CHAPITRE 1

Espaces topologiques

1.1 Définitions et premières propriétés

1.1.1 Notion de topologie, ouverts

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle* ***topologie*** *sur X toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les axiomes suivants*

($\mathcal{O}_1$) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;

($\mathcal{O}_2$) *pour tout* $(A_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{T}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$ *(stabilité par intersection finie) ;*

($\mathcal{O}_3$) *pour tout* $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ *(stabilité par union quelconque).*

Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent ***les ouverts*** *ou* ***les parties ouvertes*** *de X.*

L'ensemble X, muni de la topologie $\mathcal{T}$, est appelé ***espace topologique****, on le note quelquefois $(X, \mathcal{T})$.*

Remarque 1.1.1. Dans l'axiome ($\mathcal{O}_2$), on peut remplacer l'intersection finie par l'intersection de deux éléments, i.e.,

$(\mathcal{O}_2)'$ pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Exemple 1.1.1.

1. *Soit X un ensemble non vide. Alors $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X appelée la* ***topologie grossière*** *et $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X appelée la* ***topologie discrète****.*

2. *Soit $X = \{x, y\}$ un ensemble à deux éléments. Alors les topologies sur X sont $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{x\}, X\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{y\}, X\}, \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\}$.*

Définition 1.1.2. *Soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies définies sur un ensemble X. On dit que $\mathcal{T}_1$ est **plus faible** ou **moins fine** que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Cela définit une relation d'ordre sur les topologies de X.*

Exemple 1.1.2. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, alors la topologie grossière est moins fine que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est moins fine que la topologie discrète.*

1.1.2 Topologie sur $\mathbb{R}$

Définition 1.1.3. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle** si et seulement si*

$$\forall x, y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R},\ x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

Définition 1.1.4. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **intervalle centré en** x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - h, x_0 + h[$ avec $h > 0$. h s'appelle le **rayon** de cet intervalle.*

Proposition 1.1.1. *On considère sur $\mathbb{R}$ la famille $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{A \subset \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \exists h > 0,\ ]x - h, x + h[\subset A\}.$$

*Alors $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée la **topologie usuelle**.*

Preuve.

$(\mathcal{O}_1)$ Si $\emptyset \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, alors il existe $x \in \emptyset$ tel que pour tout $h > 0$, $]x - h, x + h[\not\subset \emptyset$, contradiction avec la vacuité de $\emptyset$, d'où $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h > 0,\ ]x - h, x + h[\subset \mathbb{R},$$

d'où $\mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

$(\mathcal{O}_2)$ Soient A, $B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ et soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$, donc, il existe $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ tels que

$$]x - h_1, x + h_1[\subset A \quad \text{et} \quad]x - h_2, x + h_2[\subset B.$$

On pose $h = \min\{h_1, h_2\}$, alors $]x - h, x + h[\subset A \cap B$. Par conséquent, $A \cap B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

($\mathcal{O}_3$) Soit $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ une famille quelconque.

Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$, or $A_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ alors il existe $h > 0$ tel que $]x-h, x+h[\subset A_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. On en déduit que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

De ($\mathcal{O}_1$), ($\mathcal{O}_2$) et ($\mathcal{O}_3$), $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 1.1.2. *Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert par rapport à la topologie usuelle.*

Proposition 1.1.3. *Tout ouvert de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ est un intervalle ouvert ou bien union d'intervalles ouverts.*

1.1.3 Ensembles fermés- Voisinages

Définition 1.1.5 (Ensemble fermé). *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous ensemble de X. On dit que A est un **fermé** ou **partie fermée** de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si l'on a $C_X^A \in \mathcal{T}$.*

Exemple 1.1.3.

1. *La famille*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset,\ X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

   définit une topologie sur $X = \{a, b, c, d, e\}$.

   Les fermés de X sont les sous ensembles $\emptyset$, X, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, e\}$ et $\{a\}$.

   Notons qu'il y a des sous ensembles de X, tel que $\{d, c, d, e\}$ qui sont à la fois ouverts et fermés, et qu'il existe aussi des sous ensembles de X tel que $\{a, b\}$ qui ne sont ni ouverts ni fermés.

2. *Soit X un espace topologique discret. Alors tous les sous ensembles de X sont à la fois ouverts et fermés.*

Proposition 1.1.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors la famille des ensembles fermés possède les propriétés suivantes*

($\mathcal{F}_1$) *$\emptyset$, X sont des fermés de X ;*

($\mathcal{F}_2$) *pour toute $(B_i)_{i\in I}$ famille quelconque de fermés, $\bigcap\limits_{i\in I} B_i$ est un fermé ;*

($\mathcal{F}_3$) *pour toute $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ famille finie de fermés, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ est fermé.*

Remarque 1.1.2. L'axiome $(\mathcal{O}_2)$ et la propriété $(\mathcal{F}_2)$ ne se généralisent pas à une famille quelconque.

Donnons deux exemples dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$.

- $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas un ouvert.
- $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] =]-1, 1[$ n'est pas un fermé.

Définition 1.1.6 (Voisinage). *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et x un point de X. On dit qu'une partie V de X est un* ***voisinage*** *de x s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$ tel que $x \in \mathcal{O} \subset V$. On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x,*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X,\ \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T},\ x \in \mathcal{O} \subset V\}.$$

Exemple 1.1.4. *1. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$(V \in \mathcal{V}(x)) \Leftrightarrow (\exists \mathcal{O} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}},\ x \in \mathcal{O} \subset V),$$

Or, comme $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ et $x \in \mathcal{O}$, il existe $h > 0$ tel que $]x-h, x+h[\subset \mathcal{O}$, et puisque $]x-h, x+h[\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, on obtient

$$(V \in \mathcal{V}(x)) \Leftrightarrow (\exists h > 0,\ ]x-h, x+h[\subset V).$$

Par exemple, $]x-\frac{1}{2}, x+1[\cup \{5\}$ est un voisinage de x.

2. Soit l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ où $X = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Alors,

$$\mathcal{V}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\},$$

$$\mathcal{V}(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\},$$

et

$$\mathcal{V}(c) = \{X\}.$$

Proposition 1.1.5. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Les familles $\mathcal{V}(x)$ de parties de X, $x \in X$, vérifient les propriétés suivantes, appelées* ***axiomes des voisinages****.*

1. *Pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$.*
2. *Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.*
3. *Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{V}(x)$ est un élément de $\mathcal{V}(x)$.*

4. *Pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, on ait $V \in \mathcal{V}(y)$.*

Preuve.

Pour tout $x \in X$,

1. $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ car $X \in \mathcal{V}(x)$.
2. Si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$, et si $V \subset W$, on a $x \in O \subset W$ donc $W \in \mathcal{V}(x)$.
3. Si $V, W \in \mathcal{V}(x)$, il existe $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ tels que $x \in O_1 \subset V$ et $x \in O_2 \subset W$, donc $x \in O_1 \cap O_2 \subset V \cap W$. Or $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$, donc $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.
4. Si $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$ et $O \in \mathcal{V}(x)$. Posons $W = O$, pour tout $y \in W$, on a $y \in O \subset W$, donc $W \in \mathcal{V}(y)$.

□

Proposition 1.1.6. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. A est un ouvert si et seulement s'il est un voisinage de chacun de ses points.*

Preuve.

Il résulte immédiatement de la définition que si A est un ouvert de X, alors A est voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, soit A une partie de X qui est voisinage de chacun de ses points. Alors pour tout $x \in A$, il existe un ouvert $\mathcal{O}_x$ de X contenant x et contenu dans A. Donc on a $A \subset \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x \subset A$, c'est à dire, $A = \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x$. C'est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. □

Définition 1.1.7. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

- *On appelle **base d'ouverts** toute partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ telle que tout ouvert est réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$, i.e.,*
$$\forall \mathcal{O} \in \mathcal{T},\ \exists (B_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B},\ \mathcal{O} = \bigcup_{i\in I} B_i.$$
- *Soit $x \in X$. On appelle **système fondamental de voisinages** de x ou **base de voisinages** de x, toute partie $\mathcal{B}_x$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subset V$, i.e.,*
$$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}(x),\ \exists B \in \mathcal{B}_x,\ B \subset V.$$

Exemple 1.1.5. *1. De l'Exemple 1.1.4. 1., pour tout $x \in \mathbb{R}$ la famille $\mathcal{B}_x = \{]x-h, x+h[,\ h>0\}$ est une base de voisinage de x.*

2. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, la famille des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ forme une base d'ouverts.

3. Dans un espace topologique quelconque X, pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ et la famille des voisinages ouverts de x sont des bases de voisinages de x.

4. Dans un espace topologique discret X, pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ est une base de voisinages de x.

1.1.4 Intérieur, adhérence, frontière d'un ensemble

Définition 1.1.8. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.*

- *On dit qu'un point $x \in X$ est **intérieur** à A si A est un voisinage de x dans X.*
- *L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **L'intérieur de** A et se note $\overset{\circ}{A}$ (ou bien $\mathrm{int}A$). Alors*

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{T},\ x \in O \subset A.$$

- *On appelle **extérieur** de A, noté $\mathrm{ext}A$, l'intérieur de C_X^A, i.e., $\mathrm{ext}A = \mathrm{int}C_X^A$.*

Proposition 1.1.7. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts de $(X, \mathcal{T})$ contenus dans A. C'est donc un ouvert et c'est le plus grand des ouverts contenus dans A.*

Preuve.

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe un ouvert O_x de X tel que $x \in O_x \subset A$, d'où $\{x\} \subset O_x \subset A$.Par conséquent, $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{x \in \overset{\circ}{A}} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in \overset{\circ}{A}} O_x \subset A$.
Considérons maintenant $(O_i)_{i \in I}$ la famille de tous les ouverts qui sont inclus dans A alors $\bigcup\limits_{x \in \overset{\circ}{A}} O_x \subset \bigcup\limits_{i \in I} O_i$. D'où

$$\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_{i \in I} O_i. \tag{1.1}$$

D'autre part, soit $y \in \bigcup\limits_{i \in I} O_i$, alors , il existe $i_0 \in I$ tel que $y \in O_{i_0} \subset A$, d'où $y \in \overset{\circ}{A}$. Donc

$$\bigcup_{i \in I} O_i \subset \overset{\circ}{A}. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on obtient que $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} O_i$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand des ouverts contenus dans A. □

Exemple 1.1.6. *1. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, l'intérieur d'un intervalle est l'intervalle ouvert de mêmes bornes, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\widehat{C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}}} = \emptyset$.*

2. Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$, $\mathcal{T}$ définit une topologie sur X et on a $\overset{\circ}{\widehat{\{1\}}} = \{1\}$, $\overset{\circ}{\widehat{\{2, 3, 4\}}} = \{2\}$.

Proposition 1.1.8. *Soit A et B deux parties d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Alors, on a*

1. *A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$;*
2. *$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$;*
3. *si $A \subset B$ alors on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;*
4. *$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$;*
5. *$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$*

Preuve.

1. Si A est un ouvert alors $A = \overset{\circ}{A}$. Réciproquement, si $A = \overset{\circ}{A}$, alors A est le voisinage de chacun de ses points, et par la Proposition 1.1.6, A est un ouvert.
2. Comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
3. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset A$, d'où on a $x \in O \subset B$, et par conséquent $x \in \overset{\circ}{B}$, donc on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
4. On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc, par 4., $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B}$, d'où $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, alors $x \in \overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{B}$. Donc, il existe $O, O' \in \mathcal{T}$ tels que $x \in O \subset A$ et $x \in O \subset B$, d'où $O \cap O' \in \mathcal{T}$ et $x \in O \cap O' \subset A \cap B$, par conséquent, $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$. Donc on a $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$, d'où l'égalité.
5. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc, par 4., $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$, d'où $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

□

Définition 1.1.9. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.*

- *On dit qu'un point $x \in X$ est* ***adhérent à*** *A si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$.*
- *L'ensemble des points adhérents à A s'appelle* ***l'adhérence (ou fermeture) de*** *A et se note $\overline{A}$. Alors*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset.$$

- *On dit qu'un point $x \in X$ est un* ***point d'accumulation (ou point limite) de*** *A si tout voisinage de x dans X contient un point de A autre que x.*
- *L'ensemble des points d'accumulation de A s'appelle* ***ensemble dérivé de*** *A et se note A'. Alors*

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall\ V \in \mathcal{V}(x),\ (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

- *On dit qu'un point $x \in A$ est un* ***point isolé dans*** *A s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$.*

Proposition 1.1.9. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. x est adhérent à A équivaut à dire que x est un point d'accumulation ou x est isolé.*

Proposition 1.1.10. *Soit A une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Alors,*

1. *$C_X^{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_X^A}$ et $C_X^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}$;*
2. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A, c'est l'intersection de tous les fermés contenant A.*

Preuve.

1. Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned}
x \in C_X^{\overset{\circ}{A}} &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \\
&\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T}, x \in O \Rightarrow O \not\subset A \\
&\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \not\subset A \\
&\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap C_X^A \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{C_X^A}.
\end{aligned}$$

D'où $\overset{\circ}{C_X^A} = \overline{C_X^A}$.

Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned} x \in C_X^{\overline{A}} &\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \\ &\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x),\ V \subset C_X^A \\ &\Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{T},\ x \in O \subset C_X^A \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}. \end{aligned}$$

D'où $C_X^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}$.

2. De 1., on a $\overline{A} = C_X(\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}})$. Comme $\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}$ est ouvert, $\overline{A}$ est fermé. D'autre part, puisque $\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} = C_X^{\overline{A}} \subset C_X^A$, on aura $A \subset \overline{A}$.

   Montrons que $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A. Soit B un fermé quelconque qui contient A, alors $C_X^B \subset C_X^A$ et puisque C_X^B est ouvert on a $C_X^B \subset \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} = C_X^{\overline{A}}$, d'où $\overline{A} \subset B$. Donc $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A. De plus, comme $\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ où $(O_i)_{i\in I}$ est la famille de tous les ouverts qui sont contenus dans C_X^A, on obtient $\overline{A} = \bigcap\limits_{i\in I} C_X^{O_i}$, où $(C_X^{O_i})_{i\in I}$ est alors la famille de tous les fermés qui contiennent A.

□

Exemple 1.1.7. *1. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, l'adhérence d'un intervalle (resp. d'une demi droite) est l'intervalle fermé (resp. la demi droite fermée) de mêmes bornes, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$.*

2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique où $X = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

Considérons la partie $A = \{a, b, c\}$ de X, alors $\overline{A} = X$.

Remarque 1.1.3. 1. Un point x de X est un point isolé dans X si et seulement si le singleton $\{x\}$ est un ouvert de X.

2. Si $\mathcal{T}$ est la topologie discrète, alors $A' = \emptyset$. Donc en général $A \not\subset A'$.

Proposition 1.1.11. *Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. Si $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages de x alors*

1. *$x \in \mathring{A}$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{B}_x$ tel que $V \subset A$.*

2. *$x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{B}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$.*

Proposition 1.1.12. *Soit A et B deux parties d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Alors,*

1. *A est fermé si est seulement si $A = \overline{A}$;*

2. *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;*

3. *Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$;*

4. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;*

5. *$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Preuve.

1. On a

$$(A \text{ fermé}) \iff (C_X^A \text{ ouvert}) \iff \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} = C_X^A \overset{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}=C_X^{\overline{A}}}{\iff} \overline{A} = A$$

.

2. De 2., $\overline{A}$ est fermé, donc de 3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

3. Si $A \subset B$, alors $C_X^B \subset C_X^A$. En utilisant la Proposition 1.1.8 3., on aura $\overset{\circ}{\widehat{C_X^B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}}$. Donc, de 1.,$C_X^{\overline{B}} \subset C_X^{\overline{A}}$, d'où $\overline{A} \subset \overline{B}$.

4. On a, en utilisant la Proposition 1.1.8 4.,

$$\overline{A \cup B} = \overline{C_X^{C_X^A \cap C_X^B}} = C_X^{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A \cap C_X^B}}} = C_X^{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} \cap \overset{\circ}{\widehat{C_X^B}}} = C_X^{C_X^{\overline{A}} \cap C_X^{\overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

5. Par la Proposition 1.1.8 5., on a

$$\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} \cup \overset{\circ}{\widehat{C_X^B}} \subset \overset{\circ}{\widehat{C_X^A \cup C_X^B}},$$

donc

$$C_X^{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A \cup C_X^B}}} \subset C_X^{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} \cup \overset{\circ}{\widehat{C_X^B}}}$$

mais

$$C_X^{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A \cup C_X^B}}} = \overline{C^{C_X^A \cup C_X^B}} = \overline{A \cap B} \quad \text{et} \quad C_X^{\overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} \cup \overset{\circ}{\widehat{C_X^B}}} = C^{C_X^{\overline{A}} \cup C_X^{\overline{B}}} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

□

Définition 1.1.10. *Soit A une partie d'un espace topologique $(X,\mathcal{T})$.*
On appelle ***frontière*** *de A et on note $Fr(A)$, l'ensemble*

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{C_X^A} = \overline{A} \cap \overset{\circ}{C_X^A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

La frontière de A est donc un fermé de $(X,\mathcal{T})$.

Exemple 1.1.8. *Dans $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$,*

$$Fr([a,b]) = Fr([a,b[) = Fr(]a,b]) = Fr(]a,b[) = \{a,b\},\ \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b,$$

$$Fr(\mathbb{R}) = \emptyset, \quad Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

Proposition 1.1.13. *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X. Alors,*

1. *$Fr(A) = Fr(C_X^A)$ et $A = Fr(A)$ si et seulement si A est un fermé d'intérieur vide ;*
2. $$Fr(\overline{A}) \subset Fr(A); \qquad Fr(\overset{\circ}{A}) \subset Fr(A); \qquad Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B);$$
3. *si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, alors $Fr(A\cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$;*
4. *A est un ouvert si et seulement si $A \cap Fr(A) = \emptyset$;*
5. *A est un fermé si et seulement si $Fr(A) \subset A$;*
6. *A est ouvert et fermé si et seulement si $Fr(A) = \emptyset$;*
7. *$\{\overset{\circ}{A}, Fr(A), ext(A)\}$ forme une partition de X.*

Preuve.

1. On a $Fr(C_X^A) = \overline{C_X^A} \cap \overline{C_X^{C_X^A}} = \overline{A} \cap \overline{C_X^A} = Fr(A)$.
   Supposons que $A = Fr(A) = \overline{A} \cap \overset{\circ}{C_X^A}$. Puisque $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a

   $$A = (\overline{A} \cap \overset{\circ}{C_X^A}) \cup \overset{\circ}{A} = (\overline{A} \cup \overset{\circ}{A}) \cap (\overset{\circ}{C_X^A} \cup \overset{\circ}{A}) = \overline{A} \cap X = \overline{A}.$$

   Donc A est fermé, alors $Fr(A) = A \setminus \overset{\circ}{A} = A$, d'où $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Réciproquement, si A est fermé et $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, alors $\overline{A} = A$ et donc $Fr(A) = A \setminus \emptyset = A$.

2. On a $\mathring{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overline{A}$, d'où $(\overline{A} \setminus \mathring{A}) \subset (\overline{A} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}})$. Par conséquent, on a $Fr(\overline{A}) \subset Fr(A)$.

   On a $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$, d'où $(\overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A}) \subset (\overline{A} \setminus \mathring{A})$. Par conséquent, on a $Fr(\mathring{A}) \subset Fr(A)$.

   On a

$$\begin{aligned}
F(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{C_X^{A \cup B}} \\
&= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C_X^A \cap C_X^B)} \\
&\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C_X^A} \cap \overline{C_X^B} \\
&= (\overline{A} \cap \overline{C_X^A} \cap \overline{C_X^B}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C_X^A} \cap \overline{C_X^B}) \\
&\subset (\overline{A} \cap \overline{C_X^A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C_X^B}) \\
&= Fr(A) \cup Fr(B).
\end{aligned}$$

3. Puisque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, on a $\overline{A} \cup B = A \cup \overline{B} = \emptyset$, alors $B \subset C_X^{\overline{A}}$ et $A \subset C_X^{\overline{B}}$, d'où $A \cup B \subset C_X^{\overline{A}} \cup C_X^{\overline{B}}$. Comme $C_X^{\overline{A}}$ et $C_X^{\overline{B}}$ sont ouverts, $C_X^{\overline{A}} \cup C_X^{\overline{B}}$ est ouvert. Donc on a

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subset C_X^{\overline{A}} \cup C_X^{\overline{B}}.$$

   D'où

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \big(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \cap C_X^{\overline{A}}\big) \cup \big(\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \cap C_X^{\overline{B}}\big).$$

   Or

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \cap C_X^{\overline{A}} &\subset (A \cup B) \cap C_X^{\overline{A}} \\
&= (A \cap C_X^{\overline{A}}) \cup (B \cap C_X^{\overline{A}}) \\
&= \emptyset \cup B = B.
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \cap C_X^{\overline{B}} &\subset (A \cup B) \cap C_X^{\overline{B}} \\
&= (A \cap C_X^{\overline{B}}) \cup (B \cap C_X^{\overline{B}}) \\
&= A \cup \emptyset = A.
\end{aligned}$$

   Donc $U = \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \cap C_X^{\overline{A}}$ (resp. $V = \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \cap C_X^{\overline{B}}$) est un ouvert de X contenu dans B (resp. A), alors on a $U \subset \mathring{B}$ et $V \subset \mathring{A}$, d'où $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Par conséquent, on a

$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, d'où

$$\begin{aligned}
F(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \\
&= (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B}) \\
&= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C_X^{\mathring{A} \cup \mathring{B}} \\
&= (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (C_X^{\mathring{A}} \cap C_X^{\mathring{A}}) \\
&= (\overline{A} \cap C_X^{\mathring{A}} \cap C_X^{\mathring{A}}) \cup (\overline{B} \cap C_X^{\mathring{A}} \cap C_X^{\mathring{A}}) \\
&= (\overline{A} \cap C_X^{\mathring{A}}) \cup (\overline{B} \cap C_X^{\mathring{B}}) \\
&= Fr(A) \cup Fr(B).
\end{aligned}$$

4. Si A est ouvert dans X, alors $\mathring{A} = A$, d'où $Fr(A) \cap A = (\overline{A} \setminus A) \cap A = \emptyset$. Inversement, supposons que $Fr(A) \cap A = \emptyset$. Comme on a $A \subset \overline{A} = \mathring{A} \cup Fr(A)$, alors $A \subset \mathring{A}$. Donc A est ouvert dans X.

5. On a $Fr(A) \subset \overline{A}$ et $\overline{A} = \mathring{A} \cup Fr(A) \subset A \cup Fr(A)$. Si A est fermé dans X, alors $\overline{A} = A$, d'où $Fr(A) \subset A$. Réciproquement, si $Fr(A) \subset A$, alors $\overline{A} \subset A$, donc A est fermé dans X.

6. Ceci résulte de 3 et 4.

7. On a
$$Fr(A) \cap \mathring{A} = (\overline{A} \setminus A) \cap \mathring{A} = \emptyset,$$
$$Fr(A) \cap ext(A) = (\overline{A} \cap \overline{C_X^A}) \cap \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} = \overline{A} \cap \overline{C_X^A} \cap C_X^{\overline{A}} = \emptyset$$
et
$$\mathring{A} \cap ext(A) = \mathring{A} \cap \overset{\circ}{\widehat{C_X^A}} = \emptyset.$$
De plus
$$\mathring{A} \cup Fr(A) \cup ext(A) = \mathring{A} \cup (\overline{A} \cap \overline{C_X^A}) \cup C_X^{\overline{A}} = (\mathring{A} \cup \overline{A} \cup C_X^{\overline{A}}) \cap (\mathring{A} \cup C_X^{\mathring{A}} \cup C_X^{\overline{A}}) = X \cap X = X.$$
Donc $\{\mathring{A}, Fr(A), ext(A)\}$ forme une partition de X.

□

Définition 1.1.11. *Une partie A d'un espace topologique X est dite* ***dense*** *dans X si $\overline{A} = X$.*

Exemple 1.1.9. *1. Soit* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$*,* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

2. *Soit* $X = \{1,2,3,4\}$ *et* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}, X\}$ *une topologie sur* X*. Soit* $A = \{1,2\}$*, alors* $\overline{A} = X$*, donc* A *est dense dans* X*.*

Définition 1.1.12. *On dit qu'un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *est* ***séparable*** *s'il admet une partie dénombrable et dense.*

Exemple 1.1.10. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ *est séparable car* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Proposition 1.1.14. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $\mathcal{B}$ *une base d'ouverts de* X *et* A *un sous ensemble de* X*. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A *est dense dans* X*.*

(ii) Pour tout ouvert non vide O *de* X*, on a* $A \cap O \neq \emptyset$*.*

(iii) Pour tout $B \in \mathcal{B}$ *tel que* $B \neq \emptyset$*, on a* $A \cap B \neq \emptyset$*.*

Preuve.

(i) $\Rightarrow$ *(ii).* Supposons A dense dans X, i.e. $\overline{A} = X$. Alors pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X, on a $A \cap V \neq \emptyset$. Soit O un ouvert non vide de X. Comme O est voisinage de chacun de ses points, on en déduit que $A \cap O \neq \emptyset$.
L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est triviale.
(iii) $\Rightarrow$ *(i).* Supposons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$. Si $\overline{A} \neq X$, alors $C_X^{\overline{A}}$ est un ouvert non vide de X et on a $C_X^{\overline{A}} \cap A = \emptyset$. Donc il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, $B \subset C_X^{\overline{A}}$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse, donc on a $\overline{A} = X$. $\square$

Définition 1.1.13. *Soit* X *espace topologique.*

1. *On dit que* X *vérifie le* ***premier axiome de dénombrabilité*** *si tout* $x \in X$ *admet un système fondamental au plus dénombrable de voisinages.*
2. *On dit que* X *vérifie le* ***second axiome de dénombrabilité*** *si la topologie de* X *admet une base au plus dénombrable d'ouverts.*

1.1.5 Axiomes de séparation

Définition 1.1.14. *Un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *est dit* ***séparé*** *ou* ***de Hausdorff*** *si la propriété suivante est vérifiée, dite* ***propriété de séparation de Hausdorff****.*

(**H**) *Pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe deux ouverts contenant respectivement x et y, d'intersection vide.*

Exemple 1.1.11.

1. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ est séparé.

2. Soit $X = \{a, b, c\}$ muni de la topologie discrète, alors X est séparé.

Proposition 1.1.15. *Un espace topologique X est séparé si et seulement si pour tout point $x \in X$, l'intersection de tous les voisinages fermés de x se réduit à $\{x\}$.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Soit X une espace topologique séparé et soit $x \in X$, montrons que $\{x\} = \bigcap\limits_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ V_x \text{ fermé}}} V_x$.
On suppose le contraire, alors il existe $y \in \bigcap\limits_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ V_x \text{ fermé}}} V_x$ et $y \neq x$, et comme X est séparé, il existe deux ouverts $O_x \in \mathcal{V}(x)$ et $O_y \in \mathcal{V}(y)$ tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$, donc $O_x \subset C_X^{O_y}$. $C_X^{O_y}$ est un fermé qui contient un ouvert qui contient x, donc $C_X^{O_y} \in \mathcal{V}(x)$ et $y \notin C_X^{O_y}$, contradiction avec la supposition. D'où $\{x\} = \bigcap\limits_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ V_x \text{ fermé}}} V_x$.

$\Leftarrow$) On suppose que $\{x\} = \bigcap\limits_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ V_x \text{ fermé}}} V_x$, pour tout $x \in X$, et on montre que X est séparé.
Soit $x,\ y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $y \notin \bigcap\limits_{\substack{V_x \in \mathcal{V}(x) \\ V_x \text{ fermé}}} V_x$, c'est à dire, il existe un fermé $V_x \in \mathcal{V}(x)$, tel que $y \notin V_x$ donc $y \in C_X^{V_x}$, et comme $C_X^{V_x}$ est ouvert, c'est un voisinage de y. De plus, comme $V_x \in \mathcal{V}(x)$, il existe un ouvert O_x tel que $x \in O_x \in V_x$, et en posant $O_y = C_X^{V_x}$, on ait $O_y \cap O_x = \emptyset$. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 1.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et soit $x \in X$. Le singleton $\{x\}$ est fermé.*

Remarque 1.1.4. La propriété de Hausdorff est équivalente à

($\mathbf{H_1}$) Pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$, tels que $V \cap W = \emptyset$.

Définition 1.1.15. *Soit X un espace topologique séparé. X est dit **espace normal** si pour tous ensembles fermés et disjoints A et B dans X, il existe deux ouverts disjoints O_A et O_B dans X tels que $A \subset O_A$ et $B \subset O_B$.*

1.2 Exemples de topologies

1.2.1 Topologie induite (Trace)

Définition 1.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. On appelle la* ***topologie trace*** *ou* ***induite*** *sur A qu'on note $\mathcal{T}_A$ la topologie définie par*

$$\mathcal{T}_A = \{V = O \cap A,\ O \in \mathcal{T}\}.$$

Le couple $(A, \mathcal{T}_A)$ est appelé ***sous espace topologique*** *de X.*
L'ensemble $V = O \cap A$ est appelé ***la trace*** *de O sur A.*

Exemple 1.2.1. *Considérons la topologie*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ et le sous ensemble $A = \{a, d, e\}$ de X. Alors la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A est

$$\mathcal{T}_A = \{V = O \cap A,\ O \in \mathcal{T}\} = \{\emptyset, A, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.*

1. *Les fermés de $(A, \mathcal{T}_A)$ sont les ensembles de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de $(X, \mathcal{T})$.*
2. *Sois $x \in A$. Les voisinages de x_0 dans $(A, \mathcal{T}_A)$ sont les ensembles de la forme $V \cap A$ où V est un voisinage de x dans $(X, \mathcal{T})$.*

Preuve.

1. Soit B un fermé dans $(A, \mathcal{T}_A)$, alors $C_A^B \in \mathcal{T}_A$ donc il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $C_A^B = O \cap A$, d'où

   $$B = C_A^{O \cap A} = A \setminus (O \cap A) = A \cap C_X^{O \cap A} = A \cap (C_X^O \cup C_X^A) = (A \cap C_X^O) \cup (A \cap C_X^A) = C_X^O \cap A$$

   et C_X^O est fermé.
   Inversement si F est un fermé dans X alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $F = C_X^O$ et

   $$F \cap A = C_X^O \cap A = C_A^{O \cap A} \text{ fermé dans } (A, \mathcal{T}_A).$$

2. Soit W un voisinage de x dans $(A, \mathcal{T}_A)$, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \cap A \subset W$, cela implique que $x \in O \subset W \cup O = V$. Donc V est un voisinage de x dans $(X, \mathcal{T})$ et

$$V \cap A = (W \cup O) \cap A = (W \cup A) \cup (O \cap A) \overset{O \cap A \subseteq W}{=} W \cap A \overset{W \subseteq A}{=} W.$$

Inversement, si V est un voisinage de x dans $(X, \mathcal{T})$, alors il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$ donc $x \in O \cap A \subset V \cap A$ comme $O \cap A \in \mathcal{T}_A$, $V \cap A$ est un voisinage de x dans $(A, \mathcal{T}_A)$.

□

Proposition 1.2.2. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.*

1. *A est un ouvert dans X si et seulement si tout ouvert dans $(A, \mathcal{T}_A)$ est un ouvert dans X.*
2. *A est un fermé dans X si et seulement si tout fermé dans $(A, \mathcal{T}_A)$ est un fermé dans X.*
3. *Soit $B \subset A$. On note $\overline{B}^A$ l'adhérence de B dans l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$, alors $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$.*

1.2.2 Topologie engendrée par une famille de parties

Définition 1.2.2. *Soit X un ensemble et $\mathcal{A}$ une famille de parties de X. L'intersection de toutes les topologies qui contiennent $\mathcal{A}$ est appelée **topologie engendrée par** $\mathcal{A}$. C'est la topologie la moins fine sur X qui contient $\mathcal{A}$ on la note $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.*

Proposition 1.2.3. *Les intersections finies des éléments de $\mathcal{A}$ forment une base d'ouverts de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.*

1.2.3 Topologie produit

Définition 1.2.3. *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques. On appelle **ouvert élémentaire** (ou **premier**) de $X = X_1 \times X_2$ toute partie de la forme $O_1 \times O_2$ où $O_1 \in \mathcal{T}_1$ et $O_2 \in \mathcal{T}_2$.*

Remarque 1.2.1. L'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire.

Théorème et Définition 1.2.4. *Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $X = X_1 \times X_2$. La famille formée des réunions quelconques d'ouverts élémentaires*

$$\mathcal{T}_X = \{\bigcup_{k\in I} O_k,\ O_k = O_1^k \times O_2^k,\ O_1^k \in \mathcal{T}_1,\ O_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

*définit sur X une topologie appelée la **topologie produit**.*
*$(X, \mathcal{T}_X)$ est appelé **espace topologique produit** des $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$.*

Remarque 1.2.2. La topologie produit est la topologie engendrée par la famille des ouverts élémentaires, donc, de la Proposition 1.2.3, les ouvert élémentaires forment une base d'ouverts.

Exemple 1.2.2. *Soit $X = \{1, 2, 3\}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ et soit $Y = \{a, b\}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, \{b\}, Y\}$.*
On a

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$

et les ouverts élémentaires sont $\emptyset$, $\{(1, b)\}$, $\{(1, a), (1, b)\}$, $\{(1, b), (2, b), (3, b)\}$ et $X \times Y$. Donc

$$\mathcal{T}_{X\times Y} = \big\{\emptyset, \{(1, b)\}, \{(1, a), (1, b)\}, \{(1, b), (2, b), (3, b)\}, \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}, X \times Y\big\}.$$

Proposition 1.2.5. *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et soit $x = (x_1, x_2)$ un point de l'espace produit $(X, \mathcal{T}_X)$. Alors $V \in \mathcal{V}_X(x)$ si et seulement s'il existe $V_1 \in \mathcal{V}_{X_1}(x_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}_{X_2}(x_2)$ tels que $V_1 \times V_2 \subset V$.*

Proposition 1.2.6. *Si $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ sont deux espaces topologique séparés alors l'espace topologique produit est séparé.*

Preuve.

Soit (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$ tels que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, alors $x_1 \neq x_2$ ou bien $y_1 \neq y_2$. Si $x_1 \neq x_2$ et puisque X_1 est séparé, il existe $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_1$ tels que $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. On a donc $O_1 \times X_2,\ O_2 \times X_2 \in \mathcal{T}_{X_1\times X_2}$, $(x_1, y_1) \in O_1 \times X_2$, $(x_2, y_2) \in O_2 \times X_2$ et $(O_1 \times X_2) \cap (O_2 \times X_2) = (O_1 \cap O_2) \times X_2 = \emptyset$.
Si $y_1 \neq y_2$, on procède de la même manière en utilisant le fait que X_2 est séparé. Donc l'espace topologique produit est séparé. $\square$

Définition 1.2.4. *On appelle* ***topologie usuelle sur*** $\mathbb{R}^n$ *(*$n \in \mathbb{N}^*$*) la topologie produit des topologies usuelles sur* $\mathbb{R}$*.*

1.3 Limite et continuité

1.3.1 Limite d'une suite

Une suite de points d'un ensemble non vide X est une application f de $\mathbb{N}$ dans X. L'image $f(n)$ d'un $n \in \mathbb{N}$ par f sera notée x_n et sera appelée terme d'ordre n de la suite f. La suite elle-même f sera représentée par la notation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n\geq 0}$, ou simplement $(x_n)_n$. Il importe cependant de ne pas confondre une suite avec l'ensemble de ses valeurs.

Une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de points de X est appelée sous suite ou suite extraite de $(x_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $y_n = x_{\varphi(n)}$. En général, on note une telle sous suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$, où $n_k = \varphi(k)$.

Définition 1.3.1. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* X *et* $\ell \in X$*.*

1. *On dit que* ℓ *est une* ***limite*** *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quand* n *tend vers l'infini si pour tout voisinage* V *de* ℓ *dans* X*, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq n_0$*,* $x_n \in V$*. Cela se résume en*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V.$$

2. *On dit que* ℓ *est une* ***valeur d'adhérence*** *de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si tout voisinage* V *de* ℓ *contient une infinité de termes de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, i.e.,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ x_p \in V.$$

3. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***convergente*** *si elle a une (ou plusieurs) limite,* ***divergente*** *si elle n'a pas de limite.*

Remarque 1.3.1. Toute limite est valeur d'adhérence.

Exemple 1.3.1. *1. Dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ *on pose* $x_n = \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$*.*

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une seule valeur d'adhérence qui est la limite* $x = 0$*. En effet, pour tout*

$V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset V$. Or, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ce qui implique que $x_n \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, d'où $x_n \in V$. Donc 0 est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $\mathbb{R}$ est séparé, voir la Proposition 1.3.3) et valeur d'adhérence. De plus, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$ on a :

<u>Si $\ell < 0$</u>, il existe $V =]-\infty, 0[\in \mathcal{V}(\ell)$ et $n_0 = 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \notin V$, alors ℓ n'est pas un point d'adhérence.

<u>Si $\ell > 1$</u>, il existe $V =]1, \infty[\in \mathcal{V}(\ell)$ et $n_0 = 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \notin V$, alors ℓ n'est pas un point d'adhérence.

<u>Si $0 < \ell < 1$</u>, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_{m+1} \leq \ell \leq x_m$. Donc il existe $V =]x_{m+2}, x_{m-1}[\in \mathcal{V}(\ell)$ et il existe $n_0 = m+2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \notin V$, donc ℓ n'est pas un point d'adhérence.

<u>Si $\ell = 1$</u>, il existe $V =]\frac{1}{2}, \infty[\in \mathcal{V}(\ell)$ et $n_0 = 1$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \notin V$, alors 1 n'est pas un point d'adhérence.

2. *Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à terme général $x_n = (-1)^n$.*
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1. En effet,
   $$\forall V \in \mathcal{V}(1),\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{2n} = 1 \in V$$
   et
   $$\forall V \in \mathcal{V}(-1),\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{2n+1} = -1 \in V,$$
   mais pour $V =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$, $V \in \mathcal{V}(1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m = n+1 \geq n$ tel que $x_m = -1 \notin V$, donc 1 n'est pas limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Même chose pour -1.

Proposition 1.3.1. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n = \{x_p,\ p \geq n\}$. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite quelconque est fermé dans X.*

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}
\ell \text{ est valeur d'adherence de } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ x_p \in V \\
&\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \forall n \in \mathbb{N},\ V \cap A_n \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ell \in \overline{A_n} \\
&\Leftrightarrow \ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.2. *Soit X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in X$. S'il existe une suite $(x_n)_n$ dans A convergeant vers x, alors $x \in \overline{A}$.*

Preuve.

Soit $x \in X$ et soit $(x_n)_n$ une suite dans A convergeant vers x. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in V$. Donc $A \cap V \neq \emptyset$. D'où $x \in \overline{A}$. □

Proposition 1.3.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé, alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au plus une limite.*
Si une telle limite $\ell \in X$ existe, on dit que ℓ est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ quand n tend vers l'infini et on note $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Preuve.

Par l'absurde, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait deux limites distinctes $\ell_1 \neq \ell_2$. Comme X est séparé, il existe $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. D'après la Définition 1.3.1, il existe deux entiers n_1 et n_2 de $\mathbb{N}$ tels que

$$(\forall n \geq n_1,\ x_n \in V_1) \quad \text{et} \quad (\forall n \geq n_2,\ x_n \in V_2),$$

mais alors $x_{\max\{n_1,n_2\}} \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$, absurde! □

1.3.2 Continuité

Définition 1.3.2. *Soient $(X, \mathcal{T})$ et (Y, Θ) deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application et $x_0 \in X$.*
*On dit que f est **continue** au point x_0 si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes.*

1. *Pour tout voisinage* W *de* $f(x_0)$ *dans* Y, $f^{-1}(W)$ *est un voisinage de* x_0 *dans* X.
2. *Pour tout voisinage* W *de* $f(x_0)$ *dans* Y , *il existe un voisinage* V *de* x_0 *dans* X *tel que* $f(V) \subset W$.

On dit que f *est continue sur* X *si elle l'est en tout point de* X.

Exemple 1.3.2. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *et* (Y, Θ) *deux espaces topologiques.*

1. *Les projections*

$$\begin{array}{rcl} \pi_X : X \times Y & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \pi_Y : X \times Y & \to & Y \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$

   sont continues.

2. *L'application identique suivante est continue.*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Id}_X : X & \to & X \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

3. *Toute application constante de* $(X, \mathcal{T})$ *dans* (Y, Θ) *est continue.*

Définition 1.3.3. *Un* ***homéomorphisme*** *d'un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *sur un autre espace topologique* (Y, Θ) *est une application* $f : X \to Y$ *bijective continue et dont l'inverse* $f^{-1} : Y \to X$ *est continue.*
On dit que deux espaces topologiques X *et* Y *sont* ***homéomorphes*** *s'il existe un homéomorphisme entre eux, et on note* $X \backsimeq Y$.

Proposition 1.3.4. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *et* (Y, Θ) *deux espaces topologiques et* $f : X \to Y$ *une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) f *est continue.*

(ii) Pour toute partie A *de* X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(iii) Pour tout fermé S *de* Y, $f^{-1}(S)$ *est un fermé de* X.

(iv) Pour tout ouvert O *de* Y, $f^{-1}(O)$ *est un ouvert de* X.

Preuve.

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Supposons que f est continue et soit $A \subset X$. Soit $x \in \overline{A}$ et soit $W \in \mathcal{V}(f(x))$. Comme f est continue en x, on a $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$ et donc $f^{-1}(W) \cap A \neq \emptyset$. D'où $f(f^{-1}(W) \cap A) \neq \emptyset$. Or,

$$f(f^{-1}(W) \cap A) \subset f(f^{-1}(W)) \cap f(A) \subset W \cap f(A).$$

Il s'ensuit que $W \cap f(A) \neq \emptyset$, et donc $f(x) \in \overline{f(A)}$. Par conséquent, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Soit S un fermé de Y, alors $\overline{S} = S$.
Soit $x \in \overline{f^{-1}(S)}$, alors

$$f(x) \in f(\overline{f^{-1}(S)}) \subset \overline{f(f^{-1}(S))} \subset \overline{S} = S$$

d'où $x \in f^{-1}(S)$. Donc, $\overline{f^{-1}(S)} \subset f^{-1}(S)$ et comme $f^{-1}(S) \subset \overline{f^{-1}(S)}$, on obtient l'égalité.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*). Soit O and ouvert de Y, alors C_Y^O est fermé. Donc $f^{-1}(C_Y^O) = C_X^{f^{-1}(O)}$ est fermé ce qui implique que $f^{-1}(O)$ est ouvert.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*i*). Soit $x \in X$. Pour tout $W \in \mathcal{V}(f(x))$, il existe $O \in \Theta$ tel que $f(x) \in O \subset W$, alors $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(W)$, et comme $f^{-1}(O)$ est ouvert, on obtient $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$. D'où f est continue en x et puisque x est arbitraire, f est continue sur X. $\square$

Définition 1.3.4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ et (Y, Θ) deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application.*
f est dite ***ouverte*** *(resp.* ***fermée****) si pour toute partie ouverte (resp. fermé) V de X, $f(V)$ est un ouvert (resp. fermé) de Y.*