CHAPITRE 2

Espaces métriques

Définition 2.0.1 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski). *Soient x, y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)$. Alors,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz),}$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inégalité de Minkowski).}$$

Étant donner deux fonctions continues $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\left|\int_a^b \big(f(x)g(x)\big)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz),}$$

et

$$\left(\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inégalité de Minkowski).}$$

2.1 Distances

Définition 2.1.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle* ***distance*** *sur X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants.*

1. Séparation. *Pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

2. Symétrie. *Pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.*
3. Inégalité triangulaire. *Pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

*Le couple (X, d) est appelé un **espace métrique**.*

*Si d est à valeur dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et vérifie les trois axiomes précédents, on dit que d est un **écart**.*

Exemple 2.1.1.

1. *Soit X un ensemble non vide. L'application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

*est une distance sur X appelée la **distance triviale**.*

2. *Sur $\mathbb{R}$, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = |x - y|$ et une distance dite **distance usuelle**.*
3. *Soit $X = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_2)$ posons*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

*On vérifie facilement que d_1 et d_∞ sont des distances. Pour d_2 qui n'est autre que la **distance euclidienne**, on vérifie l'inégalité triangulaire en utilisant l'inégalité de Minkowski.*

Proposition 2.1.1. *Si d est une distance sur X, alors, pour tout $x, y, z \in X$*

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y).$$

Preuve.

Soit $x, y, z \in X$. On a d'après 3.

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{et} \quad d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y).$$

D'où, en utilisant 2.

$$d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y) \quad \text{et} \quad d(z, y) - d(x, z) \leq d(x, y).$$

Donc

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y).$$

$\square$

Définition 2.1.2 (Boules). *Soient (X,d) un espace métrique, $x_0 \in X$ et $r > 0$.*

- *On appelle **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$B(x_0,r) = \{y \in X,\ d(x_0,y) < r\}.$$

- *On appelle **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$\overline{B}(x_0,r) = \{y \in X,\ d(x_0,y) \leq r\}.$$

- *On appelle **sphère** de centre x_0 et de rayon r l'ensemble*

$$S(x_0,r) = \{y \in X,\ d(x_0,y) = r\}.$$

On remarque que $\overline{B}(x_0,r) = B(x_0,r) \cup S(x_0,r)$.

Exemple 2.1.2. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle d, on a $B(1,1) =]0,2[$, $\overline{B}(1,1) = [0,2]$ et $S(1,1) = \{0,2\}$. Plus généralement, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ on a $B(x_0,r) =]x_0 - r, x_0 + r[$, $\overline{B}(x_0,r) = [x_0 - r, x_0 + r]$ et $S(x_0,r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$.*

Proposition 2.1.2. *Soient (X,d) un espace métrique et $x \in X$. Alors si $r \leq r'$, on a*

$$B(x,r) \subset B(x,r') \quad \text{et} \quad \overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(x,r').$$

Si $r < r'$, alors $\overline{B}(x,r) \subset B(x,r')$.

Définition 2.1.3. *Soit (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et A et B deux parties non vides de X.*

- *On appelle **distance de** x **à** A le nombre réel positif*

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$

- *On appelle **distance entre A et B** le nombre réel positif*

$$d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y).$$

– *On appelle **diamètre** de A l'élément de* $\overline{\mathbb{R}}_+$

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

Remarque 2.1.1. Pour l'ensemble vide, on adopte les conventions suivantes

$$d(x,\emptyset) = +\infty, \quad d(A,\emptyset) = d(\emptyset, A) = +\infty, \quad \delta(\emptyset) = -\infty.$$

Définition 2.1.4. *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est **bornée** si elle est contenue dans une boule fermée, c'est-à-dire, s'il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subset \overline{B}(x_0, r)$.*

Proposition 2.1.3. *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$ non vide. Alors A est borné si seulement si $\delta(A) < +\infty$.*

Preuve.

Si A est borné, alors il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que $A \subset \overline{B}(x_0, r)$, d'où pour tout $x \in A$, $d(x, x_0) \leq r$. Alors pour tous $x, y \in A$, $d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0, y) \leq 2r$. Donc $\delta(A) \leq 2r < +\infty$.

Inversement, si $\delta(A) < +\infty$, alors il existe $r > 0$ tel que $\delta(A) \leq r$. Donc pour tous $x, y \in A$, $d(x,y) \leq r$.

Pour $x_0 \in A$ fixé, pour tout $x \in A$, $d(x_0, x) \leq r$, donc $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Par conséquent, $A \subset \overline{B}(x_0, r)$. □

Définition 2.1.5. *Un distance d sur un ensemble X est dite **bornée** si $\delta(X) < \infty$.*

Définition 2.1.6. *Une suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique (X,d) est dite **bornée** si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de (X,d).*

Définition 2.1.7. *Soit X un ensemble et (Y,d) un espace métrique. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est **bornée** si son image $f(X)$ et bornée.*

2.2 Topologie associée à une distance

Proposition 2.2.1. *Soit (X,d) un espace métrique et soit $\mathcal{T}_d$ la famille de sous ensembles de X définie par*

$$\mathcal{T}_d = \{A \subset X, \ \forall x \in A, \ \exists r > 0, \ B(x,r) \subset A\}.$$

Alors $\mathcal{T}_d$ est une topologie sur X appelée **la topologie associée à** *d. (X,d) est donc un espace topologique.*

Preuve.

$(\mathcal{O}_1)$ Supposons que $\emptyset \notin \mathcal{T}_d$ alors il existe $x \in \emptyset$ tel que pour tout $r > 0$, $B(x,r) \not\subset \emptyset$, contradiction avec la vacuité de $\emptyset$, donc $\emptyset \in \mathcal{T}_d$. De plus

$$\forall x \in X,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \subset X.$$

donc $X \in \mathcal{T}_d$

$(\mathcal{O}_2)$ Soit $A, B \in \mathcal{T}_d$ et soit $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc il existe $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(x,r_1) \subset A$ et $B(x,r_2) \subset B$. On pose $r = \min\{r_1, r_2\}$, alors $B(x,r) \subset A \cap B$, donc $A \cap B \in \mathcal{T}_d$.

$(\mathcal{O}_3)$ Soit $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}_d$ et soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ et comme $A_{i_0} \in \mathcal{T}_d$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. D'où $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_d$.

De $(\mathcal{O}_1)$, $(\mathcal{O}_2)$ et $(\mathcal{O}_3)$, $\mathcal{T}_d$ est une topologie sur X. □

Remarque 2.2.1.

- Par la proposition précédente, tout espace métrique et topologique.
- Lorsque nous parlons de la topologie d'un espace métrique (X,d), il s'agira toujours de la topologie associée à d, i.e., $\mathcal{T}_d$ et

$$(A \text{ ouvert}) \Leftrightarrow (A \in \mathcal{T}_d) \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A).$$

Exemple 2.2.1.

1. *La topologie associée à la distance usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Il existe d'autres distances sur $\mathbb{R}$ dont la topologie associée est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (par exemple $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$).*
2. *La topologie associée à la distance triviale est la topologie discrète.*

Proposition 2.2.2. *Soit (X,d) en espace métrique.*

Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule et fermée est un fermé.

Preuve.

Soit $x \in X$ et $r > 0$. Montrons que $B(x,r)$ est un ouvert.

Soit

$$y \in B(x,r) \Leftrightarrow d(x,y) < r \Leftrightarrow r - d(x,y) > 0.$$

Posons $\rho = r - d(x,y)$, alors $B(y,\rho) \subset B(x,r)$. En effet,

$$\begin{aligned} z \in B(y,\rho) &\Leftrightarrow d(y,z) < \rho = r - d(x,y) \\ &\Leftrightarrow d(x,y) + d(y,z) < r \\ &\Rightarrow d(x,z) < r \\ &\Leftrightarrow z \in B(x,r). \end{aligned}$$

D'où $B(x,r)$ est un ouvert.

Montrons que $\overline{B}(x,r)$ est un fermé, pour cela on montre que $C_X^{\overline{B}(x,r)}$ est un ouvert.

Soit

$$\begin{aligned} y \in C_X^{\overline{B}(x,r)} &\Leftrightarrow y \notin \overline{B}(x,r) \\ &\Leftrightarrow d(x,y) > r \\ &\Leftrightarrow d(x,y) - r > 0. \end{aligned}$$

Posons $\rho = d(x,y) - r$, alors $B(y,\rho) \subset C_X^{\overline{B}(x,r)}$. En effet,

$$\begin{aligned} z \in B(y,\rho) &\Leftrightarrow d(y,z) < \rho = d(x,y) - r \\ &\Leftrightarrow d(x,y) - d(y,z) > r \\ &\Rightarrow d(x,z) > r \\ &\Leftrightarrow z \notin \overline{B}(x,r) \\ &\Leftrightarrow z \in C_X^{\overline{B}(x,r)}. \end{aligned}$$

Donc, $C_X^{\overline{B}(x,r)}$ est un ouvert, d'où $\overline{B}(x,r)$ est un fermé. □

Proposition 2.2.3. *Soit (X,d) en espace métrique et $x \in X$.*

L'ensemble des boules ouvertes (resp. fermées) de centre x est une base de voisinages de x. Il en est de même de l'ensemble des boules ouvertes (resp. fermées) de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors (X,d) vérifie le premier axiome de dénombrabilité.

Preuve.

Montrons que l'ensemble des boules ouvertes de centre x, $\{B(x,r),\ r > 0\}$ est une base de voisinages de x.

Soit $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $O \in \mathcal{T}_d$ tel que $x \in O \subset V$. Or $O \in \mathcal{T}_d$ et $x \in O$ impliquent qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Donc, $B(x,r) \subset V$, d'où le résultat.

Aussi, soit $r' \in]0,r[$ alors $\overline{B}(x,r') \subset B(x,r) \subset V$, donc $\{\overline{B}(x,r),\ r > 0\}$ est une base de voisinage de x.

D'autre part, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < r$, donc $B(x,\frac{1}{n}) \subset B(x,r) \subset V$ et $\overline{B}(x,\frac{1}{n}) \subset B(x,r) \subset V$. D'où les deux ensembles $\{B(x,\frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\overline{B}(x,\frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des bases de voisinages de x. □

Remarque 2.2.2. De la proposition précédente ainsi que la Proposition **??**, on a

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ \overline{B}(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{B}(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Corollaire 2.1. *Un ouvert d'un espace métrique (X,d) est une union quelconque de boules ouvertes.*

Preuve.

Soit O un ouvert de (X,d). Pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x,r_x) \subset O$, alors $O \subset \bigcup_{x\in O} B(x,r_x) \subset O$. Donc $O = \bigcup_{x\in O} B(x,r_x)$. □

Proposition 2.2.4. *Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in X$. Alors*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0,$$

i.e., $\overline{A} = \{x \in X,\ d(x,A) = 0\}$.

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ \exists y_r \in A,\ 0 \leq d(x,y_r) < r \\ &\Leftrightarrow \inf_{y\in A} d(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x,y) = 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.5. *Tout espace métrique est séparé.*

Preuve.

Soit $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Posons $\rho = d(x,y) > 0$, alors

$$B(x, \frac{\rho}{2}) \cap B(y, \frac{\rho}{2}) = \emptyset.$$

En effet, s'il existait $z \in B(x, \frac{\rho}{2}) \cap B(y, \frac{\rho}{2})$, alors $z \in B(x, \frac{\rho}{2})$ et $z \in B(y, \frac{\rho}{2})$, d'où $d(z,x) < \frac{\rho}{2}$ et $d(z,y) < \frac{\rho}{2}$. Donc

$$\rho = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,$$

absurde ! ! □

Définition 2.2.1. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **métrisable**, s'il existe une distance d sur X telle que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

2.3 Limite et continuité dans un espace métrique

2.3.1 Limite d'une suite

Proposition 2.3.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in X$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, l) = 0$, i.e.,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, l) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(\ell, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, \ell) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, \ell) = 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.2. *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d) et soit $x \in X$. Alors*

$$(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow (\exists (x_n)_n \subset A,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x).$$

Preuve.

$\Rightarrow$) On a

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in A,\ d(x_n, x) < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}$ tend vers 0, donc $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

$\Leftarrow$) Proposition 1.3.2. □

Corollaire 2.2. *Une partie A d'un espace métrique (X, d) est fermée si et seulement si toute suite convergente (dans X) d'éléments de A, a sa limite dans A*

Preuve.

$\Rightarrow$) Si A est fermé alors $\overline{A} = A$, donc si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ avec $(x_n)_n \subset A$, par la Proposition 2.3.2, $x \in \overline{A} = A$.

$\Leftarrow$) Soit $x \in \overline{A}$, alors, il existe $(x_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, donc $x \in A$. D'où $\overline{A} \subset A$. or, $A \subset \overline{A}$, donc $A = \overline{A}$ est A est fermé. □

Proposition 2.3.3. *Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). Alors $x \in X$ est valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p \geq N,\ d(x_p, x) < \varepsilon.$$

Proposition 2.3.4. *Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). Alors $x \in X$ est valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement s'il existe une sous suite de (x_n) qui converge vers x.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que x est une valeurs d'adhérence de la suite (x_n) alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p \geq N,\ d(x_p, x) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Construisons par récurrence une sous suite qui converge vers x. Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie comme suit : On choisit $\varphi(0)$ arbitrairement. D'après (2.1), pour $\varepsilon = 1$, pour $N = \varphi(0) + 1$, on pose $\varphi(1) = p$, alors $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $d(x_{\varphi(1)}, x) < 1$.
Supposons que $\varphi(n-1)$ connu ($n \geq 1$), d'après (2.1), pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et $N = \varphi(n-1) + 1$, il existe $p \in \mathbb{N}$, qu'on note $\varphi(n)$ tel que

$$\varphi(n) > \varphi(n-1) \tag{2.2}$$

et

$$d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{1}{n}. \tag{2.3}$$

De (2.2) φ est strictement croissante et de (2.3), $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x.

$\Leftarrow$) Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x$ où $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est strictement croissante. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, on ait $d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon$.
Posons $m = \max\{N, n_0\}$ et $p = \varphi(m)$ alors $p \geq m$. Nous avons $p \geq N$ et $d(x_p, x) < \varepsilon$. Donc x est valeur d'adhérence de la suite. $\square$

Corollaire 2.3. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$, alors ℓ est l'unique valeur d'adhérence de la suite.*

Preuve.

En fait, ce corollaire vaut dès que X est un espace topologique séparé. Soit alors $\ell' \in X$ tel que $\ell \neq \ell'$. Il existe $V \in \mathcal{V}(\ell)$ et $W \in \mathcal{V}(\ell')$ tels que $V \cap W = \emptyset$. Comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in V$ et donc $x_n \notin W$, on constate que $\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in W\}$ est fini, d'où ℓ' n'est pas valeur d'adhérence. $\square$

2.3.2 Continuité

Proposition 2.3.5. *Soit (X, d), (Y, d') deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application et $x_0 \in X$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors $B(f(x_0), \varepsilon) \in \mathcal{V}(f(x_0))$. Donc il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(V) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. D'autre part, par la Proposition 2.2.3,

$$\begin{aligned} V \in \mathcal{V}(x_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \delta > 0,\ B(x_0, \delta) \subset V \\ &\Rightarrow \quad \exists \delta > 0,\ f(B(x_0, \delta)) \subset f(V) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad \exists \delta,\ \forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x, x_0) > \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\Leftarrow$) Soit $W \in \mathcal{V}(f(x_0))$, alors, par la Proposition 2.2.3, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset W$. Donc,

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 \quad &\Rightarrow \quad \exists \delta > 0, \forall x \in X,\ d(x, x_0) > \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \exists \delta > 0, \forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad \exists V = B(x_0, \delta) \in \mathcal{V}(x_0),\ f(V) \subset W. \end{aligned}$$

D'où f est continue en x_0. □

Proposition 2.3.6. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f : X \to Y$ une application. Alors, f est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout de suite $(x_n)_n$ de points de X convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que $(x_n)_n$ converge vers $x_0 \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$,

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Or, puisque $\delta > 0$ et $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_0, x) < \delta \overset{(2.4)}{\Rightarrow} d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

D'où $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

$\Leftarrow$) Supposons que f n'est pas continue en x_0, alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in X,\ d(x_0, x) < \delta \wedge d'(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in X,\ d(x_0, x_n) < \frac{1}{n} \wedge d'(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon.$$

On a donc construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0$, d'où $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

D'autre part $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_0 = n \in \mathbb{N}^*,\ d'(f(x_{n_0}), f(x_0)) \geq \varepsilon$, d'où $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$. □

Définition 2.3.1. *Soit (X, d), (Y, d') deux espaces métrique et $f : X \to Y$ une application. f est dite*

– ***uniformément continue*** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall (x, x') \in X^2,\ d(x, x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon;$$

– ***lipschitzienne*** *de rapports $k \geq 0$ si*

$$\forall (x, x') \in X^2,\ d'(f(x), f(x')) \leq kd(x, x').$$

Lorsque $k < 1$, on dit qu'elle est ***contractante****.*

Proposition 2.3.7. *Toute application lipschitzienne est uniformément continue et toute application uniformément continue et continue.*

Définition 2.3.2. *Soit (X, d), (Y, d') deux espaces métrique et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est une* ***isométrie*** *si elle est bijective et*

$$\forall (x, x') \in X,\ d'(f(x), f(x')) = d(x, x').$$

2.4 Sous espaces métriques et espaces produits

2.4.1 Sous espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. La restriction de la distance d à $A \times A$ vérifie évidemment les trois axiomes de distance, ainsi, (A, d) est aussi un espace métrique, on dit que c'est un **sous espace métrique** de (X, d).

Proposition 2.4.1. *1. Les ouverts de (A,d) sont les intersections des ouverts de (X,d) avec A.*

2. Une suite $(x_n)_n$ de points de A converge dans (A,d) si et seulement si elle converge dans (X,d) vers un point ℓ qui appartient à A.

2.4.2 Produits d'espaces métriques

On considère maintenant deux espaces métriques (X,d) et (Y,d'). Sur l'ensemble produit $X \times Y$ on définit les trois application suivantes, pour tous $(x,y),(x',y') \in X \times Y$

$$d_1((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d'(y,y'),$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = (d(x,x')^2 + d'(y,y')^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max\{d(x,x'),d(y,y')).$$

Proposition 2.4.2. *Les applications d_1, d_2, d_∞ sont des distances sur l'ensemble $X \times Y$.* On obtient ainsi trois espaces métriques appelés **espaces métriques produits** de (X,d) et (Y,d').

2.5 Diverses notions d'équivalence des distances

Définition 2.5.1. *On dit que deux distances d et d' sur un même ensemble X sont **topologiquement équivalentes** si $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. Ceci est équivalent à dire que les deux applications identiques suivantes sont continues.*

$$\begin{array}{rcl} Id_X : (X,d) & \to & (X,d') \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} Id_X : (X,d') & \to & (X,d) \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Définition 2.5.2. *On dit que deux distances d et d' sur un même ensemble X sont **uniformément équivalentes** si les deux applications identiques suivantes sont uniformément continue.*

$$\begin{array}{rcl} Id_X : (X,d) & \to & (X,d') \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} Id_X : (X,d') & \to & (X,d) \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Définition 2.5.3. *On dit que deux distances d et d' sur un même ensemble X sont **équivalentes** s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\forall x, y \in X, \ \alpha d'(x,y) \leq d(x,y) \leq \beta d'(x,y).$$

Ceci est équivalent à dire que les deux applications identiques suivantes sont lipschitziennes.

$$\begin{array}{rcl} Id_X : (X,d) & \to & (X,d') \\ x & \mapsto & x \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} Id_X : (X,d') & \to & (X,d) \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Proposition 2.5.1. *Deux distances équivalentes sont uniformément équivalentes et deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

Exemple 2.5.1. *Les trois distances d_1, d_2 et d_∞ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*
En effet, soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = |x_{i_0} - y_{i_0}|$$

pour un certain $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Donc

$$d_\infty(x,y) = |x_{i_0} - y_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = d_1(x,y)$$

et

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{i_0} - y_{i_0}| = n d_\infty(x,y).$$

D'où

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n d_\infty(x,y).$$

De même

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{i_0} - y_{i_0})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} d_\infty(x,y)$$

et

$$d_\infty(x,y) = ((x_{i_0} - y_{i_0})^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d_2(x,y).$$

D'où

$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y).$$

Proposition 2.5.2. *Soient (X,d) et (Y,d') deux espace métrique. Les trois distances d_1, d_2, d_∞ définies dans la sous-section 2.4.2 sur l'espace produit $X \times Y$ sont équivalentes.*

2.6 Espace complet

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.6.1. *On appelle* ***suite de Cauchy*** *toute de suite* $(x_n)_n$ *d'éléments de* X *vérifiant*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

i.e., $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m>n}} d(x_n, x_m) = 0.$

Proposition 2.6.1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Preuve.

Soit $(x_n)_n \subset X$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$, on ait $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n \geq n_0$ donc $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

C'est-à-dire $(x_n)_n$ et une suite de Cauchy. □

Proposition 2.6.2. *Toute suite de Cauchy est bornée*

Preuve.

Soit $(x_n)_n \subset X$ une suite de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$ et $n = n_0$, on a

$$\forall m > n_0,\ d(x_{n_0}, x_m) < 1.$$

On pose $M = \max\limits_{0\leq k\leq n_0} d(x_k, x_{n_0})$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $d(x_m, x_{n_0}) \leq \max\{M, 1\} = C$, d'où $(x_n)_n \subset \overline{B}(x_{n_0}, C)$. □

Proposition 2.6.3. *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente converge. Autrement dit, une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente.*

Preuve.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X et soit $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ une sous suite de $(x_n)_n$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell \in X$. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2})$$

et

$$(\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}).$$

On prend $n_0 = n_{k_1} \geq \max\{N, n_{k_0}\}$ et on a pour $m \geq n_0$

$$d(x_m, \ell) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, \ell) < \varepsilon,$$

donc, $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. □

Proposition 2.6.4. *Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Alors, si f est uniformément continue, l'image par f d'une suite de Cauchy dans X est une suite de Cauchy dans Y.*

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in X,\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Comme $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et $\delta > 0$ on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

D'où $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans Y. □

Définition 2.6.2. *Un espace métrique (X,d) et dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy dans (X,d) est convergente.*

Exemple 2.6.1. $\mathbb{R}$ *mini de la distance usuelle est complet.*

Théorème 2.6.5 (Théorème de prolongement). *Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques, A une partie dense dans X et $f : A \to Y$ une application uniformément continue. Si (Y,d') est complet, f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : X \to Y$. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.*

2.7 Théorème du point fixe

Définition 2.7.1. *Soit (X,d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application. On dit que $x \in X$ est un **point fixe** de f si $f(x) = x$.*

Théorème 2.7.1 (Théorème du point fixe). *Soit (X,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe.*

Preuve.

1. Existence. Soit $x_0 \in X$ et posons $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy.

Pour $n \geq 1$, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}),$$

avec $k < 1$. D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$.

• Si $d(x_1, x_0) = 0$, alors $x_1 = f(x_0) = x_0$, donc x_0 est un point fixe de f.

• Si $d(x_1, x_0) > 0$, soit $m, n \in \mathbb{N}$, tels que $m > n$. On a

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \sum_{i=0}^{m-n-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} k^{n+i} d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} k^{n+i}. \end{aligned}$$

En utilisant la somme d'une suite géométrique, il vient que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0) k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1-k} = \frac{k^n - k^m}{d}(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \quad (\text{puisque } 0 < k < 1).$$

Or, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = 0$, d'où $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m > n}} d(x_m, x_n) = 0$. Donc $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X qui est complet, alors la suite admet une limite que nous désignons par ℓ.

Enfin f étant lipschitzienne, elle est continue. Ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\ell)$, mais $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = \ell$, l'unicité de la limite nous donne $f(\ell) = \ell$.

2. Unicité. Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux points fixes avec $\ell_1 \neq \ell_2$, alors

$$d(\ell_1, \ell_2) = d(f(\ell_1), f(\ell_2)) \leq k d(\ell_1, \ell_2) < d(\ell_1, \ell_2).$$

Ceci est absurde, d'où l'unicité du point fixe. □