Université de Jijel
Département de Mathématiques
2ème année Licence
Module : Introduction à la topologie

Solution de la série de TD N°3

2022-2023

Exercice 1 :

1. Soit A un sous-ensemble compact de X. On a $f(A)$ est séparé comme partie d'un espace séparé. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Y telle que $f(A) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. Puisque f est continue, chaque $f^{-1}(O_i)$ est ouvert. De plus

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i).$$

Donc $A \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$ et $(f^{-1}(O_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A. On extrait un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(O_i))_{i\in J}$, $J \subset I$. Alors

$$f(A) = f(\bigcup_{i\in J} f^{-1}(O_i)) = \bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(O_i)) \subset \bigcup_{i\in J} O_i.$$

Donc $(O_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement fini de $f(A)$.

2. Soit $A \subset X$. Comme f est continue, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
D'autre part, puisque $A \subset \overline{A}$, on a $f(A) \subset f(\overline{A})$. Or, $\overline{A}$ est une partie fermé du compact X, donc elle est compacte, et puisque f est continue et Y est séparé, $f(\overline{A})$ est compacte dans l'espace topologique séparé Y, donc elle est fermée. D'où $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$. Par conséquent, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 2.

Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n, y_n \in X$ vérifiant $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Puisque X est compact, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Soit $\ell = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Puisque pour tout $k \geq 1$, on a $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ et $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, on en déduit que $(y_{nk})_{k\geq 1}$ converge aussi vers ℓ. Comme f est continue, alors on a $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\ell)$, d'où $\lim_{k\to\infty} d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0$, ce qui est impossible car pour tout $k \geq 1$, on a $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$. Donc f est bien uniformément continue.

Exercice 3 :

Pour tous $t, s \in [0, 1]$, on a

$$d_\infty(f_t, f_s) = \sup_{0\geq x\geq 1} |f_t(x) - f_s(x)| = \sup_{0\geq x\geq 1} |f(tx) - f(sx)|.$$

Comme $[0, 1]$ est un compact et f est continue sur $[0, 1]$, alors f est uniformément continue sur $[0, 1]$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $\alpha, \beta \in [0, 1]$ vérifiant $|\alpha - \beta| < \delta$, on ait $|f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$. Alors pour tous $t, s \in [0, 1]$ tels que $|t - s| < \delta$

et pour tout $x \in [0,1]$, on a $|tx - sx| \leq |t-s| < \delta$, d'où $|f(tx) - f(sx)| < \varepsilon$. Donc on a $d_\infty(f_t, f_s) \leq \varepsilon$. Par conséquent, l'application T est continue de $[0,1]$ dans (E, d_∞), donc l'ensemble $T([0,1]) = \{f_t,\ t \in [0,1]\}$ est un compact de (E, d_∞).

Exercice 4 :

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et $\{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}$ est une partition propre de $\mathbb{R}^*$ par des ouverts de $\mathbb{R}^*$, donc $\mathbb{R}^*$ est disconnexe.

$\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle ($1, -1 \in \mathbb{R}^*$, mais $0 \in]-1,1[$ et $0 \notin \mathbb{R}^*$), donc $\mathbb{R}^*$ est disconnexe.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[) \cup (\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[)$ et $\{]-\infty, \sqrt{2}[), (\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[)\}$ est une partition propre de $\mathbb{Q}$ par des ouverts de $\mathbb{Q}$.

$\frac{2}{5} \in]\frac{1}{3}\frac{1}{2}[$, mais $\frac{2}{5} \notin A$, donc A n'est pas un intervalle, d'où il est disconnexe.

Exercice 5.

Soit $(x,y), (x',y') \in X \times Y$, alors $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$; puisque X et Y sont connexes par arcs, il existe deux arcs $\varphi : [0,1] \times X$ et $\phi : [0,1] \times Y$ tels que $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = x'$, $\varphi(0) = y$ et $\varphi(1) = y'$. On définit $\psi : [0,1] \to X \times Y$ par $\psi(t) = (\varphi(t), \phi(t)),\ \forall t \in [0,1]$.
Montrons que ψ est continue. Soit $t_0 \in [0,1]$ et soit $W \in \mathcal{V}_{X \times Y}(\psi(t_0))$, alors il existe $W_1 \in \mathcal{V}_X(\varphi(t_0))$ et $W_2 \in \mathcal{V}_Y(\phi(t_0))$ tels que $W_1 \times W_2 \subset W$. Puisque φ et ϕ sont continues, alors, $\varphi^{-1}(W_1), \phi^{-1}(W_2) \in \mathcal{V}(t_0)$. Or,

$$\psi^{-1}(W_1 \times W_2) = \{t \in [0,1],\ \psi(t) = (\varphi(t), \phi(t)) \in W_1 \times W_2\} = \varphi^{-1}(W_1) \cap \phi^{-1}(W_2) \in \mathcal{V}(t_0)$$

et $\psi^{-1}(W_1 \times W_2) \subset \psi^{-1}(W)$, donc $\psi^{-1}(W) \in \mathcal{V}(t_0)$. D'où ψ est continue, et comme $\psi(0) = (x,y)$ et $\psi(1) = (x', y')$, $X \times Y$ est connexe par arcs.