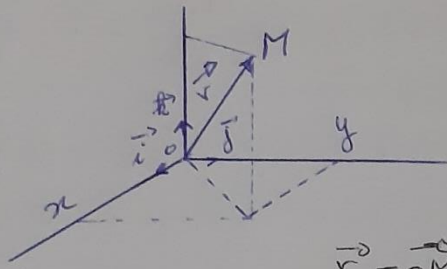


1.3. جمل الإحداثيات المستقطبة:

1.1.3 - الإحداثيات الديكارتيّة:



جملت الإحداثيات هي المثلث $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ الكيفي وفي الحالة العامة يؤخذ متعامد ومتجانس ويكتب

$$\vec{r} = \vec{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

شعاع الموضع:

$$r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

شعاع السرعة: لا يجاد عبارة السرعة اللحظية للمتحرّك نستعمل العلاقة التالية:

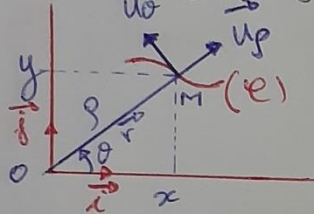
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}.$$

$$\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}.$$

يمكن كتابة المشتقات بشكل آخر:

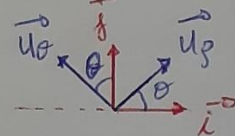
1.3. الإحداثيات القطبية:



نستعمل الإحداثيات القطبية لتخدي موضع نقطة مادية تتحرك في المستوى، لكن بدلاً من القاعدة الساكنة $(\vec{i}, \vec{j})$ نستعمل القاعدة المتحركة $(\vec{\mu}_p, \vec{\mu}_\theta)$. حيث:

$$\vec{\mu}_p = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{\mu}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$



شعاع الموضع: يكتب شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية (ρ, θ) :

$$\vec{r} = \vec{OM} = \rho(t)\vec{\mu}_p$$

حيث $\rho(t)$ طول الشعاع $\vec{OM}$.

العلاقة بين الإحداثيات الديكارتيّة (x, y) والإحداثيات القطبية (ρ, θ) هي:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos\theta \\ y(t) = \rho(t) \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

شعاع السرعة: في الإحداثيات القطبية يتغير شعاع الموضع $\vec{OM}$ بتغير (الطول $\rho(t)$) أشعة الوحدة $\vec{\mu}_p$ و $\vec{\mu}_\theta$ تتغير باتجاهاتها يتغير شعاع الموضع $\vec{OM}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} [\rho(t)\vec{\mu}_p] = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{\mu}_p + \rho(t)\frac{d\vec{\mu}_p}{dt}$$

لنحسب

$$\frac{d\vec{\mu}_p}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} (\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = \frac{d\theta}{dt} (-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = \frac{d\theta}{dt} \vec{\mu}_\theta$$

$$\frac{d\vec{\mu}_p}{dt} = \dot{\theta} \vec{\mu}_\theta$$

ومنه

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\rho(t)}{dt} \vec{u}_\rho + \rho(t) [\dot{\theta} \vec{u}_\theta] = \dot{\rho}(t) \vec{u}_\rho + \rho(t) \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

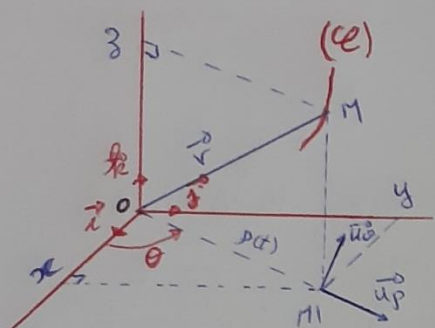
$$\vec{v} = \dot{\rho}(t) \vec{u}_\rho + \rho(t) \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

نستعمل

3.1.3

الإحداثيات الأسطوانية (ρ, θ, z) : نستعمل الإحداثيات الأسطوانية لتعريف موضع نقطة

M تتحرك في فضاء ثلاثي الأبعاد يتم اختيار هذه الإحداثيات إذا كان المسار (e) له تناظر



$$\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{k} = \vec{u}_\rho$$

$$\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{r} = \vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$$

$$\vec{r} = \rho(t) \vec{u}_\rho + z(t) \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho(t) \vec{u}_\rho + z(t) \vec{k})$$

بالنسبة المحاور (Oz) حيث:

شعاع الموضع:

شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} [\rho(t) \vec{u}_\rho] + \frac{d}{dt} [z(t) \vec{k}] = \frac{d\rho(t)}{dt} \vec{u}_\rho + \rho(t) \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t) \vec{u}_\rho + \rho(t) \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z}(t) \vec{k}$$

4.1.3- الإحداثيات الكروية (r, θ, φ) : نستعمل الإحداثيات الكروية لتعريف موضع نقطة

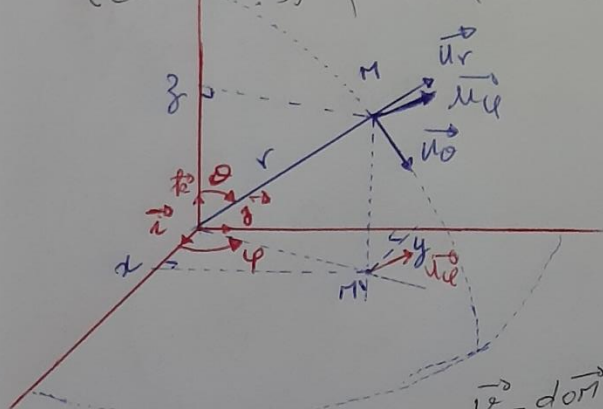
تتحرك في فضاء ثلاثي الأبعاد. يتم اختيار هذه الإحداثيات في بعض المسائل ذات تناظر

كروي، كحركة الإلكترون حول النواة، حساب مساحة أو حجم لأجسام كروية... (الخ).

$$\vec{r} = \vec{OM} = r \vec{u}_r$$

شعاع الموضع:

حيث r هو طول الشعاع OM.



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r \vec{u}_r)}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

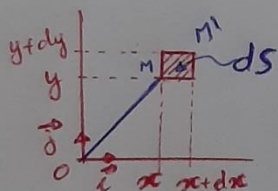
3. حساب المساحات والحجوم

3.1. الإحداثيات الديكارتية: ليكن $M(x, y, z)$

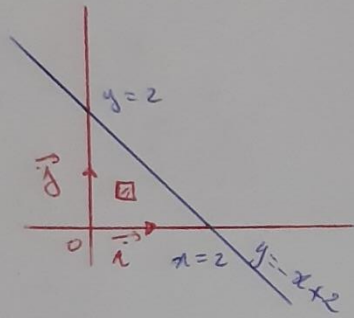
نقطة داخلة في المستوى (Oxy): $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$ و $\vec{MM'} = d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$

نعرّف عنصر المساحة في الإحداثيات الديكارتية بالعلاقة التالية:

$$dS = dx dy \quad \text{أي أن} \quad S = \iint dS$$



مثال: أحسب المساحة المصورة بين المستقيمين $y = -x + 2$ والمحورين (ox) و (oy)

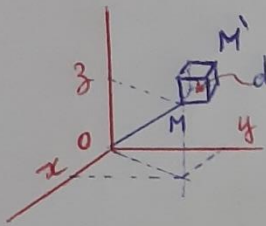


الحل: المتغيرين x و y غير مستقلين: $ds = dm \cdot dy$

$$S = \int_0^2 dx \int_0^{-x+2} dy = \int_0^2 dx [y]_0^{-x+2} = \int_0^2 (-x+2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{4}{2} + 4 \right) - 0 = -2 + 4 = 2$$

$$S = 2$$



نعتبر نقطة $M(x, y, z)$ الواقعة في الفضاء وليكن $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$

و M' نقطة قريبة جداً من M إحداثياتها $x+dx$, $y+dy$, و $z+dz$

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{MM'} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

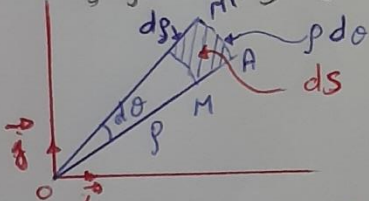
نعرف عنصر الحجم في الإحداثيات الديكارتية بالعلاقة:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$V = \iiint dx \cdot dy \cdot dz$$

ومن

3. 2. 1. الإحداثيات القطبية: لنكن نقطة $M(p, \theta)$ نقطة في المستوى و $M'(p+dp, \theta+d\theta)$



$$MA = dp \text{ و } AM' = p d\theta$$

$$\vec{OM} = p \vec{u}_p$$

$$\vec{MM'} = d\vec{OM} = d\vec{r} = dp \vec{u}_p + p d\theta \vec{u}_\theta$$

نعرف عنصر المساحة في الإحداثيات القطبية: $ds = p dp d\theta$

$$S = \iint p dp d\theta$$

مثال 1: أحسب مساحة قرص نصف قطره R

الحل: لدينا $ds = p dp d\theta$

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R p dp = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{p^2}{2} \right]_0^R$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{2} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \Rightarrow S = \pi R^2$$

3. الإحداثيات الأسطوانية: لنكن النقطة $M(p, \theta, z)$

و $M'(p+dp, \theta+d\theta, z+dz)$ نقطة قريبة جداً من M لدينا:

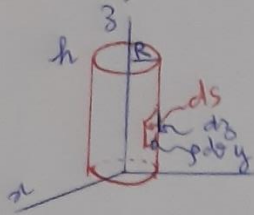
$$MA = dp \text{ و } AB = p d\theta \text{ و } BM' = dz$$

$$\vec{MM'} = d\vec{OM} = d\vec{r} = dp \vec{u}_p + p d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

نعرف عنصر المساحة الجانبية في الإحداثيات الأسطوانية $ds = p d\theta dz$

$$ds = p d\theta dz \Rightarrow S = \iint p d\theta dz$$

مثال: أحسب مساحة السطح الخارجي للأسطوانة، ارتفاعها h ، ونصف قطرها R .



الحل: الإحداثيات مستقلة. $ds = \rho d\theta \cdot dz = R d\theta dz$.

$$S = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = R \int_0^{2\pi} d\theta \cdot z \Big|_0^h = R h \int_0^{2\pi} d\theta = R h \theta \Big|_0^{2\pi}$$

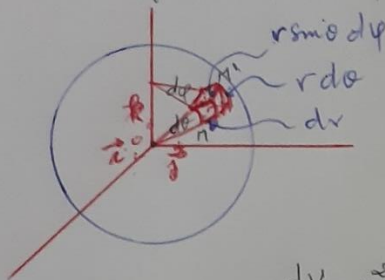
$$S = 2\pi R h$$

⊗ ونعرف عنصر الحجم في الإحداثيات الأسطوانية بالعلاقة:

$$dV = \rho d\rho d\theta dz.$$

3-4- الإحداثيات الكروية: لتكن (r, θ, φ) الإحداثيات الكروية للنقطة M و M'

نقطة قريبة جدًا من النقطة M إحداثياتها $M'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$



لدينا: $d\vec{OM} = r\vec{u}_r = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$

⊗ نعرف عنصر المساحة في الإحداثيات الكروية:

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow S = \iint r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

⊗ أما عنصر الحجم فيكتب:

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow V = \iiint r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi.$$

مثال: أحسب الحجم المحصور بين كرتين نصف قطريهما R_2 و R_1 حيث $R_2 > R_1$

الحل: في الإحداثيات الكروية نستعمل (r, θ, φ) لذلك يكتب كتابة



التكامل الثلاثي على شكل جداء ثلاثة تكاملات مستقلة عن بعضها البعض لأن الإحداثيات مستقلة.

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

$$V = \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} \times [-\cos\theta]_0^\pi \times [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$V = \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) \times 2 \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3).$$