

Série de TD N°1

2022-2023

Exercice 1 :

Soit X un ensemble non vide et soit

$$\mathcal{T}_{cf} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X, C_X^A \text{ est fini}\}.$$

Montrer que \mathcal{T}_{cf} est une topologie sur X (appelée la **topologie cofinie**) et décrire les ensembles fermés de (X, \mathcal{T}_{cf}) .

Exercice 2 :

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et f une application quelconque de X dans un ensemble Y . Soit

$$\Theta = \{B \subset Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}.$$

Montrer que Θ est une topologie sur Y et décrire les ensembles fermés de (Y, Θ) .

Exercice 3 :

Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique et \mathcal{B} une famille de parties ouvertes dans X . Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

1. \mathcal{B} est une base d'ouverts.
2. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ est une base de voisinages de x .

Exercice 4.

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et $A, B \subset X$.

1. Montrer que $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.
2. Donner un exemple où l'inclusion de droite est stricte.
3. Montrer que si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ alors $\overset{\circ}{A \cup B} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
4. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
5. Donner un exemple où l'inclusion de droite est stricte.
6. On suppose que A est ouvert.
 - (a) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
 - (b) Donner un contre-exemple dans \mathbb{R} si on ne suppose pas A ouvert.

Exercice 5.

Soit X un ensemble et $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ une application vérifiant

$$(V_1) \quad A \in \varphi(x) \text{ et } A \subset B \Rightarrow B \in \varphi(x)$$

$$(V_2) \quad A, B \in \varphi(x) \Rightarrow A \cap B \in \varphi(x)$$

$$(V_3) \quad A \in \varphi(x) \Rightarrow x \in A$$

$$(V_4) \quad A \in \varphi(x) \Rightarrow \exists B \in \varphi(x) \text{ tel que } \forall y \in B, A \in \varphi(y).$$

On définit

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X), \forall x \in A, A \in \varphi(x)\}.$$

Montrer que (X, \mathcal{T}) est un espace topologique pour lequel $\varphi(x)$ est l'ensemble des voisinage de x , pour tout $x \in X$.

Exercice 6 :

Soit \mathbb{R} l'ensemble des nombres réel et soit $\Theta_{\mathbb{R}} = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\Theta_{\mathbb{R}}$ est une topologie sur \mathbb{R} .
2. Décrire les ensembles fermés de $(\mathbb{R}, \Theta_{\mathbb{R}})$.
3. Déterminer l'adhérence des ensembles $[3, 7[, \{7, 24, 47, 85\}$ et $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$.
4. Trouver l'intérieur, l'extérieur et la frontière de $A = [7, +\infty[$.

Exercice 7 :

On munit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, f, g\}, \{a, b, f, g\}, X\}.$$

1. Définir une topologie \mathcal{T}_1 , non grossière, moins fine que \mathcal{T} et une topologie \mathcal{T}_2 , non discrète, tel que \mathcal{T} soit moins fine que \mathcal{T}_2 .
2. Déterminer une base de voisinages de f .
3. L'espace topologique (X, \mathcal{T}) est-il séparé ?
4. On pose $A = \{a, e, f\}$. Déterminer \mathcal{T}_A la topologie trace sur A .

Exercice 9.

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et A une partie de X .

- 1) Montrer que $Fr(A) = Fr(C_X^A)$ et que $A = Fr(A)$ si et seulement si A fermé d'intérieur vide.
- 2) Montrer les inclusions

$$Fr(\bar{A}) \subset Fr(A); \quad Fr(\overset{\circ}{A}) \subset Fr(A); \quad Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B).$$

- 3) Montrer que si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, alors $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.
- 4) Montrer que A est un ouvert si et seulement si $A \cap Fr(A) = \emptyset$.
- 5) Montrer que A est un fermé si et seulement si $Fr(A) \subset A$.
- 6) Montrer que A est ouvert et fermé si et seulement si $Fr(A) = \emptyset$.
- 7) Montrer que $\{\overset{\circ}{A}, Fr(A), ext(A)\}$ forme une partition de X .

Exercice 10.

Soit X un espace topologique $A \subset X$. Montrer que $A \cup \overset{\circ}{C_X^A}$ est dense dans X .

Exercice 11.

Soit A et B deux parties d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) , U une partie de $A \cup B$. On suppose que U est un ouvert du sous espace (A, \mathcal{T}_A) , et un ouvert du sous espace (B, \mathcal{T}_B) . Montrer que U est un ouvert du sous espace $A \cup B$.

Exercice 11.

Soit $X = \{a, b, c\}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la topologie $\Theta = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, Y\}$. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application définie par $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ et $f(c) = 3$.

1. Déterminer $\mathcal{V}(a)$, $\mathcal{V}(b)$ et $\mathcal{V}(c)$.
2. Déterminer $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, $\mathcal{V}(3)$ et $\mathcal{V}(4)$.
3. Montrer que f est continue en a et c . Est elle continue en b .

Exercice 12.

Soient (X, \mathcal{T}) et (Y, Θ) deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est continue.
2. Pour tout $B \subset Y$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{f^{-1}(B)}$.
3. Pour tout $B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Exercice 13.

Soit (X, \mathcal{T}) , (Y, Θ) deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X .

Montrer que si les restrictions $f|_{A_i}$ sont continues pour tout $i \in I$ alors f est continue.

Exercices Supplémentaires

Exercice 1.

Soit X un ensemble, (Y, \mathcal{T}_Y) un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application. On pose

$$\mathcal{T}_f = \{f^{-1}(O), O \in \mathcal{T}_Y\}.$$

1. Montrer que \mathcal{T}_f définit une topologie sur X .
2. Soit \mathcal{T}_X une topologie sur X telle que $f : X \rightarrow Y$ est continue. Montrer que $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_X$.
3. Soit (Z, \mathcal{T}_Z) un espace topologique et $g : Z \rightarrow Y$ une application continue telle qu'il existe une application $\bar{g} : Z \rightarrow X$ telle que $g = f \circ \bar{g}$. Montrer que si on munit X de la topologie \mathcal{T}_f , alors \bar{g} est continue.

Exercice 2.

Soit O un ouvert d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) .

Montrer que pour toute partie A de X , on a l'équivalence

$$A \cap O = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap O = \emptyset.$$

Exercice 3.

Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1. Soient A et B des parties de X telles que $\overline{A} = \overline{B}$. Montrer que l'on a $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.
2. Soit A une partie de X . Montrer que si A est dense dans X et $f(X)$ est dense dans Y , alors $f(A)$ est dense dans Y . En particulier, si A est dense dans X et f est surjective, alors $f(A)$ est dense dans Y .