'état $|n(k)\rangle$. Comme le terme infini $\int d^3k \frac{1}{2} \omega_k \delta(\vec{0})$ est indépendant de l'état, on définit l'énergie en retranchant ce terme (on mesure les différences d'énergie) d'où

$$H = \int d^3k \omega_k N(k) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k a^\dagger(k) a(k)$$

Ce qui est exactement le même si on définit :

$H_{\text{par}} \equiv H$: forme normale

on a⁺ à gauche et a à droite.

puisque $[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0$

cette définition est sans ambiguïté.

Exemple :

$$: \varphi(x) : = \varphi(x)$$

(70)