Université de Jijel
Département de Mathématiques
$2^{\text{ème}}$ année Licence
Module : Introduction à la topologie

Série de TD N°2

2022-2023

Exercice 1 :

Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que

1. $d(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$ est une distance sur X.
2. $e(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$ est une distance sur X.

Exercice 2 :

Soit (X,d) un espace métrique et soit $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Montrer que

$$\forall x, y \in X,\ \Big|d(x,A) - d(y,A)\Big| \leq d(x,y).$$

En déduire que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Calculer et dessiner $B(0,1)$, $\overline{B}(0,1)$, $S(0,1)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

Exercice 4 :

Soit (X,d) un espace métrique et soient (x_n), $(y_n)_n \subset X$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y).$$

Exercice 5 :

Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.
Montrer que si f est uniformément continue, alors l'image par f d'une suite de Cauchy dans X est une suite de Cauchy dans Y.

Exercice 6 :

Soient d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et $d_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $d_1(x,y) = d(e^x, e^y)$.

1. Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. d_1 est-elle bornée ?
3. Décrire la boule ouverte $B_{d_1}(0,1)$ relativement à d_1.
4. Montrer que d_1 et d sont topologiquement équivalentes.
5. Soit $(x_n)_n$ une suite telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x_n = -n$. La suite $(x_n)_n$ est-elle de Cauchy relativement à d_1 ?
6. Est-elle convergente ? Conclure.

Exercice 7 :
Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante. Montrer que

1. L'application f admet un unique point fixe $a \in X$.
2. Pour tout $x \in X$, on a $a = \lim_{n \to \infty} f^n(x)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 1 :
Soient (X, d) un espace métrique et $a \in X$. Pour tous x et y dans X, on pose

$$d_a(x,y) = \begin{cases} d(a,x) + d(a,y) & \text{si} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{si} \quad x = y. \end{cases}$$

1. Montrer que d_a est une distance sur X.
2. Montrer que pour tout $r > 0$, on a $B_{d_a}(a, r) = B_d(a, r)$.
3. Soit $x \in X$ tel que $x \neq a$. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B_{d_a}(x, r) = \{x\}$.

Exercice 2 :
Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset X$.
– Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy alors

$$\lim_{n \to \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

– Par contre exemple montrer que l'inverse est faux.
– Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ est convergente alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 3 :
Soit X un ensemble non vide. On dit qu'une fonction f de X dans $\mathbb{C}$ est bornée si

$$\exists M_f > 0, \ \forall x \in X, \ |f(x)| \leq M_f.$$

On note $\ell^\infty(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{C}$. Pour $f, \ g \in \ell^\infty(X, \mathbb{C})$ on pose

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

1. Montrer que d est une distance sur $\ell^\infty(X, \mathbb{C})$.
2. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\ell^\infty(X, \mathbb{C})$ relativement à cette distance d. Montrer que $\exists C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a $|f_n(x)| \leq C$.
3. Fixons $x \in X$. Montrer que la suite $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{C}$.
4. Pour chaque $x \in X$ on pose $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. On définit une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f \in \ell^\infty(X, \mathbb{C})$.
5. Montrer que $\lim_{n \to \infty} d(f_n, f) = 0$. Que peut-on dire de l'espace métrique $(\ell^\infty(X, \mathbb{C}), d)$?

Exercice 4 :
Soit (X, d) un espace métrique. Soit $d' : X \times X \to [0, +\infty[$ une distances sur X définie par

$$d'(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}.$$

Montrer que (X, d) est complet si seulement si (X, d') est complet.