Université de Jijel
Département de Mathématiques
$2^{\text{ème}}$ année Licence
Module : Introduction à la topologie

Série de TD N°3

2022-2023

<u>Exercice 1 :</u>
Soient $(X, \mathcal{T})$ et (Y, Θ) deux espaces topologiques, Y étant séparé, et soit $f : X \to Y$ une application continue.
1. Montrer que si A est un sous ensemble compact de X alors $f(A)$ est un sous ensemble compact de Y.
2. Supposons que X est compact. Montrer que, pour toute partie A de X, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

<u>Exercice 2 :</u>
Soit (X, d) un espace métrique compact et (Y, d') un espace métrique.
Montrer que si $f : X \to Y$ une application continue, alors f est uniformément continue.

<u>Exercice 3 :</u>
Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la distance de la convergence uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in E.$$

Soit f un élément fixé de E. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} T : & [0, 1] & \to & E \\ & t & \mapsto & f_t \end{array}$$

où $f_t(x) = f(tx)$, pour tout $x \in [0, 1]$, est continue. En déduire que l'ensemble $\{f_t,\ t \in [0, 1]\}$ est un compact de (E, d_∞).

<u>Exercice 4 :</u>
Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. Montrer que les ensembles $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ et $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont disconnexes.

<u>Exercice 5 :</u>
Soit (X, Θ) et $(Y, \mathcal{D})$ deux espaces topologiques connexes par arcs. Montrer que $X \times Y$ muni de la topologie produit est connexe par arcs.

Exercices supplémentaires

<u>Exercice 1 :</u>

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$.
   – Montrer que si A est borné alors $\sup A, \inf A \in \overline{A}$.
   – Montrer que A est compact si et seulement si A est borné fermé.
2. Soit X un espace topologique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que
   a) f est bornée ;
   b) f atteint ses bornes.
   c) En particulier, toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit $A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.
– Montrer que A est compact connexe.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
– Montrer que $f(A)$ est un intervalle compact.
– Déterminer les points $(x, y) \in A$ telles que $A \backslash \{(x, y)\}$ est connexe.

<u>Exercice 3 :</u>

Soit (X, Θ) un espace topologique séparé, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers un élément ℓ de X. Soit $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Montrer qu K est une partie compacte de X.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que f est monotone si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{x\})$ est connexe.