Université Mohamed Seddik Benyahia	L3 Phys. fondamentale
Faculté de SEI, Département de Physique	Matière : Phys. Atomique

Devoir N°1

A rendre le 14 mars 2023

On considère le modèle d'un électron qui gravite autour d'un noyau de charge Ze. L'électron est soumis donc au potentiel de Coulomb $V(r) = -\frac{\alpha\hbar c}{r}$ où α est la constante de structure fine.

1. Soit le vecteur de Runge-lenz

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\hbar c\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

où $\vec{p}$ est la quantité de mouvement de l'électron et $\vec{L}$ est son moment cinétique.

   (a) Justifier le fait que $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.

   (b) En utilisant la loi de Newton $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{Coulomb} = -\frac{\alpha\hbar c}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, montrer que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\alpha\hbar c}{r^3}\left(\vec{r} \times \vec{L}\right) - m\alpha\hbar c\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{2}$$

   (c) Montrer maintenant que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\left[\left(\vec{r}.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{r} - r^2\frac{d\vec{r}}{dt}\right] \tag{3}$$

   (d) En écrivant $\vec{L}$ sous la forme $\vec{L} = m\ \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$, montrer que $\vec{A}$ est une constante de mouvement, c-à-d $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$.

2. On veut maintenant calculer le module de $\vec{A}$

   (a) En utilisant les propriétés du produit mixte montrer que

$$A^2 = \left(\vec{p} \times \vec{L}\right)^2 - 2m\frac{\alpha\hbar c}{r}L^2 + (m\alpha\hbar c)^2 \tag{4}$$

   (b) Démonter aussi que

$$\left(\vec{p} \times \vec{L}\right)^2 = p^2L^2. \tag{5}$$

   (c) En déduire que

$$A^2 = 2mEL^2 + m^2\alpha^2\hbar^2c^2. \tag{6}$$

3. A partir du produit scalaire $\left(\vec{r}.\vec{A}\right)$, trouver l'équation de la trajectoire de l'électron.

   On choisit comme axe (OX), l'axe portant le vecteur $\vec{A}$.

On donne :

1) Le produit vectoriel de trois vecteur

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a}.\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c} \tag{7}$$

2) Le produit mixte

$$\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c}.\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b}.\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \tag{8}$$

Bon travail

$å$\ell$å$\hbar$