Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de mathématiques

METHODES NUMERIQUES POUR LES EDP ET EDO
$3^{\text{ème}}$ année Licence

Examen de remplacement-13 juin 2022

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice n°1. On s'intéresse au problème elliptique unidimensionnel suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = f(x) \quad x \in]0,1[\\ u(0) = 0 \\ u'(1) + u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour celà, on considère le schéma aux différences finies à pas constant $h = 1/N$ pour le problème (1)

$$\begin{cases} \frac{-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}}{h^2} + 2u_i = f(x_i) \quad i = 1, \cdots, N \\ u_0 = 0, \\ \frac{u_{N+1}-u_N}{h} + u_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. En respectant l'ordre des équations, écrire le schéma de différences finies (2) sous la forme matricielle avec précision des matrices A_h, B et U.
2. Montrer que la matrice A_h est inversible.
3. En supposant que u est suffisamment régulière, étudier la consistance du schéma (en précisant l'ordre de consistance).

Exercice n°2. On considère l'équation suivante

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) = 0 \quad (t,x) \in]0,T[\times]-L,L[, \ a > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in]-L,L[, \\ u(t,-L) = u(t,L) = 0 \quad t \in]0,T[, \end{cases}$$

1. Approcher le système précédent, en utilisant un schéma aux différences finies explicite.
2. Etudier la consistance du schéma considéré en précisant l'ordre de consistance.

Bon courage

Correction

Exercice n°1 : 13pts

$$(2)\begin{cases} \dfrac{-u_{i+1}-2u_i-u_{i-1}}{h^2}+2u_i=f(x_i) \; ; \quad i=\overline{1,N} \\ u_0=0, \\ u_{N+1}+\dfrac{u_{N+1}-u_N}{h}=0 \end{cases}$$

1) Ecriture matricielle : Soit $u=(u_1,\dots,u_N,u_{N+1})^t\in\mathbb{R}^{N+1}$ 0,5

Le système (2) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A_h=\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{h^2}+2\right) & \frac{-1}{h^2} & \cdots & & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+2 & \frac{-1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+2 & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & \cdots & 0 & -\frac{1}{h} & 1+\frac{1}{h} \end{pmatrix}$$ (2)

$B=(f(x_1),\dots,f(x_N),0)^t$ 0,5

2) On montre que A_h est inversible. Pour cela, il suffit de montrer que A_h est monotone. 0,5 Soit $u\in\mathbb{R}^{N+1}$ tq $A_h u\geq 0$ 0,5

Soit $i_0=\min_i\left(u_{i_0}=\min_j u_j\right)$ 0,5

Pour $1\leq i_0\leq N$ On a 0,5

$$(A_h u)_{i_0}=\frac{-u_{i_0+1}+2u_{i_0}-u_{i_0-1}}{h^2}+2u_{i_0}$$ 1,5

$$=\frac{1}{h^2}\left[(u_{i_0}-u_{i_0+1})+(u_{i_0}-u_{i_0-1})\right]+2u_{i_0}\geq 0.$$

$$= 2u_{i_0}\geq \frac{1}{h^2}\left[(u_{i_0+1}-u_{i_0})+(u_{i_0-1}-u_{i_0})\right]\geq 0 \Rightarrow u_{i_0}\geq 0$$

Pour $i_0 = N+1$.

$$u_{i_0} + \frac{u_{i_0} - u_{i_0-1}}{h} \geq 0 \Rightarrow u_{i_0} \geq \frac{u_{i_0-1} - u_{i_0}}{h} \geq 0 \quad 1$$

Donc $u \geq 0 \Rightarrow A_h$ est monotone donc inversible $0,25$

3) Soit $u \in C^4(]0,1[)$ Par définition, on a

$$\begin{cases} R_i = \dfrac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1})}{h^2} - 2u(x_i) - f(x_i) & 1, \; i = \overline{1,N} \\ R_{N+1} = u(x_{N+1}) + \dfrac{u(x_{N+1}) - u(x_N)}{h} & 0,75 \end{cases}$$

Par des développements de Taylor, on a

$0,5$ $u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + h\, u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + O(h^4)$

$0,25$ $u(x_{i-1}) = u(x_i) - h\, u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) - \frac{h^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + O(h^4)$.

$$\Rightarrow \quad u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i) = h^2 u''(x_i) + O(h^4)$$

$$\Rightarrow R_i = -u''(x_i) - O(h^2) - 2u(x_i) - f(x_i)$$

u étant solution de l'équation ①, donc

$$|R_i| = O(h^2) \Rightarrow |R_i| \leq Ch \quad 0,75$$

Par le mm procédé, on aura $|R_{N+1}| \leq Ch$.

$$\Rightarrow \|R\|_\infty \leq Ch \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad 1$$

Donc le schéma est consistant d'ordre 1 $0,5$

Exercice 2 (6 pts)

Soit le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_n) = \frac{u(t_{j+1}, x_n) - u(t_j, x_n)}{\Delta t} \quad (1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_n) = \frac{u(t_j, x_{n+1}) - 2u(t_j, x_n) + u(t_j, x_{n-1})}{h^2} \quad (1) \\ u_n^0 = u_0(x_n) \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0 \quad (0,5) \end{cases}$$

Soit $R_n^j = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\Delta t} - a\frac{u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j}{h^2}$ (0,5)

$= A_n - B_n$

avec

$$A_n = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_n)$$

$$B_n = \frac{u_{n+1}^j - 2u_n^j + u_{n-1}^j}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j, x_n)$$

Par les développements de Taylor, on trouvera (voir cours)

$$A_n = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial u}{\partial t}(z, x_n), \quad z \in]t_j, t_{j+1}[. \quad (1)$$

et $B_n = \frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_j, \xi^+) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t_j, \xi^-)\right)$ avec (1)
$\xi^+ \in]x_n, x_{n+1}[, \ \xi^- \in]x_{n-1}, x_n[$.

$$\Rightarrow |R_n^j| \leq O(\Delta t + a h^2) \xrightarrow[\Delta t, h \to 0]{} 0 \quad (1)$$

Donc le schéma est consistant d'ordre un en temps et deux en espace. (0,5)