CHAPITRE 03 : DÉNOMBREMENT, ANALYSE COMBINATOIRE ET CALCULS DES PROBABILITÉS

SECTION 01 : DÉNOMBREMENT ET ANALYSE COMBINATOIRE

Le calcul combinatoire et dénombrement permet de calculer les probabilités.

I. PRINCIPE DE DÉNOMBREMENT

Définition :

- Un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
- Le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$.
- Dénombrer est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est-à-dire déterminer le cardinal.

Exemples :

- L'ensemble E des étudiants de la section A est un ensemble fini.
- L'ensemble ℕ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

Définition : On dit que deux ensembles sont disjoints, s'ils n'ont aucun élément en commun.

1. Principe additif

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$, p ensembles finis deux à deux disjoints. $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = Card(E_1) + Card(E_2) + \cdots + Card(E_p)$.

Exemple :

Soit $E_1 = \{4, a; b; c; 5\}$ et $E_1 = \{6; f; g\}$

Alors E_1 et E_2 sont disjoints et on a : $Card(E_1 \cup E_2) = Card(E_1) + Card(E_2) = 5 + 3 = 8$.

20 personnes préfèrent le lait au petit déjeuner, 14 le thé, 6 personnes préfèrent les deux aliments et 8 n'aiment pas le lait et n'aiment pas le thé aussi. **Calculer le nombre total de personnes de cet échantillon ?**

Correction :

Soit L l'ensemble des personnes préférant le lait au petit déjeuner et T l'ensemble des personnes préférant le thé. On a alors :

$Card(L) = 20$

$Card(T) = 14$

$Card(L \cap T) = 6$

$Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 10$

On ne peut pas utiliser le principe additif car les ensembles L et T ne sont pas disjoints.

On schématise alors la situation à l'aide d'un diagramme, comme suit :

On en déduit le nombre de personnes de cet échantillon en utilisant le principe additif sur des ensembles disjoints, soit : 14 + 6 + 8 + 10= 33.

2. principe multiplicatif

Soit p ensembles finis E_1 , E_2 , ... , E_p . Pour dénombrer les éléments de tous les ensembles on utilise le principe multiplicatif :

$$Card(E_1 \times E_2 \times E_3 \times \ldots \times E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \ldots \times Card(E_p).$$

Définition : Soit p ensembles finis $E_1, E_2, E_3, \ldots E_p$.

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples (a_1, a_2) où $a_1 \in E_1$ et $a_2 \in E_2$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des couples (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est l'ensemble des **p-uplets** $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2 \ldots a_p \in E_p$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des couples (a_1, a_2, a_3) où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_3 \in E_3$.

Exemple 01 :

On considère les 3 ensembles suivants :

$E_1 = \{veste\ rouge, veste\ noire, veste\ blanche\}$

$E_2 = \{jupe\ rouge, jupe\ noire, jupe\ blanche\}$

$E_3 = \{chaussures\ rouges, chaussures\ noires, chaussures\ \ blanches\}$

Combien de tenues peut-on former ?

On appelle $E_1 \times E_2 \times E_3$, l'ensemble de tous les triplets formés d'un élément de E_1, d'un élément de E_2 et d'un élément de E_3. On peut former $3^3 = 27$ triplets différents (tenues différentes)

Exemple 02 :

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

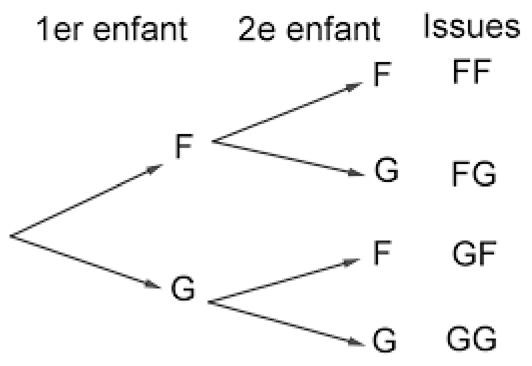
Correction :

a) Soit E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.

On considère alors les triplets de la forme (entrée, plat, dessert) éléments de

Utilisation de l'arbre de dénombrement

Une famille à deux enfants. Il existe 4 possibilités :



II . ARRANGEMENTS

Quand on s'intéresse à la disposition ordonnée de k éléments parmi n ($k \leq n$) , ceci signifie d'arranger ces k éléments dont l'**ordre** est important. Les arrangements d'un ensemble d'éléments se distinguent par l'ordre des éléments qui les composent.

ARRANGEMENTS AVEC REMISE

Lorsque les éléments peuvent se répéter (**avec remise**), le nombre de résultats possibles est obtenu par la formule suivante :

$$rA_n^k = n^k$$

Propriété : Soit E un ensemble fini de n éléments. Le nombre de k-uplets est :

$Card(E^k) = n^k$

Exemple :

On lance trois dés équilibrés. L'ensemble des résultats possibles pour un seul dé est

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L'ensemble des résultats possibles pour les trois dés est E^3 ensembles des triplets (3-uplets) avec $card(E^3) = 6x6x6 = n^k = 6^3$ triplets possibles (d'après le principe multiplicatif)

$$\{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3)\ldots\ldots, (6,6,6)\}$$

ARRANGEMENTS SANS REMISE

Lorsque les éléments ne peuvent pas se répéter (sans **remise**), le nombre de résultats possibles est obtenu par la formule suivante :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Remarque : On appelle factorielle n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n : n ! = 1 x 2 x 3 x…n

Propriété : Soit E un ensemble fini de n éléments. Le nombre de k-uplets différents (car arrangements sans remise) est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>Exemple :</u>
On considère l'ensemble $E = \{a\,; b\,; o\,; p\,; r\}$.
- (b, o, a) et (r, a, p) sont des triplets d'éléments distincts de E.

Calculons par exemple le nombre de triplets d'éléments distincts de E.
- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.
- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n'y a pas répétition d'éléments.
- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de triplets d'éléments distincts de E est égal à : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Ou bien $\frac{5!}{(5-3)!}$ ***= 60 triplets d'éléments différents***

III. PERMUTATIONS

Quand on s'intéresse à la disposition ordonnée de tous les éléments (n éléments parmi n), ceci signifie d'arranger ces n éléments dont l'**ordre** est important. Les arrangements d'un ensemble d'éléments se distinguent par l'ordre des éléments qui les composent.

PERMUTATIONS SANS REMISE

Ici l'expérience est sans remise. le nombre de permutions possibles est obtenu par la formule suivante : $P_n = n\,!$

Une permutation d'un ensemble à n éléments est un n-uplet d'un ensemble à n éléments.

Exemple 01 : Soit E un ensemble à six éléments : E= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(1,3,4,6,2,5) ; (1,4,6,3,2,5) et (1,5,4,6,2,3) ; …sont des 6-uplet constitués de tous les éléments différents de E. ce sont les permutations de E.

Il existe 6 ! de 6-uplets possibles.

Exemple 2 : Quatre personnes souhaitent s'assoir sur un bancs à 4 places. Il existe 4 ! façons possibles d'une façon alignée.

Remarque : Si la disposition est circulaire : Il existe (n-1) ! façons possibles

PERMUTATIONS AVEC REMISE

Lorsque nous souhaitions permuter n éléments composés de dont k éléménts seulement sont différents et ($k \leq n$) placés dans un n-uplet et supposons que chacun d'entre eux apparaisse respectivement n_1 fois, n_2 fois, … , n_k fois avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Quand des éléments identiques de ce n-uplet sont permutés, nous obtenons le même n-uplet.

La formule pour dénombrer les permutations est :

$$\boldsymbol{P_n^R = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots n_k!}}$$

Avec $\mathbf{n} = \boldsymbol{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$

Exemple :

Dénombrer tous les anagrammes du mot MISSISSIPI ?

n le nombre total de lettres du mot MISSISSIPI = 10

La lettre M est répétée 1 fois ($n_1 = 1$)

La lettre I est répétée 4 fois ($n_2 = 4$)

La lettre S est répétée 4 fois ($n_3 = 4$)

La lettre P est répétée 1 fois ($n_4 = 1$).

$$P_{10}^R = \frac{10!}{1!\ 4!\ 4!1!}$$ permutations possibles

IV. COMBINAISONS

Les combinaisons d'un ensemble de k éléments parmi n ($k \leq n$) **ne se distinguent pas** par **l'ordre** des éléments qui les composent.

Cela signifie que les deux combinaisons suivantes sont équivalentes { 1,2 } et { 2,1} de l'ensemeble E= {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

COMBINAISONS SANS REMISE

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons possibles à k éléments ($k \leq n$) est égal à :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cas particuliers :

Pour tout entier naturel n : $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$ $C_n^1 = n$

COMBINAISONS AVEC REMISE

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons possibles à k éléments ($k \leq n$) avec répétitions est égal à :

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

REMARQUES :

- Pour $0 \leq k \leq n$ on a : $C_n^k = C_n^{n-k}$ et $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n - 1$
- $C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ $quand\ n \geq 2$
- Pour $0 \leq k \leq n$ on a : $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$,

D'après ces relations on définit le tableau de Pascal :

n k	0	1	2	3	
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

- La formule de binôme de Newton :

Soient a et b deux nombres réels et pour tout $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Exemple : n= 2

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$