

## Chapitre 4

# Correction des systèmes échantillonnés asservis

## 1. Introduction

**Etapes d'une commande numérique par calculateur d'un processus continu échantillonné -bloqué :**

- Choix de la période d'échantillonnage T et obtention, par calcul ou identification, de l'équation de récurrence ou de la fonction de transfert du processus numérique à réguler,
  - Choix du modèle numérique à atteindre en boucle fermée après correction ; choix guidé par l'analyse et l'expression du cahier des charges,
  - Conception du correcteur numérique nécessaire (calcul des paramètres du correcteur),
  - Le correcteur, calculé en général dans le domaine fréquentiel (transformée en z) conduit, par retour au domaine temporel, à l'algorithme de commande du processus.
- Il élabore en temps réel (causalité du système à contrôler) la commande  $u(k)$  à envoyer à chaque pas T au système numérique placé sous son contrôle.

Une commande numérique est du point de vue formel, identique à une commande échantillonnée. La synthèse consiste à se conformer à ce modèle imposé, en déterminant une récurrence  $u_k$  réalisable :

- Causale (la commande à l'ordre  $k$ , ne doit dépendre que des valeurs précédentes de la commande  $u$ , de la consigne  $e$  et de la mesure  $y$ ),
- Stable (pôles à l'intérieur du domaine stable), ce qui garantit une commande douce et une sortie continue sans oscillations cachées.

Le comportement d'un système asservi (numérique) échantillonné est le même que celui d'un système asservi continu ; il doit être robuste vis-à-vis de la stabilité, de la précision et de la rapidité. Par contre la synthèse ou le réglage diffère, les causes :

- La constitution du régulateur (programmable),
- et de la période d'échantillonnage.

Deux types de réglage, soit la synthèse en utilisant les méthodes du continu, soit une synthèse dite numérique.

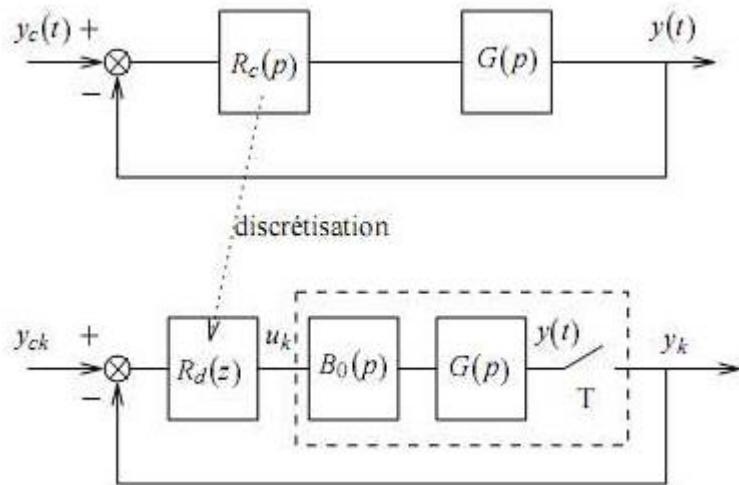
## 2. Synthèse de correcteurs numériques par extension de correcteurs analogiques

Cette synthèse est une approche couramment utilisée dans le domaine industriel.

Cette approche suppose que l'on ait réalisé la synthèse d'un correcteur analogique par les méthodes d'étude des systèmes continus. On recherche un algorithme numérique qui se rapproche le plus possible du correcteur analogique, en faisant des approximations de la variable de Laplace  $p$ , ou sur les pôles et les zéros de la fonction de transfert du correcteur analogique.

## Approximation de la variable p

Le principe de l'approche consiste à déduire un correcteur  $R_d(z)$  d du correcteur  $R_c(z)$  en choisissant une approximation de la variable  $p$ , selon la figure :



**Figure 1 :** Discréétisation d'un correcteur analogique.

Discréétisation avant	Discréétisation arrière	Approximation de Tustin
$p = \frac{z - 1}{T}$	$p = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$	$p = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$

## 3. Synthèse utilisant les méthodes continues

Le principe de ces méthodes repose sur le passage du système échantillonné à un système continu qui lui est approximativement équivalent à l'aide de transformations. Une fois, la synthèse utilisant les méthodes classiques du continu faites, on revient au régulateur discret.

**Exemples de transformations :**

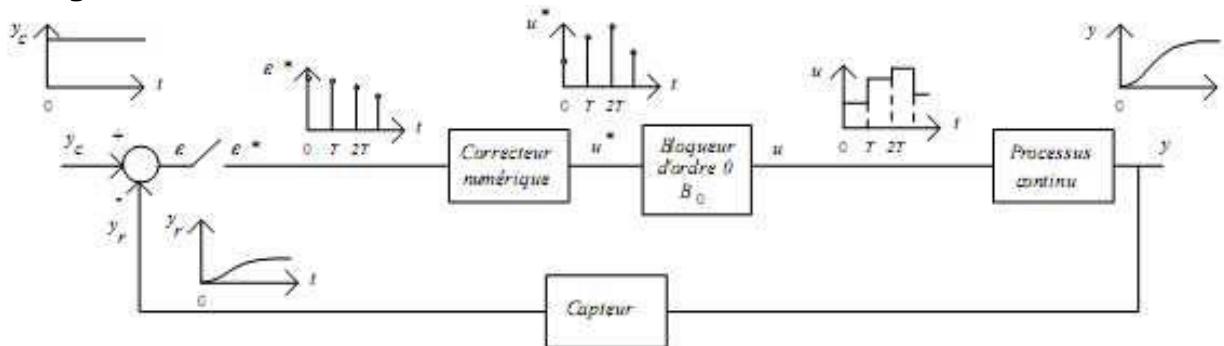
Méthode	Principe	$G_n(p)$	$C(z)$
Retard de $\frac{T}{2}$	$B_0(p) \approx e^{-\frac{pT}{2}}$	$e^{-\frac{pT}{2}} \cdot G(p)$	$C\left(\frac{z-1}{T}\right)$
Approximation linéaire	$z \approx 1 - pT$ $p \approx \frac{z-1}{T}$	$G(1 + pT)$	$C\left(\frac{z-1}{T}\right)$
Transformation homographique	$z \approx \frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}$ $p = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$	$G\left(\frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}\right)$	$C\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)$

<b>Transformée en <math>w</math></b>	$z \approx \frac{1+w}{1-w},$ $w = \frac{z-1}{z+1},$ $p = j\omega \Rightarrow$ $w = jt g(\omega T / 2) = jv$	$G\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$	$C\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$
--------------------------------------	---	---------------------------------	---------------------------------

## 4. Synthèse numérique

### 4.1. Correcteurs standards (pour les systèmes «compensables»)

**Structure générale de la commande :**



( $T$ : période d'échantillonnage).

**Correcteur Proportionnel et Intégral (PI) :**

- **But :** accroître la **précision** par un retard et **augmentation du gain statique**.

- Relation de base et fonction de transfert :

$$u_k = K_p \varepsilon_k + K_i \sum_{k=0}^k \varepsilon_k \Rightarrow D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p + K_i \frac{z}{z-1}$$

Qui se met aussi sous la forme :

$$D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z - 1}$$

Avec :

$$\begin{cases} b_0 = -K_p \\ b_1 = K_p + K_i \end{cases}$$

- Algorithme de commande :

$$u_k = u_{k-1} + b_1 \varepsilon_k + b_0 \varepsilon_{k-1} \quad , CI nulles.$$

### Correcteur Proportionnel et Dérivée PD (avance de phase) :

- **But** : accroître la **stabilité et la rapidité** par une avance de phase.
- Relation de base et fonction de transfert :

$$u_k = K_p \varepsilon_k + K_d (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \Rightarrow D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p + K_d \frac{z-1}{z}$$

Qui se met aussi sous la forme :

$$D(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z}$$

Avec :

$$\begin{cases} b_0 = -K_p \\ b_1 = K_p + K_i \end{cases}$$

Algorithme de commande :

$$u_k = (K_p + K_d) \varepsilon_k + K_d \varepsilon_{k-1}, CI \text{ nulles.}$$

### PID numérique :

#### **But :**

- améliorer les performances du système bouclé (précision, stabilité, rapidité et sensibilité aux incertitudes du modèle),
- allonger la période d'échantillonnage.

Fonction de transfert discrète :

$$D(z) = K \left( 1 + \frac{T}{T_I} \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right)$$

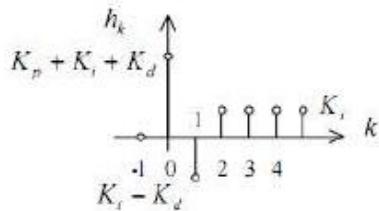
obtenue par transposition numérique des opérations d'intégration et de dérivation analogique.  
Et peut aussi être écrit sous la forme :

$$D(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z(z-1)} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} b_0 = K_d \\ b_1 = -(K_p + 2K_d) \\ b_2 = K_p + K_i + K_d \end{cases}$$

(2 pôles :  $z = 0$  et  $z = 1$ )

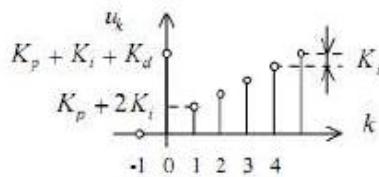
• Réponse Impulsionnelle discrète :

$$h_k = TZ^{-1}[D(z)] = TZ^{-1}\left[ K_p + K_i \frac{z}{z-1} + K_d \frac{z-1}{z} \right] \rightarrow h_k = (K_p + K_d)\delta_k - K_d\delta_{k-1} + K_i \Gamma_k$$



• Réponse indicelle discrète :

$$u_k = TZ^{-1}\left[ D(z) \frac{z}{z-1} \right] \rightarrow \begin{cases} u_0 = K_p + K_i + K_d \\ u_k = K_p + K_i(k+1) \text{ pour } k \geq 1 \end{cases}$$



$\delta_k$ ,  $\Gamma_k$  sont respectivement : impulsion et échelon de position discrets

Algorithme de commande :

$$u_k = K_i \sum_{k=0}^k \varepsilon_k + (K_p + K_d + K_i) \varepsilon_k - K_d \varepsilon_{k-1}$$

$$K_{PID} = K_p + K_d + K_i \Rightarrow u_k = x_{k-1} + K_{PID} \varepsilon_k - K_d \varepsilon_{k-1}$$

## 4.2. Correcteurs « personnalisés » (en fonction du processus à contrôler)

Méthodes pour la plus part fondée sur le fait que les principales caractéristiques de la réponse indicelle sont fixées par un pôle dominant, constitué d'une paire de pôles complexes et d'un zéro réel.

Le système corrigé sera caractérisé par :

- son régime transitoire ; amortissement  $x$ , pulsation propre  $n_w$ , dépassement  $D$ , temps de réponse  $t_r$  ou temps de pic  $T$ .
- son régime permanent : erreurs statiques nulles.

On devra veiller à obtenir un correcteur réalisable ( $n \geq m$ ) donc causal pour autoriser une régulation en temps réel, veiller à ce que le temps de calcul de l'algorithme de commande soit inférieure à la période d'échantillonnage et enfin à ne pas compenser un zéro instable.

### 1. Méthode du second ordre équivalent (pôles dominants) :

Les considérations précédentes nous ramènent à une fonction de transfert en boucle fermée de la forme :

$$F(z) = K \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \text{ avec : } p_1 = \rho_1 e^{j\theta}$$

K est calculé de façon à annuler l'erreur statique de position, soit  $F(z=1) = 1$ ; d'où :

$$K = \frac{(1-p_1)(1-\bar{p}_1)}{1-z_1}$$

Les pôles complexes  $p_1$  et  $\bar{p}_1$  sont déterminés à partir des abaques du second ordre numérique, lieu des pôles à amortissement constant, réponse indicielle.

L'expression du régulateur  $C(z)$  se déduit de la formule de Black :

$$C(z) = \frac{F(z)}{G(z)[1-F(z)]}$$

$G(z)$  étant la fonction de transfert en  $z$  du processus à contrôler.

## 2. Méthode de Zdan :

L'objectif est d'obtenir un système en boucle fermée dont le comportement soit voisin de celui d'un système du second ordre, caractérisé par une paire de pôles dominants.

Le système est purement numérique,



Les spécifications sur le modèle  $H(z)$  pour le système corrigé concernent :

- Le régime transitoire défini par 2 paramètres : en général l'amortissement  $x$  et la pulsation  $w_n$  du système non amorti (ou la pulsation de résonnance  $R$ ).
- Le régime permanent : caractérisé par les erreurs statiques.

Le principe de la méthode de Zdan est d'aboutir à l'expression de  $C(z)G(z)$  la plus simple possible.

$C(z)$  Comportera :

1. Des pôles et des zéros compensant les zéros et les pôles de  $G(z)$ .
2. Autant de pôles à  $z=1$  qu'il est nécessaire, compte tenu de ceux de  $G(z)$  pour que l'erreur statique soit nulle, selon l'ordre de précision souhaité.
3. Un gain ajustable  $K_D$ .
4. Autant de paramètres ( $A_i, B_i$ ) qu'il y a de spécifications (amortissement, rapidité...) à satisfaire.

Ces paramètres interviennent dans des expressions de la forme :

$$\frac{1+A_1z^{-1}}{1+B_1z^{-1}}, \quad \frac{1+A_1z^{-1}+B_2z^{-2}}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}}, \quad \frac{1+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}}{1+B_1z^{-1}}, \quad \frac{1+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}}{1+B_1z^{-1}+B_2z^{-2}}, \quad \text{etc ...}$$

$C(z)$  s'écrit alors :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{1}{(z-1)^m} \cdot K_D \cdot \left( \frac{1+A_1z^{-1}+\dots}{1+B_1z^{-1}+\dots} \right)$$

L'équation caractéristique est (équation décrivant le système bouclé) :

$$1 + C(z)G(z) = 0$$

On identifiera les coefficients à ceux de l'équation caractéristique désirée (pour le système modèle) et, de façon générale à ceux découlant de l'expression :

$$(1 - z_1 z^{-1})(1 - \bar{z}_1 z^{-1})(1 - z_3 z^{-1}) \dots (1 - z_n z^{-1}) \text{ où } z_1 \text{ et } \bar{z}_1 \text{ sont les pôles dominants}$$

sont les pôles dominants

(correspondant à un 2ème ordre) et  $z_3, z_4, \dots, z_n$  des pôles que l'on doit rendre négligeables.

$$z^2 - 2 \cdot e^{-\omega_n T \xi} \cdot \cos(\omega_n T \xi) \cdot z + e^{-2\omega_n T \xi} = 0$$

**Exemple :**

On souhaite corriger le système asservi d'entrée  $E(z)$ , de sortie  $S(z)$  et de transmittance échantillonnée en boucle ouverte :

$$T(z) = \frac{1 + 0.718z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}}$$

La période d'échantillonnage est  $T=0.1s$ . Les performances souhaitées correspondent aux caractéristiques d'un système du second ordre :

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s}, \xi = 0.5$$

Erreur de position nulle.

On choisit

$$C(z) = \frac{1}{T(z)}$$

ainsi on supprime les pôles et les zéros de la transmittance de départ, mais il faut de plus que le système possède une erreur de position nulle, il faut donc ajouter un intégrateur :

$$C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1}{T(z)}$$

Maintenant il faut introduire des paramètres (que l'on réglera) qui permettent de satisfaire le cahier de charges. On choisit donc :

$$C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{1 - 0.368z^{-1}}{1 + 0.718z^{-1}} \frac{K_d}{A + z}$$

La nouvelle transmittance en boucle ouverte est :

$$TC(z) = \frac{K_d z}{(z - 1)(z + A)}$$

On identifie ensuite  $1 + T(z)C(z) = 0$  à l'équation du second ordre :

$$z^2 + z(K_d + A - 1) - A \equiv z^2 - 2 \cdot e^{-\omega_n T \xi} \cdot \cos(\omega_n T \xi) \cdot z + e^{-2\omega_n T \xi} = 0$$

On obtient après identification :

$$K_d + A - 1 = -2e^{-\omega_n T \xi} \cos(\omega_n T \xi) = -0.786$$

$$-A = e^{-2\omega_n T \xi} = 0.368$$

Qui donne :

$$A = -0.368$$

$$K_d = 0.582$$

Ainsi, en boucle fermée, on obtient la fonction de transfert corrigée :

$$T(z)C(z) = \frac{0.582}{(z-1)(z-0.368)}$$

Et le correcteur :

$$C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1-0.368z^{-1}}{1+0.718z^{-1}} = 0.582 \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1}{1+0.718z^{-1}}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.582z^{-2}}{1-0.786z^{-1}+0.368z^{-2}}$$

La réponse indicielle s'écrit :

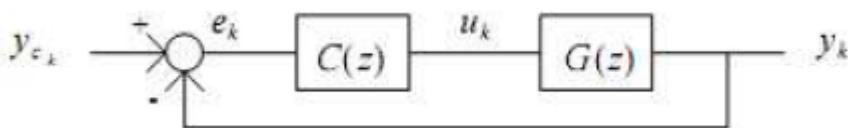
$$s(k) = 0.786 s(k-1) - 0.368 s(k-2) + e(k-2)$$

L'allure est bien d'un second ordre avec une erreur de position nulle et un dépassement  $D \approx 18\%$ . L'inconvénient de la synthèse par la méthode de Zdan est la maîtrise «relative» du transitoire (en particulier le dépassement) par absence de contrôle sur le numérateur du modèle de référence.

### 3. Synthèse des correcteurs numériques. Réponse pile

#### 1. Les structures des correcteurs numériques.

La structure classique de régulation suivante :



n'est qu'une structure particulière du schéma :



Le correcteur  $C(z)$  est alors distribué sur les fonctions de transfert  $R(z)$ ,  $S(z)$  et  $T(z)$  qui sont des polynômes en  $z$  à déterminer.

Le correcteur classique  $C(z)$  est obtenu pour  $S(z) = T(z)$ .

$$C(z) = \frac{U(z)}{Y_c(z) - Y(z)} = \frac{S(z)}{R(z)}$$

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^k}{\sum_{k=0}^n a_k z^k}$$

avec  $(n - m) \geq 0$  et certains zéros de  $G(z)$  instables. Cette structure permet de réguler les processus

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

sans conditions sur les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  et notamment des processus avec zéros instables.

## Exemple de synthèse

On s'intéresse ici à la correction d'un système de fonction de transfert de la forme :

$$H(z) = \frac{K}{z+a}$$

On souhaite que le transfert en boucle fermée soit de type réponse pile.