Université de Jijel
Département de Mathématiques
2$^{\text{ème}}$ année Licence
Module : Introduction à la topologie

Devoir Maison 1

2022-2023

Exercice 1.
Soit $\mathcal{T}$ la famille des sous ensembles de $\mathbb{N}$ définie par

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \subset \{E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tpologie sur $\mathbb{N}$.
2. Déterminer les ouverts contenant l'entier positif 6.
3. Déterminer les fermés de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.
4. Déterminer l'adhérence des ensembles $\{7, 24, 47, 85\}$ et $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.
5. Déterminer les sous ensembles de $\mathbb{N}$ qui sont denses dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2.
Soit X un ensemble infini non dénombrable. On considère la famille

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid C_X^U \text{ est au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
2. Quels sont les fermés de cette topologie.
3. Montrer que $(X, \mathcal{T})$ n'est pas séparé.
4. Monter qu'une suite (x_n) est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang
5. Posons $X = \mathbb{R}$.
   (a) Quelle est l'adhérence de $A =]-\infty, 0]$?
   (b) L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est-il métrisable ?

Exercice 3.
Soit $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ et $(Z, \mathcal{T}_Z)$ trois espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.
1) Montrer que si f et g sont continues alors l'application composée $g \circ f : X \to Z$ est également continue.
2) Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de Y. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Exercice 4.
Soit X un espace topologique et soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

1. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in X,\ 0 < f(x) < 5\}$ est ouvert.
2. Montrer que l'application $f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $B = \{x \in X,\ g(x) \leq f(x)\}$ est fermé.