

Rappel classique:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\mathcal{L}$ reste invariant si $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$

Si $A_\mu = \partial_\mu \varphi(x)$ Alors $F_{\mu\nu} = 0$

donc $A_\mu = \partial_\mu \varphi$ ne contient pas de Physique

Puisque on a la liberté sur A_μ on peut toujours fixer Λ tel que $\partial_\mu A^\mu = 0$

la jauge de Lorentz

les équations de mouvement

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

dans la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ on a

$$\square A^\nu = 0$$

Si non on peut reformuler le problème dans sa généralité. on a:

Solution en ondes planes:

$$a^\nu(x) = \varepsilon^\nu(k) e^{-ikx} \quad \varepsilon^\nu?$$

l'équation de mouvement donne

$$k^\nu \varepsilon^\nu - k^\nu (k_\mu \varepsilon^\mu) = 0$$

première solution $\varepsilon^\nu \propto k^\nu$

$$\varepsilon^\nu = f(k) k^\nu$$

$$f(k) k^2 k^\nu - f(k) k^2 k^\nu = 0$$

$$a_\mu(x) = f(k) k^\nu e^{-ikx}$$

$$= \partial_\mu (i f(k) e^{-ikx})$$

qui n'a pas de contenu physique
on s'appelle polarisation scalaire.

l'invariance de jauge permet de l'éliminer

deuxième solution non triviale: $F_{\mu\nu} \neq 0$

$$k^2 = 0 \quad \text{masse du photon nulle}$$

$$k \cdot \varepsilon(k) = 0 \quad \text{avec } \varepsilon_\mu(k) \neq f(k) k_\mu$$

Il existe 3 polarisations $\perp k$. Parmi
elle une $\propto k$ (solution triviale)

(92)

Physiquement il ne reste que deux polarisations physiques, dites polarisations transverses qui décrivent l'état du photon.

la solution s'écrit alors comme

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \sum_{\alpha=1}^2 \left[a^{(\alpha)}_{(k)} \epsilon^{(\alpha)}_\mu e^{-ikx} + a^{(\alpha)*}_{(k)} \epsilon^{(\alpha)*}_\mu e^{ikx} \right]$$

avec $k^2 = 0$ $k^\mu \epsilon^{(\alpha)}_\mu = 0$

$\epsilon^{(\alpha)}_\mu \neq k_\mu$ $\alpha = 1, 2$

on peut toujours rajouter la contribution de la solution triviale $\epsilon_\mu = k_\mu$ puis que elle ne contribue pas.

$$\int d^3k \left[f(k) k_\mu e^{-ikx} + f^*(k) k_\mu e^{ikx} \right]$$

$$= \partial_\mu \int d^3k \left[i f(k) e^{-ikx} - i f^*(k) e^{ikx} \right]$$

Sans contenu physique.

Problème de la quantification canonique.

la quantification canonique s'appuie sur le moment conjugué π_μ qui dans le cas de Maxwell :

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0}$$

pour $\mu=0$ on a : $\pi_0 = 0$
et en plus $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ induit avec elle

$$\partial_0 F^{0\nu} + \partial_i F^{i\nu} = 0 \quad \text{pour } \nu=0$$

$$\partial_i F^{i0} = 0, \text{ i.e., } \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0$$

une autre contrainte sur $\vec{\pi}$.

et on ne peut pas imposer

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \pi^\nu(\vec{y}, t)] = i \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Car pour $\mu=\nu=0$ elle n'a pas de sens

En fait $\pi_0 = 0$ n'est pas un résultat de l'invariance de jauge mais plutôt une caractéristique des champs de jauge

La solution est :

la quantification covariante

Elle rajoute un terme de jauge au lagrangien
càd: pour $\partial_\mu A^\mu = 0$ ce terme n'apparaît pas.

$$\mathcal{L}_\lambda = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial \dot{A}^\mu} = F_{\mu 0} - \lambda g_{\mu 0} (\partial_\nu A^\nu)$$

qui donne :

$$\pi_0 = -\lambda (\partial_\nu A^\nu)$$

$$\pi_i = F_{i0} \text{ les mêmes que pour } \lambda=0$$

L'éq classique du mouvement est

$$\square A^\nu - (1-\lambda) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

Pour $\lambda=1$ "jauge" de Feynman
elle devient

$\square A^\nu = 0$ type K.G avec
4 composantes la solution est de la forme

(95)

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\alpha=0}^3 \left[a^{(\alpha)}(k) \varepsilon_\mu^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + a^{(\alpha)*}(k) \varepsilon_\mu^{(\alpha)*}(k) e^{ikx} \right]$$

avec $k^2 = 0$ (massenulle) ; $k^0 = |\vec{k}|$

la quantification canonique se fait au moyen des commutateurs (photons = Bosons)

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \pi^\nu(\vec{y}, t)] = i \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[A_\mu(t, \vec{x}), A_\nu(t, \vec{y})] = -[\pi_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{y}, t)]$$

Il existe 04 polarisations possibles, puisque
on a pas imposé $\partial_\mu A^\mu = 0$ puisque on
sait que $\pi_0 \neq 0$.

choix des vecteurs :

$$\varepsilon^{(0)}(k) = (1, 0, 0, 0)$$

$$\varepsilon^{(1)}(k) = (0, 1, 0, 0)$$

$$\varepsilon^{(2)}(k) = (0, 0, 1, 0)$$

$$\varepsilon^{(3)}(k) = (0, 0, 0, 1)$$

avec $k = (k^0 = |\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$

On voit bien que :

$$\left. \begin{aligned} (\epsilon^{(0)}(k))^2 &= 1 \\ (\epsilon^{(1)}(k))^2 &= -1 \end{aligned} \right\} \epsilon^{(2)}(k) \epsilon^{(2')}(k) = g^{22'}$$

$$\epsilon^{(1)}(k) \cdot k = \epsilon^{(2)}(k) \cdot k = 0$$

$\epsilon^{(1)}(k)$ et $\epsilon^{(2)}(k)$ sont dites polarisations transverses. $\epsilon^{(0)}(k)$ polarisation longitudinale.
 $\epsilon^{(0)}(k)$ polarisation scalaire.

les règles de commutation permettent d'obtenir
 (voir K.G.)

$$[a^{(2)}(k), a^{(2')\dagger}(q)] = -2k^0 (2\pi)^3 g^{22'} \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

$$[a^{(2)}(k), a^{(2')}(p)] = 0 = [a^{(2)\dagger}(k), a^{(2')\dagger}(p)]$$

remarquons que $[a^{(0)}(k), a^{(0)\dagger}(q)] = -2k^0 (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q})$
 apparition d'un signe (-) géant.

(97)

la microcausalité est assurée par

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = -i g_{\mu\nu} \Delta(x-y)$$

avec

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \left[e^{-ik(x-y)} - e^{+ik(x-y)} \right]$$

Ce calcul est effectué pour $\lambda=1$. Pour λ quelconque la quantification contredirait mais le résultat physique est indemne.

Espace de Fock.

Soit l'état du vide défini par :

$$Q^{(d)}(k) |0\rangle = 0 \quad d=0,1,2,3$$

Construisons un état à polarisation scalaire (1 particule)

$$a^{(+)}(k) |0\rangle$$

à cause du signe (-) de la relation de commutation on a :

$$\|a^{(+)}(k) |0\rangle\|^2 = \langle 0 | a^{(+)}(k) a^{(+)}(k) |0\rangle < 0$$

C'est à dire que l'espace de Fock à une métrique indéfinie

(98)

les autres états de Polarisation sont une norme positive. On dit que l'espace de Fock contient des états non physiques qu'il faudrait éliminer pour pouvoir interpréter correctement la théorie. Les états physiques sont ceux des polarisations $E^{(1)}_{\mu}(k)$ et $E^{(2)}_{\mu}(k)$.

Comme il est facile de voir :

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu(+)+\partial_\mu A^\mu(-)$$

(+ énergie positive, - énergie négative)

$$\text{on a : } \langle 0 | \partial_\mu A^\mu | 0 \rangle = 0$$

et en plus un état physique $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = a^{(\alpha_1)}_{+}(k_1) a^{(\alpha_2)}_{+}(k_2) \dots a^{(\alpha_n)}_{+}(k_n) |0\rangle$$

doit vérifier aussi :

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0$$

Condition de Gupta et Blehler.

$$\text{pour : } \partial_\mu A^{\mu(+)} |\psi\rangle = 0 ; \langle \psi | \partial_\mu A^{\mu(+)} = 0$$

$$\Rightarrow \langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{\mu(+)} | \psi \rangle$$

$$+ \langle \psi | \partial_\mu A^{\mu(-)} | \psi \rangle = 0$$

$$\text{avec : } i\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \sum_{\alpha=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\alpha)}(k) a^{(\alpha)}(k) e^{-ikx}$$

$$(\partial_\mu A^{\mu(-)}(x)) = (\partial_\mu A^{\mu(+)}(x))^\dagger$$

(99)

Cette condition est équivalente à

$$i \partial_\mu A^\mu(x) |\psi\rangle = 0$$

ou bien

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ikx}}{2k^0} \sum_{\alpha=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\alpha)} a^{(\alpha)}(k) |\psi\rangle = 0$$

Supposons que $|\psi\rangle$ peut avoir des polarisations scalaires et longitudinales

$$|\psi\rangle = a_{(p_1)}^{(0)+} a_{(p_2)}^{(0)+} - a_{(p_0)}^{(0)+} a_{(k_1)}^{(3)} - a_{(k_n)}^{(3)} |\psi\rangle_{\text{phys}}$$

$$\partial_\mu A^\mu(x) |\psi\rangle = 0 \quad \text{implique}$$

$$\sum_{\alpha=0,3} k^\mu \epsilon_\mu^{(\alpha)} a^{(\alpha)}(k) |\psi\rangle = 0$$

comme $k^\mu \epsilon_\mu^{(0)} = -k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}$

alors on obtient

$$a^{(0)}(k) |\psi\rangle = a^{(3)}(k) |\psi\rangle$$

soit : $\bar{N}$ opérateur Nombre de particules scalaires - longitudinales (= non plus physiques)

$$\bar{N} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \left[a_{(k)}^{(3)} a_{(k)}^{(3)} - a_{(k)}^{(0)} a_{(k)}^{(0)} \right]$$

$$[\bar{N}, a_{(k)}^{(0)}] = a_{(k)}^{(0)}, \quad [\bar{N}, a_{(k)}^{(3)}] = a_{(k)}^{(3)}$$

(100)

$$\bar{N}|\psi\rangle = \bar{n}|\psi\rangle$$

$$\bar{n}\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\bar{N}|\psi\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} \langle\psi| [a_{\vec{k}}^{(3)} a_{\vec{k}}^{(3)} - a_{\vec{k}}^{(2)} a_{\vec{k}}^{(0)}] |\psi\rangle$$

Comme $a_{\vec{k}}^{(3)}|\psi\rangle = a_{\vec{k}}^{(0)}|\psi\rangle$

et $\langle\psi| a_{\vec{k}}^{(3)} = \langle\psi| a_{\vec{k}}^{(0)}$

on obtien

$$\bar{n}\langle\psi|\psi\rangle = 0$$

Si $\bar{n} \neq 0$ $\langle\psi|\psi\rangle = 0$

Si $\bar{n} = 0$ $\langle\psi|\psi\rangle \neq 0$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle_{\text{phys}}$$

un état p.f.

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{n} \geq 0} |\psi_{\vec{n}}\rangle$$

$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle$ et interprétation
se fait sur l'état physique qui contient
seulement les polarisations transversales

$$\varepsilon_{(\mu)}^{(1)} \text{ et } \varepsilon_{(\mu)}^{(2)}$$

101

le hamiltonien s'écrit alors :

$$H = \int d^3x [\pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}] :$$

on trouve

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\sum_{\alpha=1}^3 a^{(\alpha)\dagger}(k) a^{(\alpha)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right]$$

$$= H_T + H^{LS}$$

$$H_T = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^{(1)\dagger}(k) a^{(1)}(k) + a^{(2)\dagger}(k) a^{(2)}(k) \right]$$

$$H^{LS} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^{(3)\dagger}(k) a^{(3)}(k) - a^{(0)\dagger}(k) a^{(0)}(k) \right]$$

et on a :

$$\langle \psi_n | H^{LS} | \psi_n \rangle = \langle \psi | H_{np} | \psi \rangle = 0$$

$$\langle \psi_n | H_T | \psi_n \rangle = 0$$

et

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi_0 | H_T | \psi_0 \rangle$$

Les états physiques ne contiennent que les polarisations transverses et l'énergie qui contribue est transverse.

* $\bar{x} = x + \delta x$; $\delta x_\mu = \delta \omega_{\mu\nu} x^\nu$; $\delta \omega_{\mu\nu} = -\delta \omega_{\nu\mu}$
 • un calcul similaire à celui de la translation

donne

$$\delta I = \int d^4x \left[\partial_\nu \mathcal{L} \delta x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \partial_\mu (\delta x^\nu) \right]$$

* Comme $T^{\mu\nu}$ n'est pas symétrique par construction il est possible de le symétriser en lui ajoutant une divergence.
 * Le moment n'est pas invariant dans une translation d'origine de coordonnées de a^μ le moment angulaire change de la quantité :

$$\Delta J^{\mu\nu} = a^\nu p^\mu - a^\mu p^\nu \quad (\text{montrer le})$$

* On a $\omega_a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ab} \delta \sigma \frac{J^{ab} p^\sigma}{\sqrt{p^2}}$
 dans le repère propre ($\vec{p} = \vec{0}$) $\vec{\omega} \stackrel{?}{=} \vec{J}$

* montrer que les équations de mouvement sont :

$$\partial_0 \phi(\vec{x}, t) = \{ H, \phi(\vec{x}, t) \} = \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)}$$

$$\partial_0 \pi(\vec{x}, t) = \{ H, \pi(\vec{x}, t) \} = - \frac{\delta H}{\delta \phi(\vec{x}, t)}$$

avec :

$$H(t) = \int d^3x T^{00}(\vec{x}, t)$$

* Il n'est pas difficile de montrer que

$$\frac{dQ^S}{dt} = \{ H, Q^S \} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\delta \phi)}$$

$$\text{et que } \{ j_1^{\mu\nu}(\vec{x}, t), j_2^{\mu\nu}(\vec{y}, t) \} = - C_{s_1 s_2}^{s_3} j_3^{\mu\nu}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

* Si $L(t)$ est invariant par translation / t on a $\delta(L(t)) = 0$
 montrer que : $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ou bien $\frac{dH(t)}{dt} = 0$

$$\text{avec : } T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\dot{\phi}^2 - \partial_i \phi \partial^i \phi) + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi$$

* Comme $\alpha_{Dirac} = 0$.

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$$

$$T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu} \text{ Symétriser le}$$

* montrer que :

$$a(\vec{k}) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi(x)$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} \psi(x) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{i k x} \\ k(\omega_k, \vec{k}) \end{aligned} \right.$$

* montrer les relations suivantes :

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

$$[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = [a(\vec{k}), a(\vec{q})] = 0$$

$$[N(k), N(q)] = 0$$

$$[N(k), a(q)] = -a(q) \delta(\vec{k} - \vec{q}) \quad / \quad N(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(k) a(k)$$

$$[N(k), a^\dagger(q)] = +a^\dagger(q) \delta(\vec{k} - \vec{q})$$

$$Dna. N(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} a^\dagger(k) a(k)$$

montrer que :

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \left\{ \omega_k N(k) + \frac{1}{4(2\pi)^3} [a(k), a^\dagger(k)] \right\}$$