Solution TD Série 1

Exo 1 formes algébriques avec $z = x+iy$

$$z_1 = \frac{\bar{z}}{z} \qquad\qquad z_2 = \frac{iz}{\bar{z}}$$

alors

$$z_1 = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x-iy)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$z_2 = \frac{i(x+iy)}{x-iy} = \frac{i(x+iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{-2xy}{x^2+y^2} + i\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Exo 2 formes exponentielles

$$z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 9e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad z_3 = 3e^{i\pi}$$

$$z_4 = \frac{-i\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad ; \quad z_5 = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5} = \frac{2^3\,e^{i\pi}}{2^{\frac{5}{2}}\,e^{-i\frac{\pi 5}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{9\pi}{4}}$$

$$z_5 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_6 = \sin(x) + i\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$z_6 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Exo 3 résoudre les équations suivantes :

1) $z+2i = iz-1 \Rightarrow z(1-i) = -1-2i \Rightarrow z = \dfrac{-1-2i}{1-i} = \dfrac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

2) $(3+2i)(z-1) = i \Rightarrow z = \dfrac{i}{(3+2i)} + 1 = \boxed{\dfrac{15}{13} + \dfrac{3}{13}i = z}$

3) $(2-i)z+1 = (3+2i)z - i \Rightarrow z = \dfrac{1+i}{(1+3i)} = \dfrac{(1+i)(1-3i)}{10} = \boxed{\dfrac{2}{5} - i\,\dfrac{1}{5} = z}$

4) $(4-2i)z^2 = (1+5i)z \Rightarrow z = \dfrac{(1+5i)}{(4-2i)} = \dfrac{(1+5i)(4+2i)}{20} = \boxed{\dfrac{-3}{10} + i\dfrac{11}{10} = z}$

Exo4 équations avec conjugués

1) $2z+i=\bar{z}+1 \Rightarrow 2(x+iy)+i = x-iy+1 \Rightarrow x+i3y = 1-i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

2) $2z+\bar{z} = 2+3i \Rightarrow 2x+2iy+x-iy = 2+3i \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 3 \end{cases}$

3) $2z+2\bar{z} = 2+3i \Rightarrow 4x = 2+3i \Rightarrow$ il n'y a pas de solution tant que x réel

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
$x, y \rightarrow z$

Exo5 système d'équation

1) $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = -17 \end{cases} \Rightarrow -z_2 + 3iz_2 = -17+i \Rightarrow z_2 = \frac{(-17+i)}{(-1+3i)}$

donc $z_2 = 2+5i$

et $z_1 = \frac{z_2+i}{2} = 1+3i = z_1$

2) $\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 = i+7 \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases} \Rightarrow z_2(i-6) = 7-32i \Rightarrow z_2 = \frac{-7+32i}{6-i}$

$$\Rightarrow z_2 = \frac{(-7+32i)(6+i)}{37}$$

$$z_2 = \frac{-74+185i}{37} = -2+5i$$

$$z_1 = 11+2iz_2 = 1-4i$$

Exo6 Equations d'ordre supérieur

$z^3+3z^2+3z+3=0 \Rightarrow (z+1)^3+2=0 \Rightarrow (z+1)^3 = 2e^{i(\pi+2k\pi)}$

$$\Rightarrow z = 2^{1/3} e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} - 1$$

pour $k=0$ $\quad z_0 = 2^{1/3}e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$

$k=1$ $\quad z_1 = 2^{1/3}e^{i\pi} - 1$

$k=2$ $\quad z_2 = 2^{1/3}e^{i\frac{5\pi}{3}} - 1$

Exo 6 (suite)

$$(z-1)^4 = 1 \Rightarrow (z-1)^4 = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z-1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)} + 1$$

pour $k=0$ $\quad z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} + 1$

$k=1$ $\quad z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} + 1$

$k=2$ $\quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} + 1$

$k=3$ $\quad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} + 1$

Exo 7 Manipulation des puissances

1) $(1-i)^{1000} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{1000} = 2^{500} e^{-i\,250\pi} = 2^{500}$

2) $(\sqrt{3}-i)^3(-1+i\sqrt{3})^{-5} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-5} = 2^3 \times 2^5 \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{10\pi}{3}}\right)$

$$= 2^8 e^{-i\frac{23\pi}{6}} = 2^8\left(e^{-i\frac{(24\pi-\pi)}{6}}\right)$$

$$= 2^8 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exo 8 Représentation graphique

$(i)^{\frac{1}{6}} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}\right)^{\frac{1}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right)}$; Les six solutions sont

$k=0$ $\quad S_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$

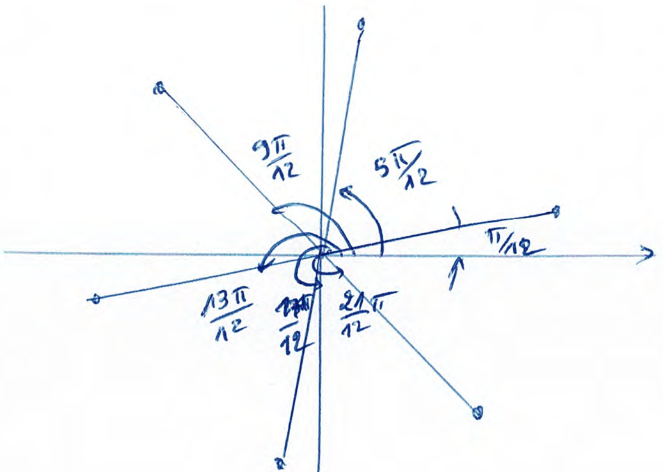
$k=1$ $\quad S_1 = e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$k=2$ $\quad S_2 = e^{i\frac{9\pi}{12}}$

$k=3$ $\quad S_3 = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$k=4$ $\quad S_4 = e^{i\frac{17\pi}{12}}$

$k=5$ $\quad S_5 = e^{i\frac{21\pi}{12}}$



Exo 9 Travail maison

Solution Série de TD 2

Exo 1

Vérification que si $z_0 = \pi + i\log(2+\sqrt{5})$ alors $|\sin z_0| = 2$

$$\sin z_0 = \frac{e^{iz_0} - e^{-iz_0}}{2i} = \frac{-i}{2}\left(e^{i(\pi + i\log(2+\sqrt{5}))} - e^{-i(\pi + i\log(2+\sqrt{5}))}\right)$$

$$\sin z_0 = \frac{-i}{2}\left(\frac{e^{i\pi}}{(2+\sqrt{5})} - e^{-i\pi}(2+\sqrt{5})\right) = -\frac{i}{2}\left(\frac{-1}{2+\sqrt{5}} + 2+\sqrt{5}\right)$$

$$\sin z_0 = -\frac{i}{2}\left(\frac{8+4\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right) = -2i \Rightarrow \boxed{|\sin z_0| = 2}$$

Exo 2 formes algébrique

1) $$f(z) = e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos y - i\sin y)$$

2) $$f(z) = \sin z = \frac{e^{+iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}}{2i}$$

$$= \cos(x)\left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}\right) + \sin(x)\left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right)$$

$$\sin z = \sin(x)\,ch(y) + i\cos(x)\,sh(y)$$

3) $$f(z) = 2^{z^2} = e^{z^2\ln(2)} = e^{(x^2-y^2+2ixy)\ln(2)} = e^{(x^2-y^2)\ln(2)}\,e^{i2xy\ln(2)}$$

$$= 2^{(x^2-y^2)}\,e^{i2xy\ln(2)} = 2^{(x^2-y^2)}\left(\cos(2xy\ln(2)) + i\sin(2xy\ln(2))\right)$$

Détermination principale

4) $$f(z) = ch(z-i) = \frac{e^{z-i} + e^{-z+i}}{2} = \frac{e^{x}e^{i(y-1)} + e^{-x}e^{-i(y-1)}}{2} = \cos(y-1)\,ch(x) + i\sin(y-1)\,sh(x)$$

5) $$f(z) = z^{2-i} = e^{(2-i)\ln(z)} = e^{(2-i)(\ln(|z|) + i(Arg(z) + 2k\pi))}$$

$$= e^{[2\ln(|z|) + Arg(z) + 2k\pi]}\,e^{i[2Arg(z) + 4k\pi - \ln(|z|)]}$$

$$z^{2-i} = |z|^2 e^{[Arg(z) + 2k\pi]}\left[\cos(2Arg(z) - \ln(|z|)) + i\sin(2Arg(z) - \ln(|z|))\right]$$

Exo 3 trouver les valeurs de $z = x + iy$ pour

voir Exo 2

1) $\sin z$ soit réel , alors $\sin z = \sin(x)\,ch(y) + i\cos(x)\,sh(y)$

z réel $\Rightarrow \cos(x)\,sh(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \text{ alors } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ sh(y) = 0 \text{ donc } y = 0 \end{cases}$

2) $sh(z) = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{x}e^{iy} - e^{-x}e^{-iy}}{2} = \cos(y)\left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) + i\sin(y)\left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)$

$= \cos(y)\,sh(x) + i\sin(y)\,ch(x)$

$sh(z)$ soit imaginaire $\Rightarrow \cos(y)\,sh(x) = 0 \quad \begin{cases} \cos(y) = 0 & y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ sh(x) = 0 & x = 0 \end{cases}$

Exo 4 calcul

1) $i^{i} = e^{i\ln(i)} = e^{i(\ln(1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $(1-i)^{3-3i} = e^{(3-3i)\ln(1-i)} = e^{(3-3i)[\ln(\sqrt{2}) + i[(-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi]]}$

$= e^{3\ln\sqrt{2} + 3(-\frac{\pi}{4}) + 6k\pi}\, e^{-i[3\ln(\sqrt{2}) + \frac{3\pi}{4} - 6k\pi]}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{3\pi}{4} + 6k\pi}\left[\cos\left(3\ln(\sqrt{2}) + \frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(3\ln(\sqrt{2}) + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$

3) $\log(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

Exo 5

1) $\lim_{z \to i} f(z) = i^2 = -1$ seule limite fonction continue en $z = i$

$\lim_{z \to i} g(z) \begin{cases} i^2 = -1 \\ 0 \end{cases}$ plusieurs limites discontinue en $z = i$

$\lim h(z) = \frac{z}{|z|} = \lim_{z} e^{i\arg(z) + 2k\pi}$ admet plusieurs limites fonction discontinue

Série 3 Solution

Exo 1 Critères Cauchy-Riemann Vérification

1) $w = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{CR Vérifié}$$

2) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x+iy}\right) = \left(\frac{1}{2}\,\frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{1}{2}\,\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Le critère C-R est encore vérifié

3)

$w = \sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ (voir série précédente)

donc $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

CR- Vérifié

Exo 2: on a $u = ax + by$ et $v = cx + dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = b \; ; \; \frac{\partial v}{\partial x} = c \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y} = d$$

pour que $f(z)$ soit holomorphe le critère C-R doit être vérifié ce qui est traduit par $\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$

$$f(z) = ax - cy + i(cx + ay)$$

EXO3

Soient $z = x + iy$ et V la fonction définie par

$$V : (x, y) \to xy^2 - \frac{1}{3}x^3$$

1) harmonique $\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2x$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ elle est harmonique

2) trouve U telle que $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ soit holomorphe

d'après C-R $\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

donc $\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 2xy \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(y^2 - x^2)$

l'intégration $\int \frac{\partial U}{\partial x} = \int 2xy = x^2 y + C(y) = U(x,y)$

alors $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + C'(y)$ et d'après C-R $\frac{\partial U}{\partial y} = -(y^2 - x^2)$

$\Rightarrow \quad C'(y) = -(y^2 - x^2) - x^2 = -y^2 \Rightarrow C(y) = -\frac{1}{3}y^3 + c$

alors $U(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + c$

$$f(z) = \left(x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + c\right) + i\left(xy^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

Exo 4

en utilisant les coordonées polaire $z = re^{i\theta}$, f s'écrit

$$f(z) = \ln r + i\theta = u(r,\theta) + i\, v(r,\theta)$$

d'où
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

par conséquent f est holomorphe

Exercice 5

dérivée des fonction par rapport à z (à domicile)

Solution Série 4 Math 4

Exo1 :

La paramétrisation du chemin est $\gamma(t)=(i+1)(1-t)+t=i+1-i$

$0\leq t\leq 1$

alors $\gamma'(t)=-i$

$$\int_\gamma 2\bar{z}+5\,dz=\int_0^1\left[2(i+1-it)+5\right](-i)\,dt$$

$$=-i\left[-i+7\right]=-1-7i$$

Exo2 :

droit $(0,0)$ à $(0,1)$ $\quad \gamma(t)=it \quad 0\leq t\leq 1 \quad$ avec $\gamma'(t)=i$

$$\int_\gamma(z^2+3z)\,dz=\int_0^1\left((it)^2+3it\right)i\,dt=i\int_0^1(-t^2+3it)\,dt=i\left(\left[\frac{-t^3}{3}\right]_0^1+3i\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\right.$$

$$\int_\gamma(z^2+3z)\,dz=-\frac{3}{2}-\frac{i}{3}$$

le cercle (quart de cercle) $(0,0)$ centre points $(2,0)$ et $(0,-2)$

$\gamma(t)=2e^{it} \quad t\,[0,-\frac{\pi}{2}] \qquad \gamma'(t)=2ie^{it}$

alors
$$\int_\gamma(z^2+3z)\,dz=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\left(4e^{2it}+6e^{it}\right)2ie^{it}\,dt$$

tout calcul fait

$$\int_\gamma(z^2+3z)\,dz=4i\left(\frac{2}{3i}\left(e^{-i\frac{3\pi}{2}}-1\right)+\frac{3}{2i}\left(+e^{-i\pi}-1\right)\right)$$

$$=\frac{-44}{3}+\frac{8}{3}i \qquad \begin{cases} e^{-i\frac{3\pi}{2}}=i \\ e^{-i\pi}=-1 \end{cases}$$

Exo3 pour les deux segments

$\gamma_1(t) = i - it \qquad 0 \leq t \leq 1 \qquad \gamma_1'(t) = -i$

$\gamma_2(t) = t \qquad 0 \leq t \leq 1 \qquad \gamma_2'(t) = 1$

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz$$

$$= \int_0^1 [-i+it](-i)\,dt + \int_0^1 t(1)\,dt$$

$$= -0{,}5 + 0{,}5 = 0$$

Exo4

$\gamma_1(t) = 2e^{it} \quad 0 \leq t \leq \pi \quad ; \quad \gamma_2(t) = t; \ -2 \leq t \leq 0$

$$\int_\gamma (2\bar{z} + 3|z|^2)\,dz = \int_{\gamma_1} (2\bar{z} + 3|z|^2)\,dz + \int_{\gamma_2} (2\bar{z} + 3|z|^2)\,dz$$

$$= \int_0^\pi (4e^{-it} + 12)\,2ie^{it}\,dt + \int_{-2}^{2} (2t + 3t^2) \times 1\,dt$$

$$= 4i\int_0^\pi 2 + 6e^{it}\,dt + 16 = 8\pi i - 32$$

NB

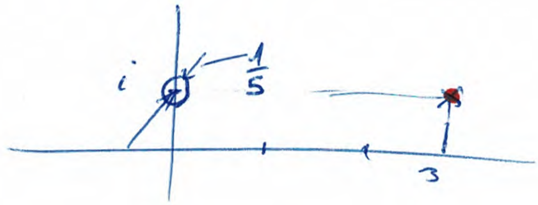
on peut paramétrise $\gamma_2(t)$ avec la même méthode des segments $\qquad \gamma_2(t) = -2(1-t) + 2t \qquad 0 \leq t \leq 1$

on trouvera les même Résultats

Exo5

1) la singularité de f est $z_0 = i+3$

$i+3$ est à l'exterieur du domaine d'intégration défini par $|z-i| = \frac{1}{5}$



donc d'après cauchy

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{5}} \frac{2}{(z-i-3)} = 0$$

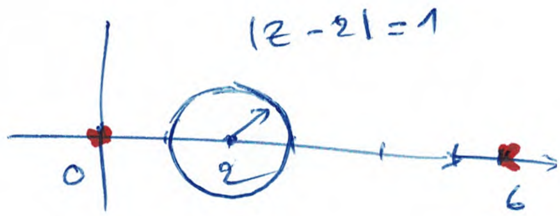
2) la singularité est à l'intérieur $z_0 = i+2$

$$I = \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{(z-i-2)^2} dz = 2\pi i\, g'(i+2) = 2\pi i\, e^{i+2}$$

$g(z) = e^z$

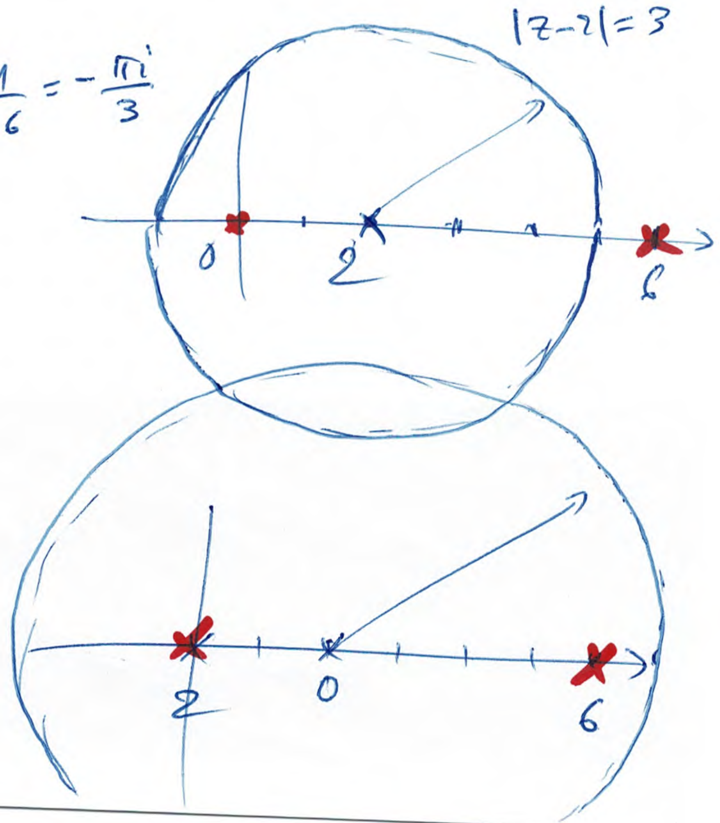
Exo6

1) d'après cauchy $I = \int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2-6z} dz = 0$



2) $I = \int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2-6z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{-6} = -\frac{\pi i}{3}$

$f(z) = \frac{e^z}{z-6}$



3) $I = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z-6} dz$

$g(z) = \frac{e^z}{z-6}$ et $h(z) = \frac{e^z}{z}$

$I = 2\pi i\, g(0) + 2\pi i\, h(0) = \frac{e^6-1}{3}\pi i$