CHAPITRE 5

Espaces vectoriels normés

5.1 Norme- espaces vectoriels normés

Définition 5.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$.*

*On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants.*

1. *Séparation. Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*
2. *Homogénéité. Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*
3. *Inégalité triangulaire. Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*

*Le couple (E, N) est alors appelé **espace vectoriel normé**.*

Remarque 5.1.1.

- $N(0) = 0$ (en prenant $\lambda = 0$ dans 2.).
- On note la norme N par $\|\cdot\|$, c-à-d, $N(x) = \|x\|$.

Exemple 5.1.1.

1. *$\mathbb{K}$ étant considéré comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$.*
2. *Sur $\mathbb{K}^n$, on peut définir les trois normes suivantes, qui sont dites **normes standards sur** $\mathbb{K}^n$, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

*La norme $\|\cdot\|_2$ est appelée la **norme euclidienne** sur $\mathbb{K}^n$.*

3. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. La restriction de la norme* $\|\cdot\|$ *sur* F *est une norme, appelée* ***norme induite****.*

Définition 5.1.2. *On appelle* ***semi-norme*** *sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, toute application* $N : E \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant les propriétés 1. et 2. dans la Définition 5.1.1.*

Proposition 5.1.1. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. L'application* $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E$$

est une distance sur E *appelée* ***distance induite par la norme****. La topologie induite par cette distance est dite* ***topologie associé à la norme****.*

Preuve.

Pour tout $x, y, z \in E$, on a

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| \overset{\lambda=-1}{=} \|y - x\| = d(y, x)$.
3. $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

□

Remarque 5.1.2. De la proposition précédente, tout espace vectoriel normé est métrique, donc topologique.

Proposition 5.1.2. *La norme* $\|\cdot\|$ *est une application* 1*-lipschitzienne de* $(E, \|\cdot\|)$ *dans* $\mathbb{R}_+$*, i.e.,*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Preuve.

Pour tous $x, y \in E$, on a d'après 3.

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \text{et} \quad \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

d'où, d'après 2.

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad \text{et} \quad \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Donc

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

$\square$

Définition 5.1.3. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Soient* $x_0 \in E$ *et* $r > 0$.

- *On appelle* ***boule ouverte*** *de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$B(x_0, r) = \{x \in X,\ \|x - x_0\| < r\}.$$

- *On appelle* ***boule fermée*** *de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X,\ \|x - x_0\| \leq r\}.$$

- *On appelle* ***sphère*** *de centre* x_0 *et de rayon* r *l'ensemble*

$$S(x_0, r) = \{x \in X,\ \|x - x_0\| = r\}.$$

La topologie associée à la norme et définie par

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \{A \subset E,\ \forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A\}.$$

La boule $B(0,1)$ *est dite* ***boule unité ouverte****, la boule* $\overline{B}(0,1)$ *est dite* ***boule unité fermée*** *et la sphère* $S(0,1)$ *est dite* ***sphère unité****.*

Remarque 5.1.3. Si $E \neq \{0\}$, $S(0,1)$ n'est pas vide car elle contient alors $\frac{x}{\|x\|}$, $\forall x \in E \setminus \{0\}$.

Proposition 5.1.3. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Alors, pour* $x \in E$ *et* $r > 0$ *on a*

$$B(x_0, r) = x_0 + B(0, r) = x_0 + rB(0,1) \quad et \quad \overline{B}(x_0, r) = x_0 + \overline{B}(0, r) = x_0 + r\overline{B}(0,1).$$

Preuve.

On a

$$x \in B(0, r) \Leftrightarrow \|x\| < r \Leftrightarrow \|\frac{1}{r}x\| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{r}x \in B(0,1) \Leftrightarrow x \in rB(0,1).$$

Donc $B(0, r) = rB(0,1)$. De plus

$$x \in B(x_0, r) \Leftrightarrow \|x - x_0\| < r \Leftrightarrow x - x_0 \in B(0, r) \Leftrightarrow x \in x_0 + B(0, r).$$

Donc $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r) = x_0 + rB(0,1)$. $\square$

Définition 5.1.4. *On appelle* ***espace de Banach*** *tout espace vectoriel normé complet.*

Exemple 5.1.2.

1. $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *est un espace de Banach*
2. $\mathbb{K}^n$ *est un espace de Banach pour chacune des trois normes.*

5.2 Normes équivalentes

Définition 5.2.1. *Deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur un même espace vectoriel* E *sont dites* ***équivalentes*** *si* $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_2}$.

Proposition 5.2.1. *Deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur un même espace vectoriel* E *sont équivalentes si et seulement s'il existe deux réels* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que, pour tout* $x \in E$

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1.$$

Les structures métriques définies par ces normes sur E *sont alors topologiquement équivalentes et équivalentes.*