Université de Jijel
Département de Mathématiques
2$^{\text{ème}}$ année Licence
Module : Introduction à la topologie

Devoir Maison 2

2022-2023

Exercice 1.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme, $\mathbb{R}$ est muni d'une distance d. On définit une nouvelle distance δ par : $\delta(x, y) = d(f(x), f(y))$.

1. Montrer que f est une application ouverte.
2. Vérifier que δ est bien une distance sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'elle est topologiquement équivalente à la distance d.
4. Déduire que les deux distances suivantes définies par

$$d_1(x, y) = |x - y|, \qquad \text{et} \qquad d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$$

   sont topologiquement équivalentes. Sont elles équivalentes ?

Exercice 2.
Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit (x_n) une suite dans X vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}; d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n}.$$

   Montrer qu'elle est de Cauchy.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X et (y_n) une autre suite dans X, on suppose que la suite réelle $(d(x_n, y_n))$ tend vers 0. Montrer que la suite (y_n) est aussi une suite de Cauchy.

Exercice 3.
Soit $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. On définit pour $f, g \in X$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 x|f(x) - g(x)|dx$$

et

$$d_2(f, g) = \left(\int_0^1 x(f(x) - g(x))^2 dx\right).$$

1. Vérifier que d_1 et d_2 définissent des distances sur X.
2. Montrer que pour tout $f, g \in X$, $d_1(f, g) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} d_2(f, g)$. (Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
3. Montrer que d_1 et d_2 ne sont pas équivalentes. (Considérer f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2x & si \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & si \quad x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

   pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n \equiv 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.)