



محاضرة الرياضيات 2

الإِسْمَاءُ الْخَاتَمَةُ : ف. سِلَاقُ مِئْتَةٍ

2022 / 2021

البرنامج المقرر لمقياس الرياضيات 2الفصل الأول : بنية الفضاء الشعاعي.الفصل الثاني : التطبيقات الخطية.الفصل الثالث : مفاهيم عامة حول المصفوفات والمحددات.الفصل الرابع : حل جملة معادلات خطية.الفصل الأول : بنية الفضاء الشعاعي

تعريف عملية داخلية – تعريف الزمرة – تعريف عملية خارجية – تعريف الفضاء الشعاعي – الفضاء الشعاعي الجزئي

(1) الفضاء الشعاعي :

تعريف عملية داخلية : لتكن E مجموعة غير خالية . نسمي $*$ عملية داخلية على E (أو قانون تركيب داخلي) كل تطبيق من $E \times E$ نحو E . يعني أن تركيب كل عنصرين من المجموعة E هو عنصر من E أي :

$$\forall x, y \in E : x * y \in E$$

مثال :

• $(+)$ عملية داخلية في $\mathbb{N}$ ، لأن : $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y \in \mathbb{N}$ • $(-)$ ليست عملية داخلية في $\mathbb{N}$ ، لأن : $2, 3 \in \mathbb{N} \wedge 2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$ • الاتحاد (U) والتقاطع $(\cap)$ عمليات داخلية في $P(E)$.تعريف زمرة : لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية نرمز لها بـ $*$. نقول أن $(E, *)$ زمرة إذا كان :(1) العملية $*$ تجميعية ، أي : $\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z)$ (2) يوجد عنصر حيادي في E نرمز له بالرمز e بحيث : $\forall x \in E : x * e = e * x = x$ (3) لكل عنصر x من E نظيرا x' بالنسبة لـ $*$ ، أي : $\forall x \in E, \exists x' \in E : x * x' = x' * x = e$ • إذا كانت العملية $*$ تبديلية أي : $\forall x, y \in E : x * y = y * x$ فإننا نقول أن $(E, *)$ زمرة تبديلية .ملاحظة : العنصر الحيادي إذا وجد فهو وحيد وهو نظير نفسه .

أمثلة :

• $(\mathbb{N}, -)$ ليست زمرة لان $(-)$ ليست عملية داخلية .

• $(\mathbb{N}, +)$ ليست زمرة لأنه مثلا 1 ليس له نظيرا في $\mathbb{N}$.

• كل من $(\mathbb{R}, +)$ ، $(\mathbb{Q}, +)$ ، $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية .

• لتكن $E = \mathbb{R}^n$ بحيث $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$

يعرف الجمع في $\mathbb{R}^n$ كما يلي :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

تأكد أن : $(\mathbb{R}^n, +)$ زمرة تبديلية .

تعريف عملية خارجية : لتكن E مجموعة غير خالية . نسمي Δ عملية خارجية على E كل تطبيق من $\mathbb{R} \times E$ او $\mathbb{C} \times E$ نحو E . يعني أن تركيب عدد حقيقي أو مركب مع عنصر من المجموعة E هو عنصر من E أي :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall x \in E : k\Delta x \in E$$

مثال : الضرب ليس عملية خارجية على $\mathbb{Z}$ لأن : $2, 5 \in \mathbb{R} \wedge -1 \in \mathbb{Z}$ لكن $2, 5 \times (-1) = -2, 5 \notin \mathbb{Z}$

تعريف فضاء شعاعي : لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية نرمز لها بـ $*$ وبعملية خارجية بالنسبة لـ $\mathbb{R}$ نرمز لها بـ Δ .

$(E, *, \Delta)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ (- $\mathbb{R}$ -ف.ش) إذا كان :

(1) $(E, *)$ زمرة تبديلية.

(2) العملية Δ تحقق الخواص التالية :

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \alpha\Delta(\beta\Delta x) = (\alpha\Delta\beta)\Delta x$
- $\forall x \in E : 1\Delta x = x$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in E : (\alpha * \beta)\Delta x = \alpha\Delta x * \beta\Delta x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E : \lambda\Delta(x * y) = (\lambda\Delta x) * (\lambda\Delta y)$

ملاحظة :

- عناصر E تسمى أشعة وعناصر $\mathbb{R}$ تسمى سلميات.
- العنصر المحايد O_E يسمى الشعاع المذموم .
- كل فضاء شعاعي يشمل على الأقل الشعاع المذموم ومنه كل فضاء شعاعي لا يمكن أن يكون خاليا.

الفضاء الشعاعي الجزئي :

تعريف : لتكن F مجموعة جزئية من E ، نقول عن $(F, *, \Delta)$ أنه فضاء شعاعي جزئي (ف.ش.ج) من فضاء شعاعي $(E, *, \Delta)$ ، إذا تحقق :

$$F \neq \phi \quad (O_E \in F) \quad (1)$$

$$\forall x, y \in F : x * y \in F \quad (* \text{ مستقرة بالنسبة لـ } F) \quad (2)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F : \lambda \Delta x \in F \quad (\Delta \text{ مستقرة بالنسبة لـ } F) \quad (3)$$

ملاحظة: كل فضاء شعاعي جزئي هو فضاء شعاعي.

خاصية: لتكن F مجموعة جزئية من E ، نقول عن $(F, *, \Delta)$ أنه فضاء شعاعي جزئي (ف.ش.ج) من فضاء شعاعي $(E, *, \Delta)$ إذا كان:

$$F \neq \phi \quad (1)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in F : \alpha \Delta x * \beta \Delta y \in F \quad (2)$$

ملاحظة: لإثبات أن F غير خالي نتحقق من أن $O_E \in F$.

مثال 1: ليكن F جزء من $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ معرف كما يلي: $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 4y = 0\}$

لنثبت أن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}$.

$$(1) \text{ لدينا : } 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F : 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

ومنه : $F \neq \phi$

$$(2) \text{ ليكن : } X = (x_1, y_1) \text{ و } Y = (x_2, y_2) \text{ أشعة من } F \text{ و } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{نضع : } V = \alpha X + \beta Y = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

لنتأكد أن : $V \in F$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) - 4 \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha(3 \cdot x_1 - 4 \cdot y_1) + \beta(3 \cdot x_2 - 4 \cdot y_2) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

أي : $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \in F$. ومنه : $(F, +, \cdot)$ ف.ش.ج من $\mathbb{R}^2$.

مثال 2: ليكن F جزء من $\mathbb{R}^3$ بحيث $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$

لنثبت أن F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.

$$(1) \text{ لدينا : } 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F : 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$$

ومنه : $F \neq \phi$

$$(2) \text{ ليكن : } X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \text{ من } F$$

نضع :

$$V = \alpha X + \beta Y = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

لدينا :

$$2 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) + \alpha y_1 + \beta y_2 - (\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha(2x_1 + y_1 - z_1) + \beta(2x_2 + y_2 - z_2) \\ = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

أي : $V = \alpha X + \beta Y \in F$. ومنه : F ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.

الاستقلال والارتباط الخطي :

تعريف : ليكن F فضاء شعاعي حقيقي. نقول عن الأشعة $V_1, V_2, \dots, V_n$ من F أنها مستقلة خطيا إذا كان :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n = 0_E \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

إذا كانت الأشعة $V_1, V_2, \dots, V_n$ ليست مستقلة خطيا نقول عنها أنها مرتبطة خطيا.

مثال (1) : ليكن الشعاعين $V_1 = (2, 0), V_2 = (1, 1)$ من $\mathbb{R}^2$. ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{aligned} \alpha V_1 + \beta V_2 = 0_{\mathbb{R}^2} &\iff \alpha(2, 0) + \beta(1, 1) = (0, 0) \\ &\iff (2\alpha + \beta, \beta) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

ومنه : الشعاعين مستقلين خطيا .

(2) لتكن الأشعة $V_1 = (1, 0, 2), V_2 = (-2, 0, -4)$ من $\mathbb{R}^3$. ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} \alpha V_1 + \beta V_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \alpha(1, 0, 2) + \beta(-2, 0, -4) = (0, 0, 0) \\ &\iff (\alpha - 2\beta, 0, 2\alpha - 4\beta) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 2\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = 2\beta \end{aligned}$$

ومنه : الشعاعين مرتبطين خطيا.

الفصل الثاني : التطبيقات الخطية

تعريف التطبيق الخطي : لتكن E و F فضاءين شعاعيين على $\mathbb{R}$. ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيق ، نقول عن f أنه تطبيق خطي إذا تحقق :

$$1) \forall (V, W) \in E^2 : f(V + W) = f(V) + f(W)$$

$$2) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall V \in E : f(\lambda.V) = \lambda.f(V)$$

ملاحظة : التعريف السابق يكافئ : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall V, W \in E : f(\alpha.V + \beta.W) = \alpha.f(V) + \beta.f(W)$

• نرسم لمجموعة التطبيقات الخطية المعرفة من E نحو F بـ : $\mathcal{L}(E, F)$.

مثال : ليكن التطبيق :

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x - y, 2z)$$

لنثبت أن f تطبيقا خطيا .

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall V = (x_1, y_1, z_1), W = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} f(\alpha V + \beta W) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha y_1 + \beta y_2), 2(\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ &= (\alpha x_1 - \alpha y_1, 2\alpha z_1) + (\beta x_2 - \beta y_2, 2\beta z_2) \\ &= \alpha(x_1 - y_1, 2z_1) + \beta(x_2 - y_2, 2z_2) \\ &= \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

ومنه : f تطبيق خطي .

ملاحظة : إذا كان f تطبيق خطي فان : $f(0_E) = 0_F$

مثال : ليكن التطبيق :

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (4x + 1, 5y)$$

$$f(0, 0) = (4.0 + 1, 5.0) = (1, 0) \neq (0, 0)$$

ومنه : f ليس تطبيقا خطيا .

تعريف صورة التطبيق الخطي : ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيق خطي أو $f \in \mathcal{L}(E, F)$. نعرف صورة التطبيق f بمجموعة صور كل الأشعة V من E ونرمز لها بـ : $Im(f)$ حيث :

$$Im(f) = \{f(V), V \in E\} = \{W \in F, \exists V \in E : W = f(V)\}$$

ملاحظات : ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيقا خطيا فان :

• $Im(f)$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من F .

• f غامر إذا وفقط إذا كان : $Im(f) = F$.

مثال : ليكن

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x - y, 2z)$$

f تطبيق خطي . لنحسب $Im(f)$.

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(V) \in \mathbb{R}^2, V \in \mathbb{R}^3\} = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x - y, 2z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1, 0) + y(-1, 0) + z(0, 2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$

تعريف نواة تطبيق خطي : ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيقا خطيا . نعرف نواة f بمجموعة العناصر من E التي صورها معدومة ونرمز لها بـ : $Ker(f)$ أي :

$$Ker(f) = \{V \in E, f(V) = 0_F\}$$

ملاحظات : ليكن $f : E \rightarrow F$ تطبيقا خطيا فان :

• $Ker(f)$ هي عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من E .

• f متباين إذا وفقط إذا كان : $Ker(f) = \{0_E\}$.

مثال : ليكن

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = (2x + y, x - y, x + y)$$

لدينا :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{V \in \mathbb{R}^2, f(V) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x + y, x - y, x + y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

الفصل الثالث : مفاهيم عامة حول المصفوفات والمحددات

عموميات :

تعريف المصفوفة : هي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية (أو المركبة) موضوعة ضمن جدول مستطيل أو مربع على شكل أسطر وأعمدة. يرمز للمصفوفة بالرموز $A, B, C, \dots$ ولعناصر المصفوفة بـ $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($a_{ij} \in \mathbb{C}$) حيث i هو رقم السطر و j رقم العمود. الشكل العام لمصفوفة A ذات n سطر و m عمود هو

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

ونقول عندئذ أن هذه المصفوفة من الدرجة $n \times m$ ونرمز عادة لهذه المصفوفة بالرمز $A = (a_{ij})$. ونرمز لمجموعة المصفوفات ذات n سطر و m عمود بالرمز $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

أمثلة :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 5 \\ 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,2}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & -2 \\ -8 & 3 & -1 & 0 \\ 22 & 20 & 2 & -32 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

■ تتساوى مصفوفتان $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ إذا وفقط إذا كانتا من نفس الدرجة (لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة) وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية أي : $\forall i, j : a_{i,j} = b_{i,j}$ مثلا : $a_{11} = b_{11}, a_{3,6} = b_{3,6}, a_{2,4} = b_{2,4}, \dots$

المصفوفة الصفريّة (المعدومة) : هي مصفوفة عناصرها أصفار أي : $\forall i, j : a_{i,j} = 0$ وشكلها العام هو :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المربعة : هي التي تكون عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها ($m = n$) وتسمى العناصر a_{ii} أي $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ بالقطر الرئيسي للمصفوفة.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 20 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

المصفوفة القطرية : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها معدومة ماعدا عناصر القطر الرئيسي ليست كلها معدومة
 $(\forall i \neq j; a_{ij} = 0, \exists i; a_{ii} \neq 0)$ وشكلها :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 8 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المثلثية السفلى : هي مصفوفة مربعة تكون فيها العناصر التي فوق القطر الرئيسي معدومة $(\forall i < j; a_{ij} = 0)$ و شكلها

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 14 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المثلثية العليا : هي مصفوفة مربعة تكون فيها العناصر التي تحت القطر الرئيسي معدومة $(\forall i > j; a_{ij} = 0)$ و شكلها

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 21 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعة قطرية عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 ويرمز لها بـ : I_n حيث

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

مثلا:

$$\cdots, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المتناظرة : نقول عن مصفوفة مربعة A أنها متناظرة إذا كانت عناصرها متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي

$$A^t = A : \text{ وفي هذه الحالة يكون لدينا } (\forall i, j; a_{ij} = a_{ji})$$

$$\text{مثلا : } A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 8 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ هي مصفوفة متناظرة .}$$

العمليات الأساسية على المصفوفات :

جمع المصفوفات : يشترط في عملية جمع مصفوفتين أن يكون لهما نفس عدد الأسطر والأعمدة . ونحصل على مجموع

مصفوفتين بجمع عنصر من المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

بنفس الطريقة نحسب الفرق بين مصفوفتين :

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}$$

مثال : لتكن المصفوفتين

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -9 \\ -2 & 11 & -17 \\ 31 & 20 & -21 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 10 \\ -30 & -20 & 20 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 14 & -24 \\ 32 & 20 & -22 \end{pmatrix}$$

■ عملية الجمع في المصفوفات تبديلية.

ضرب مصفوفة بعدد حقيقي : ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $\lambda.A$ تكون بالشكل

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & -44 & 50 \\ 20 & -4 & -36 \\ 4 & -2 & -12 \\ -2 & 60 & -42 \end{pmatrix} \quad \text{فإن } A = \begin{pmatrix} 3 & -22 & 25 \\ 10 & -2 & -18 \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & 30 & -21 \end{pmatrix} \text{ إذا كان}$$

جداء مصفوفتين : يشترط في عملية الجداء أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد أسطر المصفوفة الثانية. والمصفوفة الناتجة يكون عدد أسطرها هو عدد أسطر المصفوفة الأولى وعدد أعمدتها هو عدد أعمدة المصفوفة الثانية.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

حيث :

$$c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + \cdots + a_{1m}.b_{m1} = \sum_{j=1}^m a_{1j}.b_{j1}$$

$$c_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + \cdots + a_{1m}.b_{m2} = \sum_{j=1}^m a_{1j}.b_{j2}$$

.....

$$c_{1p} = a_{11}.b_{1p} + a_{12}.b_{2p} + \cdots + a_{1m}.b_{mp} = \sum_{j=1}^m a_{1j}.b_{jp}$$

$$c_{21} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + \cdots + a_{2m}.b_{m1} = \sum_{j=1}^m a_{2j}.b_{j1}$$

.....

$$c_{np} = a_{n1}.b_{1p} + a_{n2}.b_{2p} + \cdots + a_{nm}.b_{mp} = \sum_{j=1}^m a_{nj}.b_{jp}$$

■ عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية في الحالة العامة.

مثال :

$$\text{لتكن } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ و } B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) , \text{ إذن :}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} (2 \times 7) + (5 \times 9) + (-1 \times 2) & (2 \times 6) + (5 \times 8) + (-1 \times 1) \\ (1 \times 7) + (4 \times 9) + (0 \times 2) & (1 \times 6) + (4 \times 8) + (0 \times 1) \\ (-2 \times 7) + (-3 \times 9) + (3 \times 2) & (-2 \times 6) + (-3 \times 8) + (3 \times 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 57 & 51 \\ 43 & 38 \\ -35 & -33 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

منقول مصفوفة : لتكن المصفوفة $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ فإن منقولها هي المصفوفة A^t حيث $A^t = (c_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $c_{ij} = a_{ji}$ أي للحصول على منقول مصفوفة نجعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطر.

من التعريف نجد : $(A^t)^t = A$. إذا كان : $A^t = A$ فإن A تسمى مصفوفة متناظرة. ولدينا :

$$1) \forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R}), (A+B)^t = (A)^t + (B)^t$$

$$2) \forall A \in M_{n,m}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{m,r}(\mathbb{R}) : (A \cdot B)^t = (B)^t \cdot (A)^t$$

$$\text{مثال : (1) منقول المصفوفة } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ هو } A^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ منقول المصفوفة } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ هو } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

أثر مصفوفة : لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. أثر المصفوفة A هو مجموع عناصر القطر الرئيسي

$$\text{ويرمز له بالرمز } tr(A) : \text{ أي } tr(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

مثال :

$$\text{أثر المصفوفة } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ هو : } tr(A) = 2 + 4 + 3 = 9$$

المحددات :

تعريف : لتكن المصفوفة المربعة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

محدد المصفوفة A هو العدد الحقيقي $\det(A)$ أو $|A|$ الذي يعطى بالنشر وفق السطر i :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \end{aligned}$$

أو بالنشر وفق العمود j :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}) \end{aligned}$$

حيث A_{ij} هي المصفوفة الناتجة من حذف السطر i والعمود j من المصفوفة A .

و i يختار من بين القيم من 1 إلى n ومن الأفضل اختيار السطر الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار.

• إذا كانت $A = (a_{11})$ ذات سطر وعمود واحد فإن : $\det(A) = a_{11}$.

أمثلة : إذا كانت المصفوفة A من الدرجة الثانية فإن محدها يحسب كما يلي :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

باختيار $i = 1$ نجد :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) \\ &= (-1)^2 a_{11} a_{22} + (-1)^3 a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}\end{aligned}$$

أي أن : $\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 = 8 \quad \text{مثلا :}$$

أما محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة فيحسب كما يلي :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

نختار $i = 1$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

حيث : $\det(A_{11})$ المحدد الناتج من حذف السطر الأول والعمود الأول .

$\det(A_{12})$ المحدد الناتج من حذف السطر الأول والعمود الثاني.

$\det(A_{13})$ المحدد الناتج من حذف السطر الأول والعمود الثالث.

$$\text{مثال : حساب محدد المصفوفة } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ط1) نحسب المحدد بالنشر وفق السطر الأول ($i = 1$)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) \\
&= (-1)^{1+1} 3 \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} (-2) \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} (-4) \det(A_{13}) \\
&= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 6 - 4 - 24 \\
&= -22
\end{aligned}$$

ط2) نحسب المحدد بالنشر وفق السطر الثالث ($i = 3$)

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{3+j} a_{3j} \det(A_{3j}) \\
&= (-1)^{3+1} (-3) \det(A_{31}) + (-1)^{3+2} (0) \det(A_{32}) + (-1)^{3+3} (1) \det(A_{33}) \\
&= -3 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -30 + 0 + 8 \\
&= -22
\end{aligned}$$

طريقة ساروس لحساب محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة : نقوم بإعادة كتابة العمودين الأول والثاني أمام المحدد ثم نستعمل أسهم قطرية بالشكل :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

المحدد = جداء عناصر القطر النازل الأول + جداء عناصر القطر النازل الثاني + جداء عناصر القطر النازل الثالث - جداء عناصر القطر الصاعد الأول - جداء عناصر القطر الصاعد الثاني - جداء عناصر القطر الصاعد الثالث.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال : لنحسب محدد $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بطريقة ساروس

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 3.2.1.(-2).(-1).(-3)(-4).1.0 - (-3).2.(-4) - 0.(-1).3 - 1.1.(-2) \\ = -24 + 2 = -22$$

مثال : لنحسب محدد المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 2.9 - 1.9 + 0.(-27) - (-1).9 = 18$$

خواص : لتكن $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\det(A) = \det(A^t) \quad (1)$$

(2) محدد المصفوفة القطرية والمثلثية العليا والمثلثية السفلى يساوي جداء عناصر القطر الرئيسي.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad (3)$$

مثال :

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-3).2.1 = -6, \quad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-4).(-3).1 = 12$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-5).1.3 = -15$$

مقلوب مصفوفة :

لتكن $A \in M_n(\mathbb{R})$. نسمي مقلوب المصفوفة A (إن وجد) المصفوفة $B \in M_n(\mathbb{R})$ التي تحقق:

$$A.B = B.A = I_n \quad \text{نرمز لمقلوب } A \text{ إن وجد بـ } A^{-1}$$

نظرية : لتكن المصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$. تكون A قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$

حساب المقلوب :

$$\text{يعطى مقلوب } A \text{ بالعلاقة التالية : } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B^t \text{ حيث}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

معرفة بـ : $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ هي المصفوفة الناتجة من حذف السطر i والعمود j لـ A . نسمي B^t المصفوفة المرافقة لـ A .

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \text{خاصية :}$$

مثال: حساب مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 3 \neq 0$ ومنه : A قابلة للقلب .

حساب المصفوفة المرافقة :

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad b_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad \dots, \quad b_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

رتبة مصفوفة :

رتبة مصفوفة A هي أكبر عدد من أشعة الأعمدة التي تكون مستقلة خطيا . ونقصد بأشعة الأعمدة الأشعة المكونة من عناصر الأعمدة فكل عمود يعطينا مركبات شعاع ونرمز لرتبة A بـ : $\text{rang}(A)$ أو $\text{rg}(A)$.

مثال : لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{أشعة الأعمدة هي : } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- الأشعة v_1, v_2, v_3 مرتبطة خطيا ومنه رتبة A أصغر من 3 .
 بدراسة الشعاعين v_1 و v_2 نجد أنهما مستقلين خطيا ومنه رتبة A هي 2 .
 ملاحظة : رتبة المصفوفة A ($rg(A)$) هي رتبة أكبر محدد مستخرج من A غير معدوم .

القيم الذاتية والأشعة الذاتية :

- تعريف : لتكن $A \in M_n(\mathbb{R})$ ، نقول عن $\lambda \in \mathbb{R}$ أنها قيمة ذاتية لـ A إذا وجد شعاع $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$ بحيث :
 $AX = \lambda X$. يسمى $X \in \mathbb{R}^n$ شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية λ .
 تعريف : نسمي $\det(A - \lambda I_n)$ حيث $A \in M_n(\mathbb{R})$ بكثير الحدود المميز لـ A .
 نظرية : القيم الذاتية للمصفوفة A هي حلول المعادلة $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

ملاحظات :

- $\det(A - \lambda I_n)$ هو كثير حدود من الدرجة n بالمتغير λ ، وبالتالي عدد جذوره هو n على الأكثر .
- كل قيمة ذاتية تملك شعاع ذاتي على الأقل .
- إذا كانت λ جذر بسيط لكثير الحدود المميز فإن لها شعاع ذاتي مرفق واحد فقط ، وإذا كانت جذر مضاعف k مرة فإن عدد الأشعة الذاتية المرفقة بها هو k على الأكثر .

مثال : لتكن المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 : A \text{ كثير الحدود المميز لـ } A$$

ومنه القيم الذاتية هي : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ ، وهي قيم بسيطة .

الأشعة الذاتية :

من أجل : $\lambda_1 = 2$

$$AX = \lambda_1 X \iff (A - \lambda_1 I_2)X = 0 \iff (A - 2I_2)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 - 2 & 3 \\ -2 & 4 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2x}{3} \end{pmatrix} = \frac{x}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ نجد } \lambda_2 = 1 \text{ من أجل}$$

خواص :

- (1) الأشعة الذاتية $X_1, X_2, \dots, X_n$ المرافقة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ على الترتيب مستقلة خطيا .
- (2) القيم الذاتية لمصفوفة قطرية هي عناصر القطر الرئيسي لهذه المصفوفة .

الفصل الرابع : حل جملة معادلات خطية

تعريف الجملة الخطية : لتكن $n, m \in \mathbb{N}^*$ ، الجملة الخطية $n \times m$ هي مجموعة مكونة من n معادلة خطية و m مجهول تكتب على الشكل :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

حيث : $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ مع $i = 1, 2, \dots, n$ ، $j = 1, 2, \dots, m$ و $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ ،
 $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ تسمى مصفوفة الجملة ورتبتها هي رتبة الجملة ، ويسمى الشعاع $B = (b_i)_{i=1,\dots,n}$ الطرف الثاني للجملة.

• عندما يكون الطرف الثاني للجملة معدوما نقول أن الجملة (S) متجانسة وهي تقبل على الأقل الحل $(0, 0, \dots, 0)$ الذي يسمى بالحل الصفري أو الحل التافه .

• حل الجملة (S) هو الشعاع $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ الذي يحقق جميع معادلات الجملة (S) .

• نقول عن جملتين (S_1) و (S_2) أنهما متكافئتان إذا كان لهما نفس الحلول .

الكتابة المصفوفية للجملة الخطية :

لتكن :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

الجملة (S) تكافئ الكتابة المصفوفية :

$$AX = B \quad (1)$$

وحل الجملة (S) يؤول إلى إيجاد الشعاع X حل المعادلة (1) .

• المصفوفة الموسعة هي المصفوفة A مضاف إليها الشعاع B كعمود أخير ونرمز لها بالرمز $A|B$ أي :

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

طرق حل جملة معادلات خطية :

(1) طريقة كرامر :

تعريف : نقول عن الجملة (S) أنها جملة كرامر إذا كان $n = m$ وكانت المصفوفة A قابلة للقلب .

لتكن الجملة الخطية :

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

التي تكتب على الشكل المصفوفي $AX = B$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نعرف المصفوفات $A_1, A_2, \dots, A_n$ بـ :

A_1 هي المصفوفة الناتجة من حذف العمود الأول لـ A واستبداله بالشعاع B .

A_2 هي المصفوفة الناتجة من حذف العمود الثاني لـ A واستبداله بالشعاع B .

... ..

A_n هي المصفوفة الناتجة من حذف العمود n لـ A واستبداله بالشعاع B .

أي :

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم فإن الجملة (S') تملك حل وحيد يعطى بالعلاقة :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

مثال : لتكن الجملة

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

لدينا :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - 17 \neq 0$$

ومنه للجملة (S_1) حل وحيد :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

لدينا :

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -17, \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -34$$

$$x_1 = \frac{-17}{-17} = 1, \quad x_2 = \frac{-34}{-17} = 2$$

ومنه :

(2) طريقة استعمال مقلوب مصفوفة :

لتكن جملة كرامر (S') التي شكلها المصفوفي هو $AX = B$ ، نفرض أن $\det(A) \neq 0$ ومنه بضرب الطرفين في A^{-1} من اليسار نجد : $X = A^{-1}B$.

مثال : حل الجملة

$$(S_2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

لدينا : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ ومنه المصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو

إذن :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

نظرية : لتكن الجملة $AX = B$ ذات m معادلة و n مجهول.

(1) إذا كان $n = m$ ، تكون المصفوفة A مربعة من الدرجة n و نميز ثلاث حالات :

أ) إذا كان : $rg(A) = n$ أي $\det(A) \neq 0$ ، فإن $rg(A) = rg(A|B)$ والجملة لها حل وحيد .

ب) إذا كان $rg(A) = rg(A|B) < n$ الجملة تملك مالا نهاية من الحلول .

ج) إذا كان $rg(A) \neq rg(A|B)$ الجملة لا تملك حلول .

(2) إذا كان $m > n$ فإننا نميز ثلاث حالات :

أ) إذا كان : $rg(A) = rg(A|B) = n$ فحل الجملة وحيد .

ب) إذا كان $rg(A) = rg(A|B) < n$ الجملة تملك مالا نهاية من الحلول .

ج) إذا كان $rg(A) \neq rg(A|B)$ الجملة لا تملك حلول .

(3) إذا كان $m < n$ فإننا نميز حالتين :

أ) إذا كان $rg(A) = rg(A|B) \leq m$ الجملة تملك مالا نهاية من الحلول .

ب) إذا كان $rg(A) \neq rg(A|B)$ الجملة لا تملك حلول .

حل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل :

لتكن الجملة :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

التي تكتب على الشكل المصفوفي $AX = B$ حيث :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

نعتبر المحددات التالية : $\det(A) = \Delta$, $\det(A_1) = \Delta_{x_1}$, $\det(A_2) = \Delta_{x_2}$, $\det(A_3) = \Delta_{x_3}$

نميز الحالات التالية :

• إذا كان $\Delta \neq 0$ يكون للجملة (S) حل وحيد (x_1, x_2, x_3) بحيث :

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} , \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} , \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

• إذا كان $\Delta = 0$ وكان على الأقل أحد المحددات $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ يختلف عن الصفر فإن الجملة (S) لا تملك حلول .

• إذا كان $\Delta = 0$ وكان $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$ فإن الجملة (S) تملك ما لانهاية من الحلول .

مثال : (1) لتكن الجملة :

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\det(A) = \Delta = 1 , \quad \det(A_1) = \Delta_{x_1} = 3 , \quad \det(A_2) = \Delta_{x_2} = 1 , \quad \det(A_3) = \Delta_{x_3} = -2$$

بما أن $\Delta \neq 0$ فإنه يوجد حل وحيد للجملة (S_1) هو :

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3 , \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1 , \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2$$

(2) لتكن الجملة :

$$(S_2) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\det(A) = \Delta = 0 , \quad \det(A_1) = \Delta_{x_1} = 78$$

بما أن $\Delta = 0$ و $\Delta_{x_1} \neq 0$ فالجملة (S_2) لا تملك حلول .

