CHAPITRE 3

Espaces compacts

3.1 Espaces topologiques compacts

Définition 3.1.1. *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique, A un sous ensemble de X et $(U_i)_{i\in I}$ une famille de sous ensembles de X. On dit que $(U_i)_{i\in I}$ est* ***un recouvrement*** *de A si $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ et si $A = X$, on aura $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.*
Si tous les U_i sont des ouverts, on dit que cette famille est un ***recouvrement ouvert****.*
Si $J \subset I$ et J est fini, on dit que $(U_i)_{i\in J}$ est un ***sous recouvrement fini****.*

Exemple 3.1.1. *Considérons l'espace topologique $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$.*
- *$(\{x\})_{x\in\mathbb{R}}$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$.*
- *$(]n, n+2[)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$.*
- *$(]-1, \frac{1}{n}[)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement ouvert de $]0,1[$ et pour $J = \{1,2,3\} \subset \mathbb{N}^*$, $(]-1, \frac{1}{n}[)_{n\in J}$ est un sous recouvrement fini.*

Définition 3.1.2. *Un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ est dit* **compact** *s'il est séparé et s'il vérifie la propriété suivante dite* ***axiome de Borel-Lebesgue****.*
De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e.,

$$\forall (O_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T},\ X = \bigcup_{i\in I} O_i \Rightarrow \exists J \subset I,\ J \text{ fini}; X = \bigcup_{i\in J} O_i.$$

Exemple 3.1.2.

1. *L'ensemble vide est compact.*

2. *Tout espace topologique séparé et fini est compact. En effet, si X est fini et $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, alors pour tout $x \in X$, il existe $i_x \in I$ tel que $x \in O_{i_x}$ (car les O_i recouvre X). L'ensemble $J = \{i_x,\ x \in X\} \subset I$ est fini et la famille $(O_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement fini.*

3. *$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ n'est pas compact. En effet, en prenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n =]-n, n[\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, on a $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$, donc $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, mais si on suppose qu'il existe un sous-recouvrement fini alors il existe $J \subset \mathbb{N}$ fini tel que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in J}]-n, n[=]-\max_{n\in J} n, \max_{n\in J} n[$ absurde. Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ n'est pas compact.*

Proposition 3.1.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. On a l'équivalence entre*

(i) X est compact.

(ii) De toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X, dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille dont l'intersection est vide, .i.e.,

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \ (F_i \text{ étant fermé } \forall i \in I) \Rightarrow \exists I \subset I \text{ fini}, \ \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset.$$

Preuve.

<u>(i) ⇒ (ii)</u> Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. On pose $O_i = C_X^{F_i}$, $\forall i \in I$, donc $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X. On a

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Leftrightarrow C_X^{\bigcap\limits_{i\in I} F_i} = X \Leftrightarrow X = \bigcup_{i\in I} O_i.$$

Donc, $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X et comme X et compact, on peut lui extraire un sous-recouvrement fini, i.e., il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \bigcup\limits_{i\in J} O_i$. D'où $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$.

<u>(ii) ⇒ (i)</u> Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. on pose $F_i = C_X^{O_i}$, $\forall i \in I$, alors

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} C_X^{O_i} = C_X^{\bigcup\limits_{i\in I} O_i} = C_X^X = \emptyset.$$

Donc, il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$. D'où $\bigcup\limits_{i\in J} O_i = X$. Par conséquent, X est compact.

□

Définition 3.1.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X.*

On dit que A est une ***partie compacte*** *de $(X, \mathcal{T})$ si $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact.*

Proposition 3.1.2. *Soit A une partie d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$.*
A est compacte si et seulement si pour tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Proposition 3.1.3. *Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

Preuve.

Soit A une partie compacte d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$. Considérons un point $a \in C_X^A$. Pour tout $x \in A$, on a $x \neq a$, alors il existe deux ouverts O_x et U_x tels que $x \in O_x$, $a \in U_x$ et $O_x \cap U_x = \emptyset$. $(O_x)_{x \in A}$ est donc un recouvrement ouvert de A, il existe donc $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}$.
Posons $O = \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{x_i}$ et $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$ alors

$$O \cap U = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (O_{x_i} \cap U_{x_i}) = \emptyset.$$

Donc $A \cap O = \emptyset$, d'où $O \subset C_x^A$, et comme O est un ouvert qui contient x, $C_x^A \in \mathcal{V}(a)$, et puisque a est arbitraire, C_X^A est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert, d'où A est fermée. $\square$

Proposition 3.1.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Une partie de X est compacte si seulement si elle est fermée.*

Corollaire 3.1. *Soit X un espace topologique séparé.*

1. *Toute intersection de parties compactes de X est compacte.*
2. *Toute union finie de parties compactes de X est compacte.*

Preuve.

1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de compacts donc de fermés. L'intersection $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est donc un fermé du compact A_{i_0}, avec $i_0 \in I$ fixé. D'où un compact.
2. Soit $(A_k)_{k \in \{1, \ldots, n\}}$ une famille finie de compacts. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, c'en est un des compacts $A_1, \ldots, A_n$ pris séparément. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $J_k \subset I$ tel que $A_k \subset \bigcup\limits_{i \in J_k} O_i$. On prend $J = \bigcup\limits_{k=1}^{n} J_k$, alors $(O_i)_{i \in J}$ un recouvrement fini de $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

□

Définition 3.1.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X.*
*On dit que A est **relativement compacte** si $\overline{A}$ est compact.*

Proposition 3.1.5. *Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors $X \times Y$ est compact si et seulement si X et Y sont compacts.*

Proposition 3.1.6. *Soit X un espace topologique compact.*

1. *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X admet une valeur d'adhérence.*
2. *Si $(x_n)_n$ admet une seule valeur d'adhérence, alors elle converge dans X vers cette valeur.*

3.2 Espaces métriques compacts

Définition 3.2.1. *Un espace métrique (X, d) est dit **précompact** (ou **totalement borné**) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε, i.e., il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tels que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$.*
*Une partie A d'un espace métrique (X, d) est dite **précompacte** (ou **totalement bornée**) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules de rayon ε, i.e., il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$.*

Proposition 3.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.*

1. *Si X est précompact, alors A est précompact.*
2. *Si A est précompact alors $\overline{A}$ est précompact.*

Proposition 3.2.2. *Soit (X, d) un espace métrique tel que toute suite dans X possède une sous-suite convergente (i.e., possède au moins une valeur d'adhérence). Alors X est précompact.*

Preuve.

Si X n'est pas précompact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que X ne soit jamais recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε. Soit $x_0 \notin X$, On a $B(x_0, \varepsilon) \neq X$. Soit $x_1 \in B(x_2, \varepsilon)$. Alors $B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) \neq X$. Soit $x_2 \notin B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) \neq X$, etc. Par récurrence, on trouve une suite $(x_n)_n$ telle que $x_m \notin \bigcup_{n=1}^{m-1} B(x_n, \varepsilon)$. Il s'ensuit que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Une telle suite ne peut pas avoir de sous suite de Cauchy, donc elle ne peut pas avoir une sous suite qui converge, ce qui montre par l'absurde la précompacité de X . □

Théorème 3.2.3. *Un espace métrique (X, d) est compact si seulement s'il vérifie l'assertion suivante dite axiome de* ***Bolzano- Weirstrass*** *:*
Toute suite d'éléments de (X, d) admet une valeur d'adhérence (i.e., De toute suite d'éléments de (X, d) on peut extraire une sous suite qui converge).

Proposition 3.2.4. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *X est compact.*
2. *X est précompact et complet.*

Proposition 3.2.5.

1. *Un espace métrique compact est borné.*
2. *Une partie compacte d'un espace métrique et bornée.*

Preuve.

Soit A une partie compacte. Pour un certain $r > 0$, on a $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r)$. Donc $(B(x, r))_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, i.e., il existe $J = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$ tel que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$.
On pose $C = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d(x_1, x_i) + 2$, alors

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r) \subset \overline{B}(x_1, C).$$

Donc A est bornée. □

Proposition 3.2.6. *Les compact de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles fermés Bornés.*

3.3 Espaces localement compacts

Définition 3.3.1. *Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est* ***localement compact*** *si tout point de X admet un voisinage compact.*

Exemple 3.3.1. *1. Les espaces topologiques $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ne sont pas compacts mais il sont localement compacts.*

2. Un espace topologique compact X est lecalement compact, car X est un voisinage de chacun de ses points.

3. $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ n'est pas localement compact.

Proposition 3.3.1. *Une partie fermé d'un espace topologique localement comapct est localement compact*

Preuve.

Soit A une partie fermé d'un espace topologique localement compact X et soit $x \in F$, alors il existe une voisinage compact V de x dans X, donc V est fermé. Alors $V \cap A$ est un voisinage de x dans A et est un fermé dans V, d'où un compact. □

Proposition 3.3.2. *Une partie ouverte d'un espace topologique localement compact est localement compact.*

Proposition 3.3.3.

1. *Un produit fini d'espaces topologiques localement compacts est localement compacts.*
2. *L'intersection de deux sous espaces localement compacts d'un espace topologique séparé est localement compacte.*