Faculté des Sciences et de la Technologie, Filières :
- Génie civile et Hydraulique
- Génie Mécanique

Examen de Mathématique 4
Analyse Complexe

Exercice 1 (7 pts) : Résolutions des équations complexes

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$\mathbf{z^7 + i - \sqrt{3} = 0}$$

2) En utilisant le logarithme complexe, résoudre aussi :

$$e^{z-1} = -ie^3$$

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i$$

Exercice 2 (6 pts) : Fonctions holomorphes

Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels et soit la fonction

$$f(z) = ax + iy + ie^z$$

1) Mettre $f(z)$ sous la forme $U(x,y) + i\,V(x,y)$
2) Déterminer la constante a pour que la fonction $f(z)$ soit holomorphe

Exercice 3 (7 pts) : Intégrales complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les intégrales suivantes :

1)

$$\int_{\Gamma} z^2 dz$$

Où Γ est la partie de la parabole d'équation $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$

2)

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z + z}{(z-i)(z+i)} dz$$

Bon Courage

Solution de L'examen

Exercice 1

2) On a

$$e^{z-1} = -ie^3.$$

En utilisant le logarithme complexe, nous avons

$$\ln(e^{z-1}) = \ln(-ie^3),$$

qui implique que

$$z - 1 = \ln(-i) + \ln(e^3).$$

Sachant que

$$\ln(z) = \ln(|z|) + iArg(z),$$

alors nous obtenons $\ln(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$z - 1 = -i\frac{\pi}{2} + 3 \quad \Rightarrow \quad z = -i\frac{\pi}{2} + 4.$$

Par définition, nous avons

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Par conséquent,

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i \qquad \Rightarrow \qquad 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - e^{-iz} = 1 + 2i.$$

On obtient

$$e^{iz} = 1 + 2i.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} e^{iz} = 1 + 2i \quad &\Rightarrow \quad iz = \log(1 + 2i), \\ &\Rightarrow \quad z = \frac{1}{i}\log(1 + 2i) = \frac{1}{i}\left(\ln(\sqrt{5}) + i\arctan(2) + 2k\pi i\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &\Rightarrow \quad z = -i\ln(\sqrt{5}) + \arctan(2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 2

Nous avons la fonction f donnée par

$$f(z) = ax + iy + ie^z.$$

Nous remplaçons $z = x + iy$, nous obtenons

$$f(x + iy) = ax + iy + ie^{x+iy} = ax + iy + ie^x(\cos y + i \sin y).$$

Ainsi,

$$\begin{cases} U(x, y) = ax - e^x \sin y, \\ V(x, y) = y + e^x \cos y. \end{cases}$$

2) La fonction f est holomorphe si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = a - e^x \sin y, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 1 - e^x \sin y, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial y} = -e^x \cos y, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = e^x \cos y. \end{cases}$$

Ceci implique que $a = 1$.

Exercice 3

3. La partie de la parabole est paramétrée par

$$\gamma(t) = t + it^2, \ 0 \le t \le 1,$$

donc

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 \left(t + it^2\right)^2 (1 + i2t)\, dt = \left[\frac{1}{3}\left(t + it^2\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1 + i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$
\begin{aligned}
\int_{|z|=3} \frac{e^z + z}{(z-i)(z+i)}\, dz &= \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{(z+i)}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{(z-i)}\, dz, \\
&= 2\pi i[g(-i) + h(i)] \\
&= 2\pi i \frac{e^{-i} - i}{-2i} + 2\pi i \frac{e^{i} + i}{2i}.
\end{aligned}
$$