Université de Mohammed Seddik Ben Yahia de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique — Département de mathématiques

METHODES NUMERIQUES POUR LES EDP ET EDO
$3^{\text{ème}}$ année Licence

Examen partiel-12 mai 2022

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice n°1. On cherche à approcher le problème suivant par différences finies :

$$\begin{cases} -u''(x) + cu'(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $c > 0$ une constante.

1. En utilisant des notations classiques, on considère le schéma aux différences finies à pas constant $h = 1/(N+1)$ pour le problème (1)

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + c\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = f(x_i) \quad i = 1, \cdots, N \tag{2}$$

   avec $x_i = ih$ et $u_0 = u_{N+1} = 0$.
   (a) En respectant l'ordre des équations, écrire le schéma de différences finies (2) sous la forme d'un système matriciel $A_h U = B$ où A_h est une matrice carrée et U et B des vecteurs colonne de taille N qu'on explicitera.

   (b) Définir l'erreur de consistance de ce schéma et étudier son ordre d'approximation.
2. Proposer un nouveau schéma dont l'ordre d'approximation est un cran plus élevé. Expliquez.

Exercice n°2. On considère l'équation

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 & x \in]0,1[\\ u(0) = 0, \ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Donner une solution exacte du problème considéré.
2. Ecrire le schéma aux différences finies pour approcher la solution de cette équation, en prenant en compte les conditions aux bords ci-dessus.
3. La matrice du système linéaire obtenu est-elle inversible ?

Bon travail
F. Aliouane

Exercice n°1 :

1) Soit le schéma

$$\frac{-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}}{h^2}+c\,\frac{u_i-u_{i-1}}{h}=f(x_i)\ ,\ i=\overline{1,N}$$

(a) Le schéma peut s'écrire sous la forme matricielle suivante $A_h U = B$ tq.

$$A_h=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+ch & -1 & \cdots & & 0 \\ -(1+ch) & 2+ch & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -(1+ch) & 2+ch & -1 \\ 0 & \cdots & & -(1+ch) & 2+ch \end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

Sachant que $\frac{1}{h^2}\left(-u_{i+1}+(2+ch)u_i-(1+ch)u_{i-1}\right)=f(x_i)$
$i=\overline{1,N}$.

avec $u_0=u_{N+1}=0$

(b) On définit l'erreur de consistance par

$R=(R_1, \_\_\_, R_N)$ tq.

$$R_i=\frac{-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}}{h^2}+c\,\frac{u_i-u_{i-1}}{h}-f(x_i).$$

Par les développements de Taylor, on a

$$u_{i+1}=u(x_i+h)=u(x_i)+h u'(x_i)+\frac{h^2}{2!}u''(x_i)+\frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi^+)$$

$$u_{i-1}=u(x_i)-h u'(x_i)+\frac{h^2}{2!}u''(x_i)-\frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi^-)$$

avec $\xi^+\in\,]x_i,x_{i+1}[$, $\xi^-\in\,]x_{i-1},x_i]$

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\left(u^{(4)}(\xi^+) + u^{(4)}(\xi^-)\right).$$

$$\Rightarrow \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{4!}\left(u^{(4)}(\xi^+) + u^{(4)}(\xi^-)\right)$$

et $\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u'(x_i) - \frac{h}{2} u^{(2)}(k^-)$, $k^- \in]x_{i-1}, x_i]$.

Alors, $R^i = -u''(x_i) - \frac{h^2}{4!}\left(u^{(4)}(\xi^+) + u^{(4)}(\xi^-)\right) + c\,u'(x_i) + c\frac{h}{2}u^{(2)}(k)$

Or u est solution du problème ①, donc

$$R^i = -\frac{h^2}{4!}\left(u^{(4)}(\xi^+) + u^{(4)}(\xi^-)\right) + c\frac{h}{2}u^{(2)}(k).$$

Par le thm. de la valeur intermédiaire,

il existe $\xi \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$ tq.

$$|R^i| \leq \frac{h^2}{12}\|u^{(4)}\| + c\frac{h}{2}\|u^{(2)}\|$$

$$\leq h\left(\frac{1}{12}\|u^{(4)}\| + \frac{c}{2}\|u^{(2)}\|\right), \quad h \leq 1,$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Donc le schéma est consistant d'ordre un

2) Soit le schéma centré suivant :

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \simeq u'(x_i)$$

Il est clair que $\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = u'(x_i) + O(h^2)$

Donc, par le mm procédé qu'avant on trouvera que le nouveau schéma est consistant d'ordre deux.

Exercice 2 (03pts) On a $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ est une solution exacte de (P) 0,25

- Soit le schéma aux différences suivant (en admettons les notations du cours)

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 1, \; ; \; i = \overline{1,N} \quad 0,5 \\ u_0 = 0, \quad \dfrac{u_{N+1} - u_N}{h} = 0 \quad 0,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = 1, \quad i = \overline{1,N} \\ u_0 = 0, \; u_{N+1} = u_N \end{cases}$$

L'écriture matricielle du schéma

$A_h u = B$ tq $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ | \\ u_N \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 0,75$$

3) A_h est inversible ssi A_h symétrique 0,25 définie positive 0,25

(voir cours).