

الفصل الثاني : نظرية سلوك المنتج - تابع-

1. تعريف و أنواع دوال الإنتاج

2. دالة الانتاج في الفترة القصيرة (بمتغير واحد)

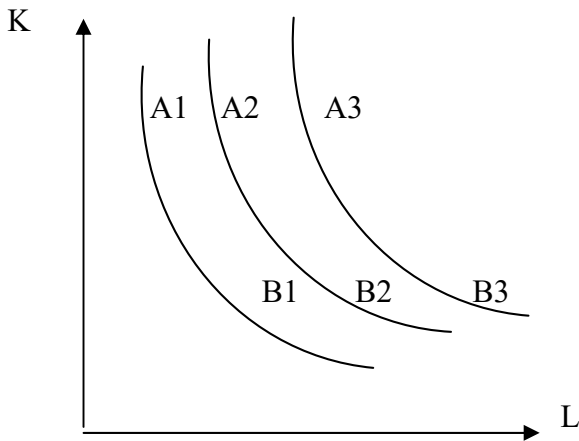
3. دالة الإنتاج بمتغيرين: (دالة الإنتاج في الفترة الطويلة)

فكما قلنا سابقا، فإن كل عوامل الإنتاج ستكون متغيرة في المدى الطويل، و لتبسيط التحليل و التمثيل البياني فإننا سنقتصرها على تغير عاملين فقط من عوامل الإنتاج هما العمل L و رأس المال K ، و بالتالي فدالة (تابع) الإنتاج تأخذ الشكل التالي: $TP = f(K,L)$.

1.3. منحنى الكمية المتساوية (منحنى الناتج المتساوي) Les isoquants :

منحنى الكمية المتساوية يبين مختلف التركيبات الممكنة من العمل L و رأس المال K الممكن استعمالها من طرف المؤسسة لإنتاج كمية محددة (متساوية) من المنتج (السلع و الخدمات)، فكلما ارتفع منحنى الكمية المتساوية كان ذلك دليلا على تحقيق المنتج لكمية إنتاج أكبر و العكس صحيح و هو بذلك يشبه منحنيات السواء في تحليل سلوك المستهلك.

من خلال التعريف نستنتج وجود علاقة إحلال بين عوامل الإنتاج (L, K) للحصول على نفس كمية الإنتاج أو بما يعرف بمعدل الإحلال التقني $TMST_{l,k}$.



- النقطتين A1 و B1 تحققان نفس كمية الإنتاج باستخدام كميات مختلفة من العمل L و رأس المال K في كل منهما.
- التركيبات (L,K) الواقعة على منحنى الكمية المتساوية III يحقق فيها المنتج كمية إنتاج أكبر من التركيبات الواقعة في منحنى الناتج المتساوي II و I .

2.3. المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{l,k}$ Le Taux Marginal de Substitution Technique :

المعدل الحدي للإحلال التقني للعمل L محل رأس المال K ، $TMST_{l,k}$ هو كمية رأس المال K التي يجب أن يتنازل عنها المنتج لزيادة كمية العمل L بوحدة واحدة مع البقاء على نفس منحنى الكمية المتساوية.

$$TMST_{l,k} = - \Delta K / \Delta L = - d K / d L$$

- نعلم أن حجم الإنتاج عند جميع نقاط منحنى الكمية المتساوية ثابت و بالتالي فالتغير في كمية الإنتاج عند الانتقال من نقطة إلى أخرى على هذا المنحنى يكون معدوماً.

$$dPT = 0$$

$$dPT = (dPT/dL) \cdot dL + (dPT/dK) \cdot dK$$

$$PmL \cdot dL + PmK \cdot dK = 0$$

$$PmL \cdot dL = - PmK \cdot dK$$

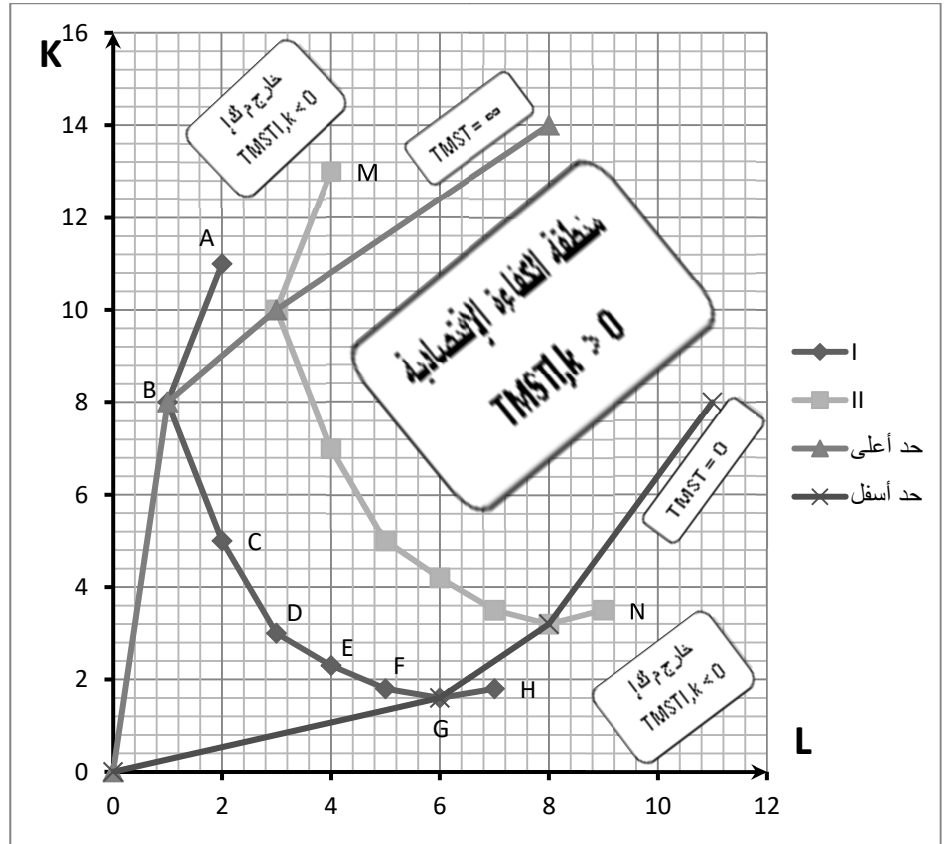
$$PmL / PmK = - dK / dL$$

$$TMST_{L,K} = - dK / dL = - \Delta K / \Delta L = PmL / PmK$$

dK / dL : يمثل ميل منحنى الكمية المتساوية.

مثال: إنطلاقاً من الجدول الموالي، أرسم منحنيات الناتج المتساوي و أحسب قيمة $TMST_{L,K}$.

المنحنى I			المنحنى II		
L	K	TMST	L	K	TMST
2	11	-	4	13	-
1	8	-	3	10	-
2	5	3	4	7	3
3	3	2	5	5	2
4	2.3	0.7	6	4.2	0.8
5	1.8	0.5	7	3.5	0.7
6	1.6	0.2	8	3.2	0.3
7	1.8	-	9	3.5	-



3.3. خصائص منحنى الكمية المتساوية:

لمنحنيات الكمية المتساوية نفس خصائص منحنيات السواء تقريباً و تتمثل في :

1.3.3 منحنيات الناتج المتساوي مقعرة نحو نقطة الأصل (المبدأ) لتناقص معدل الإحلال التقني $TMST_{L,K}$.

2.3.3 منحنيات الناتج المتساوي لا تتقاطع كون المنتج لا يستطيع إنتاج كميتين مختلفتين من المنتج بتركيبة واحدة (L, K) .

3.3.3 في منطقة الكفاءة الاقتصادية تكون منحنيات الكميات المتساوية ذات ميل سالب: أي $TMST_{L,K}$ يكون موجبا، فالمنتج يجب أن ينتج في هذه المنطقة حتى يكون سلوكه عاقلاً، فالمنتج إذا أراد استعمال كمية أقل من K يجب أن يستعمل كمية أكبر من L للمحافظة على نفس كمية الإنتاج (ما يجعل قيمة $TMST_{L,K}$ موجبا)،

فالمنتج لن يختار الإنتاج في الجزء الذي يكون فيه منحنى الناتج المتساوي ذو ميل موجب لأنه بإمكان المنتج إنتاج نفس كمية المنتج باستعمال كميات أقل من العمل L و رأس المال K في نفس الوقت. فبالرجوع إلى المثال السابق، فعند النقطة A من منحنى الكمية المتساوية I يستعمل المنتج كميات أكبر من $(L=2, K=11)$ مما يستعملها في النقطة B ($L=1, K=8$) التي تقع على نفس منحنى الكمية المتساوية، و نفس الشيء يقال على النقاط H, L, M التي تعتبر خارج منطقة الكفاءة الإقتصادية.

* تحديد مجال منطقة الكفاءة الإقتصادية (المنطقة الفعالة للإنتاج):

قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني $TMST_{l,k}$ تكون موجبة ضمن منطقة الكفاءة الإقتصادية التي يجب على المنتج أن ينتج ضمنها، إذن:

$$TMST_{l,k} > 0 \implies P_{mL} / P_{mK} > 0$$

و منه :

$$P_{mL} > 0, \quad P_{mK} > 0$$

- منحنى الحد الأعلى لمنطقة الكفاءة الإقتصادية تكون فيه قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني لا نهائية ، فإذا أخذنا النقطة B الواقعة على الحد الأعلى لمنطقة الكفاءة الإقتصادية و الواقعة بين النقطتين A و C نجد أن:

$$TMST_{l,k} = - \Delta K / \Delta L = - (-6) / 0 = \infty$$

$$TMST_{l,k} = P_{mL} / P_{mK} = \infty \implies P_{mK} = 0$$

- منحنى الحد الأسفل لمنطقة الكفاءة الإقتصادية تكون فيه قيمة المعدل الحدي للإحلال التقني معدومة ، فإذا أخذنا النقطة G الواقعة على الحد الأسفل لمنطقة الكفاءة الإقتصادية و الواقعة بين النقطتين F و H نجد أن:

$$TMST_{l,k} = - \Delta K / \Delta L = - (-0) / 2 = 0$$

$$TMST_{l,k} = P_{mL} / P_{mK} = 0 \implies P_{mL} = 0$$

4.3. منحنى التكلفة المتساوية (قيد التكلفة) : les isocoûts

إن تحديد مختلف التركيبات التي تمنح نفس القدر من الإنتاج على منحنى الناتج المتساوي و تحديد منطقة الكفاءة الإقتصادية لا يكفي لاتخاذ قرارات سليمة من طرف المنتج تجعله في وضعية التوازن التي يحقق فيها أقصى ربح ممكن، فالربح مرتبط بعنصر المبيعات (كمية الإنتاج x السعر) و كذا تكاليف الإنتاج المنفقة من طرف المنتج على شراء عوامل الإنتاج كالعمل و رأس المال....

خط التكلفة المتساوية يمثل مختلف التركيبات من عوامل الإنتاج (العمل L و رأس المال K) الممكن شرائها من طرف المؤسسة (المنتج) مع الإخذ بعين الاعتبار أسعار عوامل الإنتاج PL, PK و قيمة الإنفاق أو التكاليف التي يخصصها المنتج لعملية الإنتاج. و بالتالي فمعادلة منحنى التكاليف المتساوية تأخذ الشكل التالي:

$$CT = L P_L + K P_K \implies K = (CT - L P_L) / P_K$$

معادلة خط التكلفة المتساوية $K = - P_L / P_K (L) + CT / P_K$

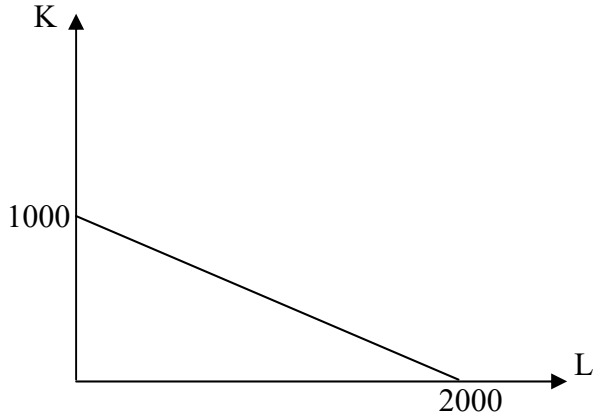
CT : Coût total : التكلفة الكلية.

P_L : سعر الوحدة من العمل، P_K : سعر الوحدة من رأس المال، L : كمية العمل، K : كمية رأس المال.

$- P_L / P_K$: ميل خط التكلفة المتساوية .

مثال: يخصص منتج 100 000 دج في عملية الإنتاج، سعر الوحدة الواحدة من العمل هي 50 دج، سعر الوحدة من رأس المال (أجر كراء آلة لمدة ساعة) هي 100 دج .
- استنتج معادلة خط التكلفة المتساوية و مثله بيانيا.

الحل:



$$CT = L P_L + K P_K \quad 100\,000 = 50 L + 100 L$$

$$K = 1000 - 0.5 L$$

$$(L = 0, K = 1000) , (K = 0, L = 2000)$$

5.3. توازن المنتج : l'équilibre du producteur

- على غرار المستهلك، فالمنتج يحقق وضعية التوازن (السلوك الأمثل) إذا:
- حقق أقصى كمية من الإنتاج PT في ظل ميزانية إنفاق محددة (تكاليف معلومة القيمة)، أو؛
 - حقق كمية محددة من الإنتاج بأقل تكلفة ممكنة.

1.5.3. توازن المنتج هندسيا:

يتحقق توازن المنتج هندسيا عند النقطة التي يكون فيها خط التكلفة المتساوي CT مماسا لمنحنى الكمية المتساوية (الناتج المتساوي)، أي أن عند نقطة توازن المنتج يكون:

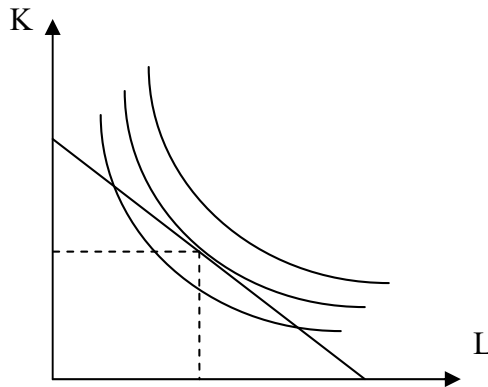
$$(\text{ميل منحنى التكلفة المتساوية } (PL / PK) = -) = (\text{ميل منحنى الكمية المتساوية } dK / dL = \Delta QK / \Delta QL)$$

$$dK / dL = - TMST_{l,k} = - P_{mL} / P_{mK} = - PL / PK$$

و منه:

$$TMST_{l,k} = - dK / dL = - \Delta K / \Delta L = P_{mL} / P_{mK} = PL / PK$$

و شرط توازن المنتج هو: $P_{mL} / P_{mK} = PL / PK$ أو $P_{mL} / PL = P_{mK} / PK$



2.5.3. إيجاد توازن المنتج رياضيا:

يمكن استخدام طريقة لاغرانج لإيجاد توازن المنتج، و نميز بين حالتين:

الحالة الأولى: ترغب فيها المؤسسة الحصول على أعظم أو أكبر كمية من الإنتاج باستعمال ميزانية إنفاق

(تكاليف) معلومة القيمة، و بالتالي فهدف المنتج هو تعظيم الإنتاج.

دالة الهدف المنتج هي:

$$\begin{cases} \text{MAX PT} = f(L, K) \\ \text{s/c : CT} = L P_l + K P_k \end{cases}$$

و تبعا لدالة هدف تعظيم الإنتاج تحت قيد التكلفة المتساوية تأخذ معادلة لاغرانج الشكل التالي:

$$L = F(L, K) + \lambda (CT - L P_l - K P_k)$$

أ/ الشرط اللازم: إعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لـ λ, K, L .

$$\begin{aligned} dL / d\lambda = 0 &\implies CT - L P_l - K P_k = 0 \dots\dots(1) \implies \lambda = P_l / P_m L = P_l / P_m L \\ dL / dK = 0 &\implies P_k - \lambda P_m K = 0 \dots\dots(2) \implies \lambda = P_k / P_m K = P_k / P_m K \\ dL / dL = 0 &\implies P_l - \lambda P_m L = 0 \dots\dots(3) \implies \lambda = P_l / P_m L = P_l / P_m L \end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\lambda = P_m L / P_l = P_m K / P_k$

و هو شرط التوازن: $P_m L / P_m K = P_l / P_k$

ب/ الشرط الكافي: المحدد الهيسي موجب: $|\Delta| > 0$

الحالة الثانية: ترغب فيها المؤسسة الحصول على كمية محددة من الإنتاج بأقل تكلفة، و بالتالي فهدف المنتج هو

تدنية التكاليف.

دالة الهدف المنتج هي:

$$\begin{cases} L P_l + K P_k \text{ MIN CT} = \\ \text{s/c : PT} = f(L, K) \end{cases}$$

و تبعا لدالة هدف تعظيم الإنتاج تحت قيد التكلفة المتساوية تأخذ معادلة لاغرانج الشكل التالي:

$$L = L P_l - K P_k + \lambda (PT - F(L, K))$$

أ/ الشرط اللازم: إعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لـ λ, K, L .

$$\begin{aligned} dL / d\lambda = 0 &\implies PT - L P_l - K P_k = 0 \dots\dots(1) \implies \lambda = P_l / P_m L = P_l / P_m L \\ dL / dK = 0 &\implies P_k - \lambda P_m K = 0 \dots\dots(2) \implies \lambda = P_k / P_m K = P_k / P_m K \\ dL / dL = 0 &\implies P_l - \lambda P_m L = 0 \dots\dots(3) \implies \lambda = P_l / P_m L = P_l / P_m L \end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\lambda = P_l / P_m L = P_k / P_m K$

و هو شرط التوازن: $P_m L / P_m K = P_l / P_k$

ب/ الشرط الكافي: المحدد الهيسي سالب: $|\Delta| < 0$

مثال 1 : لتكن دالة الإنتاج لمؤسسة كمايلي: $Q = 10 L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{6}}$

أجر ساعة عمل هو 4 دج، أجر كراء الآلات (رأس المال) هو 6 دج، و المبلغ المخصص للإنفاق على الإنتاج هو 4000 دج. أوجد توازن المنتج (المؤسسة) و ما هو حجم إنتاج المؤسسة؟

الحل:

هدف المنتج هو تعظيم الإنتاج:

$$\begin{cases} \text{MAX } Q = 10 L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{6}} \\ \text{s/c : CT} = 4000 = 4L + 6K \end{cases}$$

معادلة لاغرانج $L = 10 L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{6}} + \lambda (4000 - 4L - 6K)$

أ/ الشرط اللازم: إعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لـ λ, K, L .

$$dL / d\lambda = 0 \implies \frac{10}{4} L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{6}} - 4\lambda = 0 \dots\dots\dots(1) \implies \lambda = (\frac{10}{4} L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{6}}) / 4$$

$$dL / dK = 0 \implies \frac{10}{6} L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{5}{6}} - 6\lambda = 0 \dots\dots\dots(2) \implies \lambda = (\frac{10}{6} L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{5}{6}}) / 6$$

$$dL / d\lambda = 0 \implies 4000 - 4L - 6K = 0 \dots\dots(3)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\lambda = (\frac{10}{6} L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{5}{6}}) / 6 = (\frac{10}{4} L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{6}}) / 4$

و منه: $L = 2.25 K$

بالتعويض في (3) نجد: $4000 = 4 (2.25K) - 6K = 0 \implies 4000 = 15K$

وحدة من رأس المال $K = 267$ ، وحدة من العمل $L \approx 600$

حجم الإنتاج الموافق: وحدة $Q = 10 \cdot (600)^{\frac{1}{4}} (267)^{\frac{1}{6}} = 125$

مثال 2: لتكن دالة الإنتاج لمؤسسة كمايلي: $Q = 2 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}}$

سعر وحدة عمل هو 2 دج، أجر رأس المال هو 1 دج، ما هي كميات عوامل الإنتاج التي يشتريها المنتج لتحقيق إنتاج قدره 16 وحدة؟

الحل: دالة الهدف المنتج هي:

$$\begin{cases} \text{MIN CT} = 2L + 1K \\ \text{s/c : } 16 = 2L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

معادلة لاغرانج $L = 2L + 1K + \lambda (16 - 2L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}})$

أ/ الشرط اللازم: إعدام المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج بالنسبة لـ λ, K, L .

$$dL / d\lambda = 0 \implies 2 - \lambda \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}} = 0 \dots\dots\dots(1) \implies \lambda = 2 / (\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}})$$

$$dL / dK = 0 \implies 1 - \lambda / 2 L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{4}} = 0 \dots\dots\dots(2) \implies \lambda = 2 / (L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{4}})$$

$$dL / d\lambda = 0 \implies 16 - 2L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\lambda = 2 / (\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}}) = 2 / (L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{4}})$

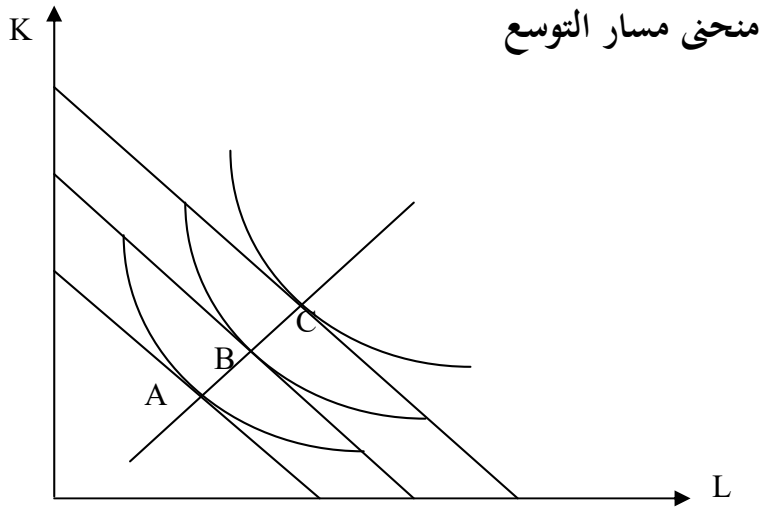
و منه: $L = K$

بالتعويض في (3) نجد: $16 = 2^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 8 = L^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = (L^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} \Rightarrow L=16, K=16$

$CT = 2(16) + 1(16) = 48$ D.A ، تكلفة الإنتاج: $L = K = 16$

6.3. منحنى توسع الإنتاج (مسار التوسع): le sentier d'expansion :

إذا غير المنتج حجم التكاليف الكلية المخصصة لعملية الإنتاج قصد التوسع في النشاط مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج (p_l, p_k) فإن منحنى التكلفة المتساوية CT سينتقل بالتوازي إلى الأعلى في حالة زيادة الإنفاق الكلي، وإلى الأسفل في حالة انخفاض الإنفاق. هذا الانتقال سيؤدي إلى تماس منحنى التكلفة المتساوية مع منحنى آخر للنتائج المتساوي ما سيؤدي إلى انتقال توازن المنتج إلى تركيبة جديدة (L, K) . وبالربط بين مختلف نقاط التوازن الناتجة عن تغير قيمة التكلفة الكلية نحصل على ما يسمى بـ "منحنى توسع الإنتاج أو مسار التوسع للمنتج أو المؤسسة" الذي يشبه منحنى الاستهلاك- الدخل في تحليل سلوك المستهلك.



يتمثل الهدف من إنشاء منحنى مسار التوسع هو معرفة نسبة التغير في الكمية الواجب تطبيقها على أحد عوامل الإنتاج إذا غيرنا العامل الآخر بنسبة معينة.

7.3. مرونة الإحلال التقني بين عناصر الإنتاج:

L'élasticité de substitution technique entre les facteurs de production ($e_{subst} l, k$)

انطلاقاً من وضعية توازن المنتج، وإذا انخفض سعر أحد عوامل الإنتاج فإن وضعية توازن المنتج ستتغير حيث يقوم المنتج بإحلال هذا العامل (الأقل كلفة) مكان العامل الآخر إلى غاية وصول المنتج إلى نقطة جديدة. درجة إحلال عنصر العمل L محل عنصر رأس المال K ناتج حصرياً عن تغير السعر النسبي لعوامل الإنتاج (سعر العمل) وهو ما يسمى بمرونة الإحلال التقني، ويحسب كما يلي:

$$e_{subst} l, k = \frac{\Delta(K/L / K/L)}{\Delta(TMST l, k / TMST l, k)} = \frac{\Delta(K/L / K/L)}{\Delta(Pl/Pk / Pl/Pk)} = \frac{\text{التغير النسبي في عوامل الإنتاج}}{\text{التغير النسبي في } TMST l, k}$$

مثال: إذا كان ازدياد السعر النسبي للعمل يؤدي إلى ارتفاع النسبة (L/K) بـ 10% بينما مرونة الإحلال التقني تقدر بـ 0.5 . أحسب نسبة الزيادة في السعر النسبي للعمل؟

$$e_{subst} l, k = 0.5 = \frac{\Delta(K/L/K/L)}{\Delta(TMST l, k / TMST l, k)} = \frac{\Delta(K/L/K/L)}{\Delta(Pl/Pk / Pl/Pk)} = \frac{10\%}{\Delta(Pl/Pk / Pl/Pk)}$$

$$\Delta(Pl/Pk / Pl/Pk) = 10\% / 0.5 = 20\%$$

ومنه فنسبة الزيادة في السعر النسبي للعمل هي : 20% .

8.3. توابع الإنتاج المتجانسة وتابع كوب-دوغلاس:

Les fonctions de production homogènes et la fonction de production COBB-DOUGLAS

1.8.3. التوابع المتجانسة:

نقول عن تابع (دالة) الإنتاج $Q = f(l, k)$ أنه متجانس من الدرجة n إذا تحققت العلاقة التالية بالنسبة لكل عدد حقيقي موجب T :

$$F(TL, TK) = T^n \cdot F(L, K) = T^n \cdot Q$$

وبتعبير آخر فإن تابع الإنتاج المتجانس من الدرجة n إذا ضاعفنا (ضربنا) عوامل الإنتاج بنفس العدد الموجب T فحصلنا على كمية الإنتاج الكلي Q الأصلية مضروبة في T .

حسب قيمة n فإننا نميز بين 3 أنواع من عوائد حجم الإنتاج (غلة الحجم أو غلة الإنتاج) rendements d'échelle ، ونشير إلى أن مفهوم غلة الحجم يطبق على المدى الطويل يسمح بدراسة تغير حجم الإنتاج عند تغير كمية كل عوامل الإنتاج بنفس النسبة.

- إذا كان $n=1$: نقول أن دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى حيث أن: $T = T^n$ ، وبالتالي فتزايد عوامل الإنتاج بنسبة معينة T سيؤدي إلى تزايد كمية الإنتاج بنفس النسبة وبالتالي فغلة الحجم (الإنتاج) ثابتة (مردود الحجم ثابت).

- إذا كان $n > 1$: فإن: $T < T^n$ ، وبالتالي فتزايد عوامل الإنتاج بنسبة معينة سيؤدي إلى تزايد كمية الإنتاج بنسبة أكبر وبالتالي فغلة الحجم متزايدة.

- إذا كان $n < 1$: فإن: $T > T^n$ ، وبالتالي فتزايد عوامل الإنتاج بنسبة معينة سيؤدي إلى تزايد كمية الإنتاج بنسبة أقل وبالتالي فغلة الحجم متناقصة.

مثال: لتكن دالة الإنتاج: $Q = 2L^2 + 4.L.K + 3K^2$

حدد درجة التجانس لهذه الدالة وماذا يمكن القول عن غلة الحجم؟

الحل: لنضاعف عوامل الإنتاج بنفس المقدار وليكن λ

$$Q^* = f(\lambda L, \lambda K) = 2((\lambda L)^2) + 4(\lambda L)(\lambda K) + 3((\lambda K)^2) \\ = 2\lambda^2 L^2 + 4\lambda^2 L.K + 3\lambda^2 K^2$$

$$Q^* = \lambda^2 (2L^2 + 4L.K + 3K^2) = \lambda^2 . Q$$

إذن فدالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الثانية وبالتالي فغلة الحجم متزايدة، أي أن مضاعفة عوامل الإنتاج بمقدار λ سيؤدي إلى مضاعفة كمية الإنتاج بمقدار λ^2 أي بمقدار أكبر. و بالتالي فالإنتاج المحقق من خلال مضاعفة عوامل الإنتاج يكفي لتغطية تكاليف هذه العوامل ويبقى فائض يعتبر كربح للمنتج.

فإذا كان ($\lambda = 3$) فإن مضاعفة عوامل الإنتاج بـ 3 مرات سيؤدي إلى مضاعفة كمية الإنتاج بـ 3^2 أي بـ 9 مرات.

2.8.3. دالة الإنتاج كوب-دوغلاس:

طورت من طرف C.W.Cobb و PAUL Douglas سنة 1928 وهي من أشهر الدوال المستعملة في التحليل

الاقتصادي، وتأخذ الشكل التالي: $Q = A . L^\alpha . K^\beta$

A: ثابت موجب مرتبط بوحدات القياس المستعملة.

α : هي المرونة الجزئية للإنتاج بالنسبة للعمل ($e_{Q/L}$).

β : هي المرونة الجزئية للإنتاج بالنسبة لرأس المال ($e_{Q/K}$).

L: كمية العمل، K: كمية رأس المال، Q: حجم الإنتاج.

تابع كوب-دوغلاس يحقق العلاقة التالية: $f(TL, TK) = T^{\alpha+\beta} f(L, K)$

لنضاعف عوامل الإنتاج بمقدار T :

$$Q^* = A(TL)^\alpha (TK)^\beta = AT^\alpha L^\alpha T^\beta K^\beta = AT^{\alpha+\beta} L^\alpha K^\beta \\ Q^* = T^{\alpha+\beta} . Q$$

إذن فتابع كوب-دوغلاس متجانس من الدرجة $n = (\alpha + \beta)$ ، ومنه فإذا كان:

$(\alpha + \beta) > 1$: نقول أن غلة الحجم (عوائد الإنتاج) متزايدة.

$(\alpha + \beta) < 1$: نقول أن غلة الحجم (عوائد الإنتاج) متناقصة.

$(\alpha + \beta) = 1$: نقول أن غلة الحجم (عوائد الإنتاج) ثابتة، وبالتالي فبالإمكان كتابة دالة الإنتاج كما يلي:

$$Q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{و} \quad \beta = 1 - \alpha \quad \text{حيث}$$

α : هي المرونة الإنتاج بالنسبة للعمل ($e_{Q/L}$) و β : هي المرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال ($e_{Q/K}$)، إذن:

$$e_{Q/L} = \frac{\text{التغير النسبي في الكمية المنتجة}}{\text{التغير النسبي في كمية العمل}} = \frac{(dQ/Q)}{(dL/L)} = \frac{(dQ/dL)}{(Q/L)} = \frac{P_{ml}}{P_{Ml}} = \alpha$$

$$e_{Q/K} = \frac{\text{التغير النسبي في الكمية المنتجة}}{\text{التغير النسبي في كمية رأس المال}} = \frac{(dQ/Q)}{(dK/K)} = \frac{(dQ/dK)}{(Q/K)} = \frac{P_{mk}}{PMk} = \beta$$

مثال: لتكن دالة الإنتاج التالية: $Q = 8L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}}$ ، استنتج نوع غلة الحجم لهذه الدالة.

لدينا: $(\alpha + \beta) = \frac{3}{4} < 1$ ، $\beta = \frac{1}{2}$ ، $\alpha = \frac{1}{4}$ ، ومنه فغلة الحجم متناقصة.

3.8.3. قاعدة أولر "Euler":

دوال الإنتاج المتجانسة تستجيب لقاعدة أولر المتمثلة في: $nQ = L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK}$:
n: هي درجة التجانس.

مثال: لتكن دالة الإنتاج التالية: $Q = L^2 + 3LK + K^2$

$$\begin{aligned} P_{mL} &= 2L + 3K , & P_{mK} &= 3L + 2K \\ L \cdot P_{mL} + K \cdot P_{mK} &= L(2L + 3K) + K(3L + 2K) = 2L^2 + 3LK + 3LK + 2K^2 \\ &= 2(L^2 + 3LK + K^2) = 2Q \end{aligned}$$

ومنه (n=2) فغلة الحجم متزايدة، وبالتالي فالإنتاج المحقق من خلال مضاعفة عوامل الإنتاج يكفي لتغطية تكاليف هذه العوامل ويبقى فائض يعتبر ربح بالنسبة للمنتج.

9.3. دوال الطلب على عوامل الإنتاج:

تحدد دوال الطلب على عوامل الإنتاج L و K بكتابة الكميات المثلى منهما بدلالة حجم الإنتاج Q

وأسعارها P_L و P_K كما يلي: - دالة الطلب على العمل من الشكل: $L = f(Q, P_L, P_K)$

- دالة الطلب على رأس المال من الشكل: $K = f(Q, P_L, P_K)$

مثال: لتكن دالة الإنتاج التالية: $Q = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$

- حدد معادلة الكمية المتساوية (الناتج المتساوي) الموافق لكمية إنتاج (Q=16) وحدة، ومثله بيانياً.

- استخرج دوال الطلب على عوامل الإنتاج، واستنتج قيمة أدنى تكلفة يتحملها المنتج لإنتاج 16 وحدة من المنتج

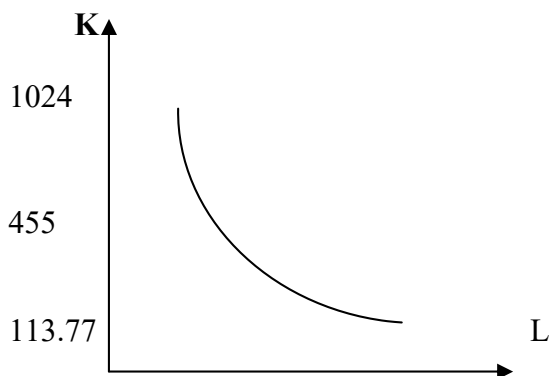
إذا علمت أن: $P_L = P_K = 1DA$

الحل: معادلة منحنى الناتج المتساوي من الشكل: $K = f(L)$

$$Q = 16 = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 8 = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}} \Rightarrow K^{\frac{1}{4}} = \frac{8}{L^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow (K^{\frac{1}{4}})^4 = \frac{8^4}{(L^{\frac{1}{2}})^4} = \frac{4096}{L^2}$$

دالة منحنى الناتج المتساوي $K = 4096/L^2$

التمثيل البياني:



L	2	3	6
K	1024	455.11	113.77

تحديد دوال الطلب على عوامل الإنتاج:

$$\frac{p_{ml}}{p_{mk}} = \frac{p_L}{p_K} \Rightarrow \frac{L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}}}{0.5 L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{4}}} = \frac{p_L}{p_K} \Rightarrow \frac{K}{0.5L} = \frac{p_L}{p_K}$$

$$\Rightarrow L = 2K \cdot p_K / p_L \dots (1)$$

بالتعويض في دالة الإنتاج نجد:

$$Q = 2 (2K p_K / p_L)^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{4}} \Rightarrow Q = 2^{\frac{3}{2}} K^{\frac{3}{4}} (p_K / p_L)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (K^{\frac{3}{4}}) = (Q / 2^{\frac{3}{2}} (p_K / p_L)^{\frac{1}{2}})$$

$$\Rightarrow K = Q^{\frac{4}{3}} / (4 (p_K / p_L)^{\frac{2}{3}})$$

$$K = \frac{1}{4} Q^{\frac{4}{3}} (p_L / p_K)^{\frac{2}{3}} \dots \dots \dots \text{دالة الطلب على رأس المال}$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$L = 2 \cdot (\frac{1}{4} Q^{\frac{4}{3}} (p_L / p_K)^{\frac{2}{3}}) \cdot p_K / p_L$$

$$L = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} Q^{\frac{4}{3}} p_L^{\frac{2}{3}} / p_K^{\frac{2}{3}} \right) \cdot p_K^{\frac{1}{3}} p_L^{\frac{2}{3}} / p_L^{\frac{1}{3}} p_L^{\frac{2}{3}}$$

$$L = \frac{1}{2} Q^{\frac{4}{3}} (p_K / p_L)^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots \text{دالة الطلب على العمل}$$

لحساب التكلفة يجب حساب كميات L و K:

بتعويض قيمة الأسعار وكمية الإنتاج في دوال الطلب على عوامل الإنتاج نجد:

$$L = \frac{1}{2} (16)^{\frac{4}{3}} (1) = 20,16$$

$$K = \frac{1}{4} (16)^{\frac{4}{3}} (1) = 10,08$$

إذن فالتركيبية (L = 20.16 ; K = 10.08) تمثل نقطة توازن المنتج.

ومنه فالتكلفة الكلية تساوي:

$$CT = L \cdot p_L + K \cdot p_K = 20,16 + 10,08 = 30,24 \text{ DA}$$