Matrices et applications linéaires

March 13, 2023

Contents

Chapter 1

Matrices et applications linéaires

1.1 Matrices et calcul matriciel

On appelle matrice de taille $(m \times n)$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans un corps $\mathbf{IK}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbf{IK}$. L'ensemble des matrices $(m \times n)$ à coefficients dans $\mathbf{IK}$ est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$.

On convient de noter (a_{ij}) l'élément de la matrice situé sur la $i^{-ème}$ ligne et $j^{-ème}$ colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} =: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Si $m = n$ on dit qu'on a une matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{IK}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$.
- Une matrice $m \times 1$ est appelée vecteur-colonne et une matrice $1 \times n$ est appelée vecteur-ligne.
- La matrice nulle, notée $\Theta_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.
- On appelle matrice diagonale toute matrice carrée $D = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle

que $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$. Et on note

$$D = diag\left(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}\right) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

- La matrice identité d'ordre n noté $\mathbf{I}_n$ est la matrice diagonale $diag\underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{n}$.

- On dit qu'une matrice carrée $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est

$$\begin{cases} \text{Triangulaire supérieure si } i \succ j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ \text{Triangulaire inférieure si } i \prec j \Rightarrow a_{ij} = 0 \end{cases}$$

- Une matrice diagonale $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire supérieure et inférieure ($i.e$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$).

- On appelle matrice transposée de $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}\left(\mathbf{IK}\right)$, notée ${}^tA$, la matrice $A = \left(a_{ji}\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}\left(\mathbf{IK}\right)$ obtenue en échangeant les lignes dans A en colonnes dans ${}^tA$. Bien évidemment ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

- Une matrice A est dite symétrique si ${}^tA = A$, $i.e.$ si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.

- Si A est une matrice carrée d'ordre n, on définit la trace de A comme la somme des éléments de la diagonale principale $tr\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$. Par conséquent $tr\left({}^tA\right) = tr\left(A\right)$.

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R}), \textit{ une matrice ligne}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \textit{ une matrice colonne,}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R}) \textit{ alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R}) \textit{ une matrice carrée d'ordre } 2, (trA = 1+5=6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4}(\mathbb{R}) \textit{ une matrice symétrique } ({}^tA = A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}) \textit{ une matrice Anti-symétrique } ({}^tA = -A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}) \textit{ une matrice triangulaire supérieure}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}) \textit{ une matrice triangulaire inférieure,}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}), \textit{ une matrice diagonale.}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R}), \textit{ la matrice identité.}$$

1.1.1 Addition des matrices

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$ deux matrice de même taille, on définit la somme par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$$

La matrice opposé de la matrice A notée $(-A)$ est définie par $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$.

Exemple 2 *Soient les deux matrices A, B suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

La somme de A est B est la matrice suivante

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),$$

Remarque 3 *La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie!*

Proposition 4 *Soient A, B et C trois matrices de même ordre, alors nous avons*
1) $A + B = B + A$ *(commutativité),*
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativité),*
3) ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$,
4) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

1.1.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$ (une matrice $n \times m$) et λ un scalaire de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) on définit le produit d'une matrice par un scalaire comme la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK}),$$

Si A et B sont deux matrices de même ordre, et λ un scalaire de $\mathbf{IK}$ alors

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B \text{ (distributivité)} \\ {}^t(\lambda A) &= \lambda.{}^t A. \end{aligned}$$

Exemple 5 *Soit $\lambda = \dfrac{3}{2}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, alors*

$$\lambda A = \frac{3}{2} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.1.3 Produit de matrices

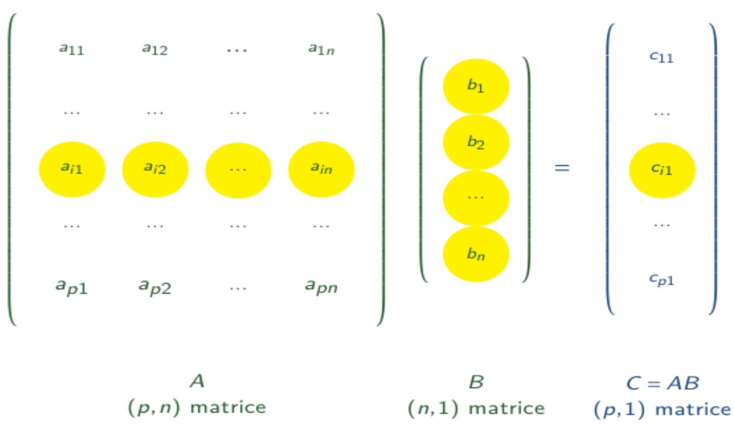
Soit $A = (a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$, une matrice de type (n,m) et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant m \\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{IK})$ une autre matrice de type (m,p), on définit le produit des deu matrices A et B par

$$A \times B = \sum_{k=1}^{m} (a_{i,k} b_{k,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

C'est une matrice (n,p) dont l'élément $(AB)_{ij}$ est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de A.

Remarque 6 *Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la deuxième matrice est égal au nombre de lignes de la première et le produit d'une matrice (m,n) par une matrice (n,p) est une matrice (m,p). (c'est la relation de Chasles de telle façon).*

Exemple 7 *L'élément $C_{i,1} = a_{i,1} \times b_1 + a_{i,2} \times b_2 + ... + a_{i,n} \times b_n$.*



$(p,n) \times (n,1) \rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow (p,1)$

Exemple 8 *Soient A et B deux matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

La matrice A est de type $(2,3)$ et la matrice B est d'ordre 3; la relation de Chasles est satisfaite.

$$
\begin{aligned}
A\times B = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1\times 1+3\times 0+5\times 3 & 1\times 2+3\times 4+5\times(-2) & 1\times(-1)+3\times 2+5\times 1 \\ 0\times 1+4\times 0+(-2)\times 3 & 0\times 2+4\times 4+(-2)\times(-2) & 0\times(-1)+4\times 2+(-2)\times 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 16 & 4 & 10 \\ -6 & 20 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Le produit $B\times A$ n'est pas défini.

Remarque 9 *$A\times B\neq B\times A$ en général (non commutativité).*

Prenons le cas général avec A d'ordre (m,p) et B d'ordre (p,n). Le produit AB est défini, c'est une matrice d'ordre (m,n).Qu'en est-il du produit BA? Il faut distinguer trois cas:

$*$) Si $m\neq n$ le produit BA n'est pas défini,

$*$) Si $m=n$ mais $p\neq n$, le produit AB est défini et c'est une matrice d'ordre (m,n) tandis que le produit BA est défini mais c'est une matrice d'ordre (p,p) donc $AB=BA$

$*$) Si $m=n=p$, A et B sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits AB et BA sont aussi carrées et d'ordre m mais là encore, en général, $A\times B\neq B\times A$.

Exemple 10 *Soient les matrices*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}=BA.$$

Proposition 11 *Soient A,B et C trois matrices, (les dimensions sont compatibles), on a les propriétés suivantes :*

1) *$A(BC)=(AB)C$ (associativité),*

2) *$A(B+C)=AB+AC$ (distributivité),*

3) *$A\mathbf{I}_n=\mathbf{I}_nA=A$.*

3) *${}^t(AB)={}^tB\times{}^tA$,*

4) *$tr(AB)=tr(BA)$.*

5) Si A est une matrice carrée, on note A^p (pour $p\geq 2$) la matrice définie par $A^p=\underset{p\ fois}{A\times A...}\times A$.

Exemple 12 *Une matrice A est* ***nilpotente*** *lorsqu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p est la matrice nulle.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}\ \text{et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est nilpotente d'ordre 3.

Proposition 13 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées, avec $AB = BA$ (on dit qu'elles commutent), alors on a*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k}B^k. \ (\textit{Binôme de Newton})$$

La démonstration utilise la récurrence.

Exercise 14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Démontrer que la matrice $(\mathbf{I}_n - A)$ est inversible, et déterminer son inverse.*

Exercise 15 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ \text{ et } B = A - \mathbf{I}_3.$$

1) Calculer B, B^2, B^3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que A^3 est combinaison linéaire de A^2, A et $\mathbf{I}_3$.
3) En déduire que A^n est combinaison linéaire de A^{n-1}, A^{n-2} et A^{n-3} si $n \geq 3$.

1.1.4 Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$ est dite inversible (ou régulière) s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK}))$ telle que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n.$$

Si une telle matrice existe, alors elle est unique, on la note A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de A.

- Si une matrice est non inversible (*i.e.* il n'existe pas A^{-1}), on dit qu'elle est singulière.

- Une matrice carrée A est dite orthogonale si elle est inversible et $A\times^t A =^t A \times A = \mathbf{I}_n$, *i.e.* si ${}^tA = A^{-1}$.

Proposition 16 *Soit A et B deux matrices inversibles, alors*
1) *A^{-1} l'est aussi et on a $(A^{-1})^{-1} = A$,*
2) *${}^tA$ l'est aussi et on a $({}^tA)^{-1} =^t \left(A^{-1}\right)$,*
3) *AB l'est aussi et on a$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

Exemple 17 *Considérons les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \textit{et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \textit{donc } A^{-1} = B.$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \ \textit{et } \left({}^tA\right)^{-1} =^t \left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = A.B = \mathbf{I}_3$$

1.1.5 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 18 *(Déterminant d'une matrice d'ordre n) Soit A une matrice carrée d'ordre n.*

Étant donné un couple (i,j) d'entiers, $1 \le i,j \le n$, on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{-ème}$ ligne et la $j^{-ème}$ colonne de A. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est défini par récurrence sur l'ordre de la matrice A:

1) Si $n = 1$: le déterminant de A est le nombre $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

2) Si $n \succ 1$: le déterminant de A est le nombre

$$\det A = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \ \textit{quel que soit la ligne } i, \ 1 \le i \le n,$$

ou d'une manière equivalente

$$\det A = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \ \textit{quel que soit la colonne } j, \ 1 \le j \le n.$$

L'astuce ici est d'associer toute matrice carrée avec une autre matrice dite matrice de signe comme suit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{(-1)^{i+j}} \begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 19 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Alors, on a d'une part

$$\det(A_{11}) = a_{22}, \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12} et \det(A_{22} = a_{11})$$

et d'autre part,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{(-1)^{i+j}} \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

donc on peut calculer $\det(A)$ *par l'une des formules suivantes:*

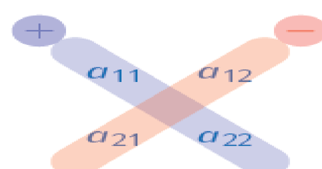
$$\begin{array}{c} a)\ \det A = +a_{11}\det(A_{11}) + (-a_{12})\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ (\textit{C'est le développement suivant la première ligne}) \\ \textit{ou encore} \\ b)\ \det A = +a_{11}\det(A_{11}) + (-a_{21})\det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ (\textit{C'est le développement suivant la première colonne}) \end{array}$$

Le développement suivant la première ligne ou la première colonne (respectivement la deuxième ligne ou deuxième colonne) donne le même résultat $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Méthode pratique (Règle de Sarrus)

*) Soit A une matrice carrée d'ordre 2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$



Exemple 20 *Soit la matrice*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times (-2) = 10.$$

**) Soit A une matrice carrée d'ordre 3

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

On a

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Par la méthode de Sarrus, on obtient

$$\det A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \qquad \det A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \qquad \det A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$\det A_{21} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} \qquad \det A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \qquad \det A_{23} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

$$\det A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \qquad \det A_{32} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \qquad \det A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

donc on peut calculer le $\det A$ par un développement suivant une ligne ou une colonne, en respectant les signes.

*) En développant suivant la $1^{ère}$ ligne

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13} \\ &= +a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}. \end{aligned}$$

*) En développant suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + a_{31}\det A_{31} \\ &= +a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}. \end{aligned}$$

Le calcul montre que ces formules donnent bien le même résultat.

Proposition 21 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.*

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1.

Il convient d'utiliser la définition de déterminant après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéro sachant que:

1. Si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det A = 0$,
2. Si on multiplie une colonne (resp. une ligne) par un scalaire $\lambda \neq 0$, alors le déterminant est multiplié par λ
3. Si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé (*i.e.*, le déterminant change de signe),
4. On ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes), *i.e.*

$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j \qquad\qquad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \qquad (i \neq j \text{ et } \lambda \neq 0)$$

Exemple 22 *Calculer le déterminant*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Le développement par rapport la troisième colonne exige le calcul d'un seul déterminant d'ordre 2 et on a:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

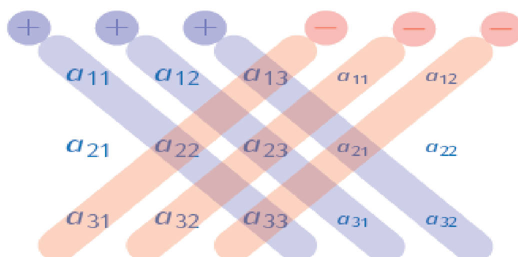
On peut sinon faire apparaître encore plus de zéros dans la matrice jusqu'à obtenir une matrice triangulaire :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 2 \times (-5) = -10. \end{aligned}$$

Déterminant d'une matrice d'ordre 3 (Règle de Sarrus)

Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})\,.$$



Exemple 23 *Calculer avec la méthode de Sarrus le déterminant*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & & (-) & & (-) & & (-) \\ 1 & & 0 & & \mathbf{1} & & 1 & & 1 & \\ & \searrow & & (\times) & & (\times) & & \nearrow & & \\ 0 & & \mathbf{2} & & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \nearrow & & (\times) & & (\times) & & \searrow & & \\ \mathbf{5} & & 3 & & 0 & & 5 & & 0 & \\ & & & & & (+) & & (+) & & (+) \end{vmatrix} = -10.$$

Ou encore

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & & 0 & & \mathbf{1} & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & 0 & & \mathbf{2} & & 0 & \\ & & (\times) & & (\times) & & \\ & \mathbf{5} & & 3 & & 0 & \\ (-) & & (\times) & & (\times) & & (+) \\ & 1 & & 0 & & 1 & \\ (-) & & \nearrow & & \searrow & & (+) \\ & 0 & & 2 & & 0 & \\ (-) & & & & & & (+) \end{vmatrix} = -10.$$

Remarque 24 *la règle de Sarrus pour développer un déterminant n'est plus valable pour $n \geqslant 4$.*

Théorème 25 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$

$$A \text{ est inversible si et seulement si } \det A \neq 0.$$

Proposition 26 *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$

1) $\det{}^t A = \det A$

2) $\det(AB) = \det A \det B$

3) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

Calcul de la matrice inverse Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$ inversible $(\Leftrightarrow \det A \neq 0)$, pour obtenir A^{-1}, on calcul d'une part, la matrice des cofacteurs des éléments de A, appelée co matrice de A, ensuite, on transpose la co matrice de A et on divise par $\det A$.

Théorème 27 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{IK})$ *inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t ComA.$$

Exemple 28 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse de la matrice A.

On sait que $\det A = -10 \neq 0$ *ceci équivalent à dire que la matrice A est inversible et on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t ComA$$

$$ComA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{1+3}\det A_{13} \\ (-1)^{2+1}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & (-1)^{2+3}\det A_{23} \\ (-1)^{3+1}\det A_{31} & (-1)^{3+2}\det A_{32} & (-1)^{3+3}\det A_{33} \end{pmatrix}$$

$$ComA = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 3 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^{t}ComA = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -10 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

Une vérification rapide, nous assure le résultat

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.6 Rang d'une matrice

Définition 29 *Le rang d'une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$, noté $rg(A)$, est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Il représente le nombre maximum de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants (ou, ce qui est équivalent, le nombre maximum de vecteurs lignes linéairement indépendants)*

Proposition 30 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{IK})$, alors*

$$0 \leq rg(A) \leq \min(n,m),$$

et $rg(A) = 0$ si et seulement si tous les élément de A sont nuls.

Exemple 31 *Soit A la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),$$

Le rang de A est 2 car

**) A est d'ordre $(2,3)$ donc $0 \leq rg(A) \leq \min(2,3)$ $0 \leq s \leq 2$ i.e; $s = 0, 1 ou$ 2,*

**) il existe au moins un élément de A différent de zéro, donc $s \neq 0$,*

**) Comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure!*

**) comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.*

Exemple 32 *Soit A les deux matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

1) Le rang de A est 3 car, $\det A \neq 0$.

2) Le rang de B est 2

**) d'une part $\det B = 0$, $rg(B) \neq 3$, et d'autre part, il existe au moins un élément de B différent de zéro, donc $s \neq 0$.*

***) le déterminant de la sous matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est différent de zéro, donc $rg(B) = 2$.*

1.1.7 Exercices

Exercise 33 *Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercise 34 *Calculer le rang des matrices*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 35 *Calculer les déterminants*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

1.2 Application linéaires

On désigne dans le paragraphe qui suit par E et F les deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels, où $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 36 *(Application linéaire)*

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire (ou homomorphisme) de E vers F si

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \forall (u,v) \in E^2,$$
$$f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall u \in E \text{ et } \forall \alpha \in \mathbf{K}.$$

ou, de manière équivalente,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$$

Exemple 37 *Soit les applications*

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x,y) \mapsto f(x,y) = (x, x-y, x+3y)$

2) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x-2z, x+y, x+3y-z)$

Remarque 38 *Soit les applications*

1) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x,y) \mapsto f_3(x,y) = (x+1, x-y, x+3y)$

3) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f_4(x) = x^2 + x$

f_3 n'est pas une application linéaire car $f_3(0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$.

(Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto ax$ (à ne pas confondre avec les applications affines).

f_4 n'est pas une application linéaire car par exemple $f_4(3) = 12 \neq 6 = 3f_4(1)$.

Définition 39 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1) Si $f : E \to F$ est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E sur F.

2) Si $F = E$, on dit que $f : E \to F$ est un endomorphisme de E.

3) Si $F = E$ et $f : E \to F$ est bijective, on dit que f est un automorphisme de E.

4) Si $F = \mathbb{R}$, on dit que $f : E \to F$ est une forme linéaire..

Exemple 40 *L'application nulle*

$$\begin{aligned} f &: E \to F \\ x &\mapsto f(x) = 0_F \end{aligned}$$

est linéaire

et L'application identique

$$\begin{aligned} f &: E \to E \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

est un automorphisme.

Notation 41 **) L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ ou $Hom(E, F)$,*

**) l'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $Isom(E, F)$,*

**) L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$,*

**) L'ensemble des automorphismes de E est noté $Aut(E)$.*

Proposition 42 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a:*

$$\begin{array}{lcl} 1)\ f(0_E) = 0_F & \textit{et} & 2)\ f(-u) = -f(u) \\ 3)\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i f(u_i) & \textit{pour tout} & u_1, u_2, ..., u_n \in E \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4)\ \text{Si } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(E, F), \text{ alors} & f + g \in \mathcal{L}(E, F), \\ 5)\ \text{Si } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } \alpha \in \mathbf{K}, \text{ alors} & \alpha f \in \mathcal{L}(E, F), \\ 6)\ \text{Si } f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ et } g \in \mathcal{L}(F, G), \text{ alors} & g \circ f \in \mathcal{L}(E, G), \\ 7)\ \text{Si } f \in Isom(E, F), \text{ alors} & f^{-1} \in Isom(F, E). \end{array}$$

1.2.1 Matrice associée d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ une base de F.

Définition 43 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F la matrice $(m \times n)$ dont la $j^{-ème}$ colonne est constituée* *des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$*

$$A = \mathrm{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall j \in 1,...,n;\ A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots\cdots & f(e_j) & \cdots\cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ & & \ldots & & \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots & a_{in} \\ & & \ldots. & & \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ \ldots \\ e'_i \\ \ldots \\ e'_m \end{array} \end{array}$$

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + ... + a_{ij}e'_i + ... + a_{mj}e'_m$$

Remarque 44 *Une matrice d'une application linéaire d'un espace de dimension n vers un espace de dimension m est de format $(m \times n)$ et non $(n \times m)$*

Proposition 45 *La connaissance des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ caractérise entièrement une application linéaire.*

Notation 46 *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E),on prend en général la même base pour E en tant qu'espace de départ, et pour E en tant qu'espace d'arrivée et on note $A = \mathrm{mat}_{(\mathcal{B})}(f)$.*

Exemple 47 *Soit l'application linéaire*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto f(x, y) = (x, x - y, x + 3y)$$

avec $\mathcal{B} = \left\{e_1\binom{1}{0}, e_2\binom{0}{1}\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \{e'_1(1,0,0), e'_1(0,1,0), e'_1(0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice associée à f aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array},\ A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

En général, la matrice d'une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^m$ relativement aux bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$ est appelée la *matrice canonique* de cette application.

Exemple 48 *La matrice canonique de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto f(x, y) = (ax + by, cx + dy, ex + fy)$ s'écrit:*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 & & \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} \quad est \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}). \end{array}$$

Remarque 49 *La matrice associée à une application linéaire n'est pas unique, elle dépend des bases choisies dans les espaces E et F.*

Proposition 50 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ une matrice d'ordre $(m \times n)$, E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension m. Quelles que soient les bases choisies de E et F, le rang de l'application linéaire $f : E \to F$ associée à A est toujours le même et est égale au rang de la matrice A.*

1.2.2 Applications linéaires et matrices associées (Opérations algébriques)

On sait que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$ a une structure de espace vectoriel de dimension $n \times p$ (Admis!)

Théorème 51 *Soient E $(\dim E = n)$ et F $(\dim F = p)$ deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels de dimension fini, les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ sont isomorphes.*

$$\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \dim \mathcal{L}(E,F) = n \times p.$$

Proposition 52 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, telle que $\mathcal{B}$ une base de E $(\dim E = n)$, $\mathcal{C}$ une base de F $(\dim F = m)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a*

$\operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f+g) = \operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) + \operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(g)$
$\operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(\lambda f) = \lambda \operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$

Le produit des matrices va être défini de sorte qu'au *produit* de deux matrices corresponde la *composée* des applications linéaires associées.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors la composée

$$g \circ f : E \underset{f}{\to} F \underset{g}{\to} G$$

$$\boxed{\left(\begin{array}{l} \mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}) \text{ base de } E \\ \mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_p}\right) \text{ base de } F \\ \mathcal{D} = (\overrightarrow{g_1}, ..., \overrightarrow{g_q}) \text{ base de } G \end{array}\right. \quad \text{On a} \left\{\begin{array}{l} A = \operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \in M_{p,n}(\mathbf{K}) \\ B = \operatorname{mat}_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(g) \in M_{q,p.}(\mathbf{K}) \\ C = \operatorname{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{D})}(g \circ f) \in M_{q,n}(\mathbf{K}) \end{array}\right.}$$

1.2.3 Changements de bases et applications linéaires

Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 53 *la matrice de passage d'une base (dite "ancienne base") à une autre (dite "nouvelle base") est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.*

Si E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n,

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ bases de E, $\overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \overrightarrow{e_i}$, alors

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overrightarrow{e'_1} & .... & \overrightarrow{e'_j} & .... & \overrightarrow{e'_n} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} & & p_{1j} & & \\ & & ... & & \\ p_{i1} & .... & p_{ij} & .... & p_{in} \\ & & .... & & \\ & & p_{nj} & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \overrightarrow{e_1} \\ ... \\ \overrightarrow{e_i} \\ ... \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice de l'identité de E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = \text{mat}_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})} (id_E)$$

Proposition 54 *Soient $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ deux bases dans un $\mathbf{K}-$espace vectoriel, alors on a:*

1. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}'')} = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} \times P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}$ (relation de Chasles),
2. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B})} = I_n$,
3. $\left(P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}\right)^{-1} = P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$.

Exemple 55 *Soit $\mathcal{B}_c\left(\mathbb{R}^3\right)$ la base canonique dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{u_1\,(2,1,1)\,, u_2\,(3,2,1)\,, u_3\,(-1,0,0)\}$ une nouvelle base dans $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage est*

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avant de continuer sur les matrices de passages, on définit brièvement les bases d'un espace vectoriel.

Définition 56 *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{B}$ un sous ensemble de E.*

$$\mathcal{B} \textit{ une base de } E \textit{ ssi } \left\{ \begin{array}{ll} 1)\ \mathcal{B} & \textit{génératrice} \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{libre} \end{array} \right.$$

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un sous ensemble de E.

- La famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice si tous les vecteurs de l'espace E s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$

$$\forall x \in E, \exists\,(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n / \qquad x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i u_i$$

- La famille E est dite libre ou encore $u_1, u_2, ..., u_n$ sont linéairement independent si toute combinaison linéaire nulle donne la solution nulle, autrement dit

  $$\forall (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n / \quad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

Proposition 57 *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E ssi*

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1)\ \mathcal{B} & \textit{génératrice} \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{libre} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1)\ \mathcal{B} & \textit{génératrice} \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{cardinal } E = n \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1)\ \mathcal{B} & \textit{cardinal } E = n \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{libre} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1)\ \mathcal{B} & \textit{cardinal } E = n \\ 2)\ \mathcal{B} & \det \mathcal{B} \neq 0 \end{array} \right.$$

Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

Proposition 58 *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ deux bases de E et $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$ la matrice de passage, on a*

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{e'_i} \in E, \ \textit{ou encore } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{bmatrix}$$

les matrices colonne des coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Alors :

$$X = PX'$$

Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Proposition 59 *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ deux bases de E , $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$ et $P^{-1} = P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$ les matrice de passages associées. On note:*

$$A = \underset{(\mathcal{B},\mathcal{B})}{\mathrm{mat}} (f), \quad D = \underset{(\mathcal{B}',\mathcal{B}')}{\mathrm{mat}} (f)$$

Alors

$$D = P^{-1} AP$$

Définition 60 *Deux matrices sont dites semblables si ce sont les matrices de la même application linéaire*

$$A \sim D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \mathrm{mat}_{\ (\mathcal{B},\mathcal{B})} (f) \\ A' = \mathrm{mat}_{\ (\mathcal{B}',\mathcal{B}')} (f) \end{array} \right.$$

Proposition 61 *Soit $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices semblables, alors*

$$\textit{rang } A = \textit{rang } D \textit{ et } \det A = \det D.$$

1.2.4 Exercices